

Nombres complexes : Nnouk Betsen Franck Yves, Polytechnicien et Auteur de livres scientifiques

L'objectif principal de ce cours est de faciliter la compréhension des apprenants en s'arrêtant tour à tour sur les notions qui sont le plus souvent un véritable cauchemar en exploitant un langage simple.

1^{er} module : Définition et propriétés d'un nombre complexe.

I. Définitions importantes :

Définition : Nombre complexe

On appelle **nombre complexe** tout nombre de la forme : $z = a + ib$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

- L'ensemble des nombres complexes est noté : $\mathbb{C}$.
- Le réel a est appelé **partie réelle** et le réel b **partie imaginaire**. On note très souvent : $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$.
- L'écriture ci-dessus de z est appelée **forme algébrique** de z .

Définition : Conjugué d'un nombre complexe

Soit le nombre complexe $z = x + iy$, x et y étant réels. On appelle **nombre complexe conjugué** de z , le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que : $\bar{z} = x - iy$.

N.B : $\text{Re}(\bar{z}) = \text{Re}(z)$ et $\text{Im}(\bar{z}) = -\text{Im}(z)$.

Définition : Module d'un nombre complexe

On appelle **module** du nombre complexe $z = x + iy$, noté $|z|$ le nombre réel positif ou nul défini par : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

N.B : $|\bar{z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

II. Propriétés-opérations dans $\mathbb{C}$.

II.1. Opérations algébriques.

Soient z et z' des nombres complexes tels que : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$
 x, y, x' et y' des réels. On a :

- $z = z' \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$ (égalité)
- $z + z' = (x + x') + i(y + y')$ (somme)
- $z - z' = (x - x') + i(y - y')$ (différence)
- $zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$ (produit)
- $\frac{z}{z'} = \frac{x+iy}{x'+iy'} = \frac{(x+iy)(x'-iy')}{x'^2+y'^2}$ (quotient)

II.2. Opérations sur les nombres complexes conjugués

- Pour tous nombres complexes z et z' , on a :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad ; \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

II.3. Opérations sur les modules des nombres complexes

- Pour tous nombres complexes z et z' , on a :

- $|z| = |\bar{z}|$;
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad (z \neq 0)$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0)$
- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$;
- $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$;
- $|z^n| = |z|^n$.

II.4. Opérations complémentaires sur les nombres complexes

Pour tous nombres complexes z et z' et n un entier naturel non nul.

$$\bullet (z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2.$$

$$\bullet (z + z')^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^{n-k} (z')^k. \text{ (Binôme de Newton)}$$

$$\bullet z \cdot z' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0.$$

$$\bullet z^{n+1} = z^n \times z$$

$$\bullet z^{-n} = \frac{1}{z^n}.$$

3^{ème} module : Comment déterminer la forme trigonométrique d'un complexe

Méthode précise et simple :

Soit z un nombre complexe donné sous sa forme algébrique ($z = a + ib$). Pour obtenir la forme trigonométrique du nombre complexe z .

On calcule premièrement son module, ($|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$). On pourra noter $r = |z|$.
Puis on met celui-ci en facteur dans $z = a + ib$. On obtiendra alors :

$$z = r \left(\frac{a}{r} + i \frac{b}{r} \right)$$

Ensuite, il faut rechercher un angle α qui vérifie les 2 égalités suivantes : $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{r} \\ \sin \alpha = \frac{b}{r} \end{cases}$

Ce qui signifie que l'on aura mis z , sous la forme : $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. C'est donc cette forme que l'on appelle « **forme Trigonométrique** ». α est appelé **argument** de z . On note : $\alpha = \arg(z)$.

Remarque : r est un réel strictement positif ($r > 0$).

Si l'enseignant vous donne un complexe sous la forme ci-dessous :

$$z = -2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Et qu'il vous demande sa forme trigonométrique, la majorité d'entre vous vont rater.

En effet, vous allez répondre que « le nombre donné par l'enseignant est déjà sous la forme trigonométrique, ce qui est faux car $-2 < 0$. » Conséquence retenez que si un complexe est sous la forme : $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et que $r < 0$, alors sa forme trigonométrique est plutôt : $z = -r(\cos(\pi + \alpha) + i\sin(\pi + \alpha))$.

Pour le cas : $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, on aura alors : $z = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Or : $-\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3}$ et $-\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}$

Donc la forme trigonométrique est : $z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

Rappel :

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

- | | | |
|--------------------------------------|---|--------------------------------------|
| • $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ | ; | • $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ |
| • $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ | ; | • $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ |
| • $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ | ; | • $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ |

Exercice d'application :

Déterminer la forme trigonométrique dans chacun des cas suivants :

- | | | |
|--------------------------|---|---|
| a) $z = 1 - i\sqrt{3}$ | ; | c) $z = 4 + 4i$ |
| b) $z = -4 - 4i\sqrt{3}$ | ; | d) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ |

Solution :

J'ai mis expressément 4 cas, vous remarquerez que dans le 1^{er} cas, on a : $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$, dans le 2^{ème} cas, on a : $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$, dans le 3^{ème} cas, on a : $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$, enfin dans le 4^{ème} cas, on a : $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

Et bien cela me permettra de vous montrer, comment déterminer la forme trigonométrique, dans chacun de ces cas et c'est cela que vous devez retenir.

1^{er} cas :

On a : $z = 1 - i\sqrt{3}$. Son module est : $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.

Donc : $z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Cherchons maintenant un angle α tel que : $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Certains peuvent utiliser le

tableau trigonométrique ci-dessous pour lire des valeurs usuelles. D'autres pourront faire le cercle trigonométrique ou même utiliser la calculatrice. A chacun sa méthode mais soyez rapide.

On peut d'après le tableau lire que l'angle $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc, la forme trigonométrique de z est : $z = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$.

2ème cas :

On a : $z = -4 - 4i\sqrt{3}$. Son module est : $r = \sqrt{(-4)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$.

Donc : $z = 8 \left(-\frac{4}{8} - i\frac{4\sqrt{3}}{8} \right) = 8 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. (En simplifiant les fractions : $\frac{4}{8}$ et $\frac{4\sqrt{3}}{8}$ par 4)

Cherchons maintenant un angle α tel que : $\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

D'après le tableau précédent, on déduit aisément que : $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$.

Donc, la forme trigonométrique de z est : $z = 8 \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right)$.

De façon analogue vous pouvez traiter les deux derniers cas et tous les cas qu'on pourrait vous proposer (à partir du tableau trigonométrique si vous le maîtrisez par cœur).

Notation d'Euler :

Le mathématicien Euler a posé pour tout nombre réel α : $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

Remarque : $e^{-i\alpha} = \overline{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha}$.

Formules d'Euler :

Pour tout nombre réel α , et pour tout entier relatif n , on a :

$$\cos(n\alpha) = \frac{e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(n\alpha) = \frac{e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}}{2i}.$$

En particulier pour $n = 1$, on a : $\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$.

Ces formules seront utilisées pour la linéarisation.

4^{ème} module : Linéarisation .

Il existe trois formes de cas de linéarisation à savoir :

- $\cos^m(ax)$;
- $\sin^n(ax)$;
- $\cos^m(ax) \cdot \sin^n(bx)$.

Pour se fixer les idées, nous allons traiter pour chacune des formes un exemple au moins en détaillant minutieusement chaque ligne de calcul, pour maximiser votre compréhension.

1^{er} cas : Linéarisation de la forme $\cos^m(ax)$.

Linéariser :

$$a) \cos^4 x \quad ; \quad b) \cos^5(2x).$$

Solution :

Nous corrigerons le premier cas. Essayez le second cas vous-même.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{(e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3(e^{-ix}) + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 + 4(e^{ix})^1(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4}{16} \\ &= \frac{e^{4ix} + 4e^{3ix} \times e^{-ix} + 6e^{2ix} \times e^{-2ix} + 4e^{ix} \times e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16} \\ &= \frac{e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^4(x) &= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix} + 6}{16} \\ &= \frac{(e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6}{16}\end{aligned}$$

Or : $e^{4ix} + e^{-4ix} = 2 \cos(4x)$ et $e^{2ix} + e^{-2ix} = 2 \cos(2x)$.

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \cos^4(x) &= \frac{2 \cos(4x) + 4(2 \cos(2x)) + 6}{16} \\ &= \frac{2 \cos(4x) + 8 \cos(2x) + 6}{16} \\ &= \frac{2}{16} \cos(4x) + \frac{8}{16} \cos(2x) + \frac{6}{16}\end{aligned}$$

D'où : $\cos^4(x) = \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}$.

2^{ème} cas : Linéarisation de la forme $\sin^n(bx)$.

Linéariser :

a) $\sin^2(3x)$;

b) $\sin^5(x)$;

Solution :

a) Linéarisons l'expression : $\sin^2(3x)$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } \sin^2(3x) &= \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \right)^2. \text{ Car : } \sin^2(3x) = (\sin(3x))^2 \text{ et } \sin(3x) = \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}. \\ &= \frac{e^{6ix} - 2e^{3ix} \times e^{-3ix} + e^{-6ix}}{-4} \\ &= \frac{e^{6ix} - 2 + e^{-6ix}}{-4} \\ &= -\frac{e^{6ix} + e^{-6ix} - 2}{4}\end{aligned}$$

Or : $e^{6ix} + e^{-6ix} = 2 \cos(6x)$.

Donc : $\sin^2(3x) = -\frac{2 \cos(6x) - 2}{4} = -\left(\frac{2}{4} \cos(6x) - \frac{2}{4}\right) = -\frac{2}{4} \cos(6x) + \frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \cos(6x) + \frac{1}{2}$.

b) Linéarisons l'expression : $\sin^5 x$.

On a : $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ (formule d'Euler)

$$\text{Donc : } \sin^5 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^5.$$

$$\text{Soit : } \sin^5 x = \frac{e^{5ix} - 5e^{i4x} \times e^{-ix} + 10e^{i3x} \times e^{-i2x} - 10e^{i2x} \times e^{-3ix} + 5e^{ix} \times e^{-4ix} - e^{-5ix}}{(2i)^5}$$

$$\text{Soit : } \sin^5 x = \frac{e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}}{32i}.$$

Maintenant, on regroupe les termes identiques à un signe près. Par exemple les termes $(e^{5ix}$ et $e^{-5ix})$, $(e^{3ix}$ et $e^{-3ix})$ et $(e^{ix}$ et $e^{-ix})$ sont identiques à un signe près.

$$\text{On a alors : } \sin^5 x = \frac{e^{5ix} - e^{-5ix} - 5e^{3ix} + 5e^{-3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix}}{32i}.$$

$$\text{En factorisant, il vient : } \sin^5 x = \frac{(e^{5ix} - e^{-5ix}) - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})}{32i}.$$

$$\text{Or souvenons-nous que : } e^{inx} - e^{-inx} = 2i \sin(nx), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Donc : } \sin^5 x = \frac{2i \sin(5x) - 5(2i \sin(3x)) + 10(2i \sin x)}{32i} = \frac{2i(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin x)}{32i}.$$

$$\text{Après simplification, on obtient : } \sin^5 x = \frac{1}{16} \sin(5x) - \frac{5}{16} \sin(3x) + \frac{5}{8} \sin x.$$

3^{ème} cas : Linéarisation de la forme $\cos^m(ax) \cdot \sin^n(bx)$.

a) Linéarisons l'expression : $\cos^2(x) \cdot \sin^2(x)$.

$$\text{On a : } \cos^2 x \sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2$$

$$\cos^2 x \sin^2 x = - \left(\frac{e^{i2x} + 2e^{ix} \times e^{-ix} + e^{-2ix}}{4} \right) \left(\frac{e^{i2x} - 2e^{ix} \times e^{-ix} + e^{-2ix}}{4} \right)$$

$$\cos^2 x \sin^2 x = - \left(\frac{e^{i2x} + 2 + e^{-2ix}}{4} \right) \left(\frac{e^{i2x} - 2 + e^{-2ix}}{4} \right)$$

$$\cos^2 x \sin^2 x = - \left(\frac{e^{i4x} - 2e^{i2x} + 1 + 2e^{2ix} - 4 + 2e^{-2ix} + 1 - 2e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16} \right)$$

$$\text{Donc : } \cos^2 x \sin^2 x = - \left(\frac{(e^{i4x} + e^{-4ix}) - 2}{16} \right)$$

$$\text{Or : } e^{inx} + e^{-inx} = 2\cos(nx).$$

$$\text{D'où : } \cos^2 x \sin^2 x = - \left(\frac{2\cos(4x) - 2}{16} \right) = - \left(\frac{2\cos(4x)}{16} - \frac{2}{16} \right) = - \frac{2\cos(4x)}{16} + \frac{2}{16}.$$

$$\text{Soit : } \cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos(4x).$$

b) Linéarisons l'expression : $\cos^4(x) \cdot \sin^2(x)$.

Posons : $A = \cos^4(x) \cdot \sin^2(x)$.

$$\text{On a : } A = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \cdot \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2$$

$$A = - \left(\frac{e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16} \right) \left(\frac{e^{i2x} - 2 + e^{-2ix}}{4} \right)$$

$$A = - \left(\frac{e^{i6x} - 2e^{i4x} + e^{2ix} + 4e^{i4x} - 8e^{2ix} + 4 + 6e^{2ix} - 12 + 6e^{-2ix} + 4 - 8e^{-2ix} + 4e^{-4ix} + e^{-2ix} - 2e^{-4ix} + e^{-6ix}}{64} \right)$$

$$A = - \left(\frac{(e^{i6x} + e^{-i6x}) + 2(e^{i4x} + e^{-i4x}) - (e^{i2x} + e^{-i2x}) - 4}{64} \right)$$

$$A = - \left(\frac{2 \cos(6x) + 2(2 \cos(4x)) - 2 \cos(2x) - 4}{64} \right)$$

$$\text{Soit : } A = - \left(\frac{1}{32} \cos(6x) + \frac{1}{16} \cos(4x) - \frac{1}{32} \cos(2x) - \frac{1}{16} \right).$$

$$\text{Donc : } \cos^4 x \sin^2 x = -\frac{1}{32} \cos(6x) - \frac{1}{16} \cos(4x) + \frac{1}{32} \cos(2x) + \frac{1}{16}.$$

5^{ème} module : Forme exponentielle d'un nombre complexe.

Si z un nombre complexe non nul de module r et d'argument α . Alors : $z = r e^{i\alpha}$.

L'écriture précédente est appelée **forme exponentielle** de z .

Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls tels que : $z = r e^{i\alpha}$ et $z' = r' e^{i\alpha'}$.
Où n un entier relatif.

On a :

$$\begin{aligned} \bullet \quad z z' &= r r' e^{i(\alpha + \alpha')} & ; & & \bullet \quad \frac{z}{z'} &= \frac{r}{r'} e^{i(\alpha - \alpha')} \\ \bullet \quad z^n &= r^n e^{i n \alpha} & ; & & \bullet \quad \frac{1}{z} &= \frac{1}{r} e^{-i\alpha} \end{aligned}$$

Exercice d'application :

Déterminer la forme exponentielle dans chacun des cas suivants :

a) $z = 1 - i\sqrt{3}$;

c) $z = 4 + 4i$

b) $z = -4 - 4i\sqrt{3}$;

d) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Solution :

1^{er} cas :

On a : $z = 1 - i\sqrt{3}$. Son module est : $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.

Donc : $z = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

4^{ème} cas :

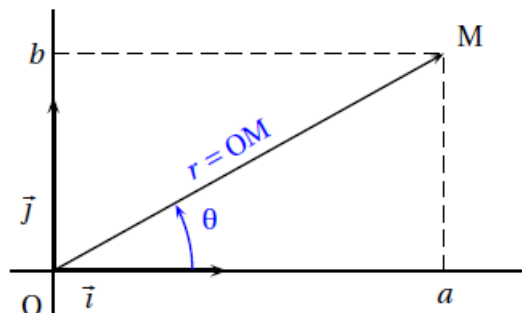
On a : $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Son module est : $r = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$.

Donc : $z = 1 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right) = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

6^{ème} module : Notion d'argument d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

On appelle **argument** de z toute mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.



Notation : On note $\arg(z)$.

Propriétés sur les arguments des nombres complexes

- Le nombre complexe nul n'a pas d'argument.
- z est réel $\Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg(z) \equiv 0[\pi]$.
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Exercice d'application lié aux formules ci-dessus :

Soient P un plan affine euclidien et (O, I, J) un repère orthonormé direct de P . Soient z un nombre complexe différent de 1 et M son point image dans le plan P .

On pose : $Z = \frac{z-2i}{z-1}$.

1) Soient x et y les parties réelle et imaginaire de z . Calculer en fonction de x et y , la partie réelle et la partie imaginaire de Z .

2a) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que Z soit un nombre réel.

2.b) Déterminer l'ensemble (F) des points M tel que Z soit un imaginaire pur.

Solution :

1) Calculons en fonction de x et y , les parties réelle et imaginaire de Z .

$$\text{On a : } Z = \frac{z-2i}{z-1} \Leftrightarrow Z = \frac{x+iy-2i}{x+iy-1} \quad (z \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{x+i(y-2)}{(x-1)+iy}$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{[x+i(y-2)][(x-1)-iy]}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{[x+i(y-2)][(x-1)-iy]}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{(x^2+y^2-x-2y)+i(-2x-y+2)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2+y^2-x-2y}{(x-1)^2+y^2} \\ \operatorname{Im}(Z) = \frac{-2x-y+2}{(x-1)^2+y^2} \end{cases} \text{ où : } (x, y) \neq (1; 0)$$

2 a) Déterminons l'ensemble (E) des points M tels que Z soit un nombre réel.

Pour que Z soit un nombre réel, il faut que : $\operatorname{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-y+2}{(x-1)^2+y^2} = 0$.

Soit : $-2x - y + 2 = 0$.

L'ensemble (E) demandé est donc une droite d'équation : $-2x - y + 2 = 0$.

b) Déterminons l'ensemble (F) des points M tel que Z soit un imaginaire pur :

Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 - x - 2y}{(x-1)^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 - \frac{5}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Donc l'ensemble (F) est un **cercle** de centre le point $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Rappel important : $x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2, a \in \mathbb{R}$.

• Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, pour tout entier relatif n , on a :

$$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi] \quad ; \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

$$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi] \quad ; \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$

$$\arg(-\bar{z}) \equiv \pi - \arg(z) [2\pi] \quad ; \quad \arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$$

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi].$$

7^{ème} Module : Racines n^{ème} d'un nombre complexe.

Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$).

On appelle **racine n – ième de Z** tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$.

Déterminer les racines $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe Z , s'est rechercher les complexes z tels que : $z^n = Z$.

Pour le faire, il faut écrire premièrement Z sous la forme exponentielle ($Z = \rho e^{i\alpha}$) et puis poser $z = r e^{i\theta}$.

On aura alors : $(r e^{i\theta})^n = \rho e^{i\alpha}$. (après remplacement comme les flèches l'illustre)

Soit encore : $r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\alpha}$. Car : $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.

Ce qui implique que : $\begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases}$ où $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

Puis on tire : $\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$ où $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

Les racines $n^{\text{ème}}$ de Z sont données par : $z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$, $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

$$z_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\alpha}{n})}, z_1 = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n})}, z_2 = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{4\pi}{n})}, \dots, z_{n-1} = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n})}$$

Exemple pratique 1 : Cas où $n = 2$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = 4i$.

Solution :

Dans ce cas, il y a deux méthodes, possibles que je vais vous exposer et vous pouvez retenir la deuxième car en général pour le cas traité elle sera plus simple pour la plupart d'entre vous.

Méthode 1 : utilisation de la méthode exposée juste au-dessus.

Posons : $z = r e^{i\alpha}$.

Donc : $z^2 = 4i \Leftrightarrow r^2 e^{2i\alpha} = 4e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 4 \\ 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} (k \in \{0; 1\})$.

On déduit alors : $\begin{cases} r = 2 \\ \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \{0; 1\})$.

Donc : $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Ou encore : $z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Méthode 2 : utilisation de la méthode algébrique

Déterminer les racines carrées du nombre complexe : $-3 + 4i$.

Solution :

Il s'agit de déterminer un nombre complexe $\delta = x + iy$ tel que : $\delta^2 = -3 + 4i$ (1).

On a : $\delta^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ (2)

• En égalisant les relations (1) et (2), il vient : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$ (3).

Par ailleurs : $|\delta^2| = |-3 + 4i| \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5$ (4)

Soit : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (a) \\ 2xy = 4 & (b) \\ x^2 + y^2 = 5 & (c) \end{cases}$.

• En sommant membre à membre les relations (a) et (c), il vient :

$$2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

• En soustrayant membre à membre les relations (c) et (a), il vient :

$$2y^2 = 8 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = -2 \text{ ou } y = 2.$$

• Pour bien choisir les racines carrées, c'est-à-dire les bons couples $(x; y)$ vérifiant la condition fixée. Il faut utiliser la relation (b). En effet n'allez pas écrire par exemple le couple $(x; y) = (-1; 2)$ ou le couple $(x; y) = (1; -2)$ parce qu'ils ne vérifient pas la relation (b).

La relation (b) nous permet d'avoir : $xy = 2 > 0$ ce qui implique que x et y sont de même signe.

C'est-à-dire : $(x = -1 \text{ et } y = -2)$ ou bien $(x = 1 \text{ et } y = 2)$.

Donc : $-1 - 2i$ et $1 + 2i$ sont les racines carrées de $-3 + 4i$.

Exemple pratique 2 : Cas où $n = 3$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 8i$.

Solution :

Posons : $z = re^{i\alpha}$.

$$\text{Donc : } z^3 = 8i \Leftrightarrow r^3 e^{3i\alpha} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} (k \in \{0; 1; 2\}).$$

$$\text{On déduit alors : } \begin{cases} r = 2 \\ \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} (k \in \{0; 1; 2\}).$$

$$\text{Donc : } z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ et } z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

$$\text{Soit encore : } z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i; z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i \text{ et } z_2 = -2i.$$

$$\text{Remarque pour } z_2 : e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{2\pi+\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\pi} = i \times (-1) = -i.$$

8^{ème} module : Équations du type : $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et $c \in \mathbb{C}$)

Soit à résoudre l'équation : $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont trois nombres complexes ($a \neq 0$). Son discriminant est : $\Delta = b^2 - 4ac$ et on désigne par δ et $-\delta$ les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de Δ pour le dernier cas ci-dessous.

- Si $\Delta = 0$, alors (E) a une solution double : $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$ ($\Delta \in \mathbb{R}_+^*$), alors (E) a deux solutions distinctes : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ ($\Delta \in \mathbb{R}_-^*$), alors (E) a deux solutions distinctes : $\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Si le discriminant est sous la forme : $\Delta = a + ib$ (a et $b \neq 0$), alors on doit rechercher les racines carrées de Δ en procédant comme dans l'exemple de la page 14 (méthode 2). (E) admettra alors deux solutions distinctes : $\frac{-b+i\delta}{2a}$ et $\frac{-b-i\delta}{2a}$.

Exemple 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 4iz - 4 = 0$.

Solution :

$$\text{Son discriminant est : } \Delta = (4i)^2 - 4(1)(-4) = -16 + 16 = 0.$$

$$\text{Donc : } z_0 = \frac{-4i}{2(1)} = -\frac{4i}{2} = -2i.$$

$$\text{Donc : } S = \{-2i\}.$$

Exemple 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z - 6 = 0$.

Solution :

Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2$.

Donc : $z_1 = \frac{1-5}{2(1)} = -\frac{4}{2} = -2$ et $z_2 = \frac{1+5}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$.

Donc : $S = \{-2 ; 3\}$.

Exemple 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $iz^2 + 5iz + 4i = 0$.

Solution :

Son discriminant est : $\Delta = (5i)^2 - 4(i)(4i) = -25 + 16 = -9 = 9i^2 = (3i)^2$.

Donc : $z_1 = \frac{-5i-3i}{2(i)} = -\frac{8i}{2i} = -4$ et $z_2 = \frac{-5i+3i}{2(i)} = -\frac{2i}{2i} = -1$.

Donc : $S = \{-4 ; -1\}$.

Exemple 4 : Résoudre l'équation : $(-2 + i)z^2 + (4 - 5i)z + 3 - i = 0$.

Solution :

Son discriminant est : $\Delta = (4 - 5i)^2 - 4(-2 + i)(3 - i)$

$$\Delta = 16 - 40i - 25 - 4(-6 + 2i + 3i + 1)$$

Soit : $\Delta = 11 - 60i$. Cherchons un nombre complexe δ tel que : $\delta^2 = 11 - 60i$ (1)

Posons : $\delta = x + iy$.

On a : $\delta^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ (2)

• En égalisant les relations (1) et (2), il vient : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ 2xy = -60 \end{cases}$ (3).

Par ailleurs : $|\delta^2| = |11 - 60i| \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = \sqrt{(11)^2 + (-60)^2}$

Soit : $x^2 + y^2 = 61$ (4)

$$\text{Soit : } \begin{cases} x^2 - y^2 = 11 & (a) \\ 2xy = -60 & (b) \\ x^2 + y^2 = 61 & (c) \end{cases}.$$

- En sommant membre à membre les relations (a) et (c), il vient :

$$2x^2 = 72 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = -6 \text{ ou } x = 6.$$

- En soustrayant membre à membre les relations (c) et (a), il vient :

$$2y^2 = 50 \Leftrightarrow y^2 = 25 \Leftrightarrow y = -5 \text{ ou } y = 5.$$

Puisque : $xy = -30 < 0$.

Alors on prend : $(-6 ; 5)$ et $(6 ; -5)$.

Donc : $\Delta = (-6 + 5i)^2$.

$$\text{Soit : } z_1 = \frac{-(4-5i)-(-6+5i)}{2(-2+i)} \text{ et } z_2 = \frac{-(4-5i)+(-6+5i)}{2(-2+i)}.$$

$$\text{Soit : } z_1 = \frac{1}{-2+i} \text{ et } z_2 = \frac{-5+5i}{-2+i} \text{ ou encore : } z_1 = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \text{ et } z_2 = 3 - i. \text{ Après conjugaison.}$$

Conclusion : $S = \left\{ -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i ; 3 - i \right\}.$

9^{ème} module : Équations se ramenant au second degré.

Nous allons résoudre deux exercices pour se fixer les idées.

Exercice 1 : Soit l'équation (E) : $z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i = 0$.

- Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure.
- Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

Solution :

- Posons $z_1 = ib$ ($b \in \mathbb{R}^*$).

$$z_1 \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow (ib)^3 + (4 - 5i)(ib)^2 + (8 - 20i)ib - 40i = 0.$$

$$\Leftrightarrow -ib^3 - (4 - 5i)b^2 + (8 - 20i)ib - 40i = 0.$$

$$\Leftrightarrow -4b^2 + 20b + i(-b^3 + 5b^2 + 8b - 40) = 0$$

$$\text{C'est-à-dire : } \begin{cases} -4b^2 + 20b = 0 & (1) \\ -b^3 + 5b^2 + 8b - 40 = 0 & (2) \end{cases}$$

On résout l'équation la plus évidente, c'est-à-dire ici l'équation (1) et on vérifie si ces solutions sont aussi solutions de l'équation (2). On retiendra alors les valeurs de b qui sont à la fois solution de (1) et (2). Ici on aura : $b = 5$.

Donc l'équation (E) admet une solution imaginaire pure : $z_1 = 5i$.

b) L'équation (E) peut s'écrire : $(z - 5i)(z^2 + az + b) = 0$ ($a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}$).

On peut passer par la méthode des coefficients indéterminés très connue sous le nom de la « **méthode par identification** ». Elle consiste dans un premier temps à développer et réduire le terme : $R = (z - 5i)(z^2 + az + b)$. Puis en égalisant R à Q , on déduit les coefficients inconnus de R . Où : $Q = z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i$.

En réalité Q et R sont égaux, mais ils sont juste écrit sous deux formes ; l'une factorisée (R) et l'autre développée (Q).

On a alors : $z^3 + (a - 5i)z^2 + (b - 5ia)z - 5ib = z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i$.

Ce qui implique que :
$$\begin{cases} a - 5i = 4 - 5i \\ b - 5ia = 8 - 20i \\ -5ib = -40i \end{cases} \text{ Donc : } \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases}$$

Donc l'équation (E) est équivalente à : $(z - 5i)(z^2 + 4z + 8) = 0$.

Or l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$ admet deux solutions, à savoir : $-2 - 2i$ et $-2 + 2i$.

Donc : $S = \{-2 - 2i; -2 + 2i; 5i\}$.

Exercice 2 :

Pour tout nombre complexe, on pose : $f(z) = z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i$.

1) Montrer que : $f(z) = 0$ possède une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2) Démontrer qu'il existe deux réels p et q tels que $f(z) = (z - z_0)(z^2 + pz + q)$.

Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

3) On note P le plan complexe muni d'un repère orthonormé. Soit A, B et C les points de P d'affixes respectives: z_0, z_1 et z_2 .

Où : z_0, z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $f(z) = 0$ et z_1 a une partie imaginaire positive.

a) Représenter ces points dans un repère orthonormé.

b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

c) Déterminer un point D d'affixe z_3 tels que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Solution :

1) Montrons que : $f(z) = 0$ possède une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

On a : $f(z) = z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i$.

Posons $z_0 = ib$ ($b \in \mathbb{R}^*$).

z_0 est solution de (E) $\Leftrightarrow (ib)^3 - (16 - i)(ib)^2 + (89 - 16i)ib + 89i = 0$.

$$\Leftrightarrow -ib^3 + (16 - i)b^2 + (89 - 16i)ib + 89i = 0.$$

$$\Leftrightarrow 16b^2 + 16b + i(-b^3 - b^2 + 89b + 89) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16b^2 + 16b = 0 & (1) \\ -b^3 - b^2 + 89b + 89 = 0 & (2) \end{cases}$$

Où (E) est l'équation $f(z) = 0$.

On résout l'équation la plus évidente, c'est-à-dire ici l'équation (1) et on vérifie si ces solutions sont aussi solutions de l'équation (2). On retiendra alors les valeurs de b (éventuellement) qui sont à la fois solution de (1) et (2).

Ici on retiendra la valeur : $b = -1$.

Conclusion : Donc l'équation (E) admet une solution imaginaire pure : $z_0 = -i$.

2) Démontrons qu'il existe deux réels p et q tels que : $f(z) = (z - z_0)(z^2 + pz + q)$.

On peut passer par la méthode des coefficients indéterminés très connue sous le nom de la « méthode par identification ». Pour rechercher l'existence deux nombres réels tels que : $f(z) = (z + i)(z^2 + pz + q)$. En développant et égalisant à l'expression mère de $f(z) = z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i$.

$$\text{On a alors : } z^3 + (p + i)z^2 + (q + ip)z + qi = z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i.$$

$$\text{Ce qui implique : } \begin{cases} p + i = -(16 - i) \\ q + ip = 89 - 16i \\ iq = 89i \end{cases}$$

$$\text{On déduit que : } \begin{cases} p = -16 \\ q = 89 \end{cases}.$$

• **Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z) = 0$.**

L'équation (E) est donc équivalente à : $(z + i)(z^2 - 16z + 89) = 0$.

Or le discriminant de l'équation : $z^2 - 16z + 89 = 0$ est : $\Delta = -100 = (10i)^2$.

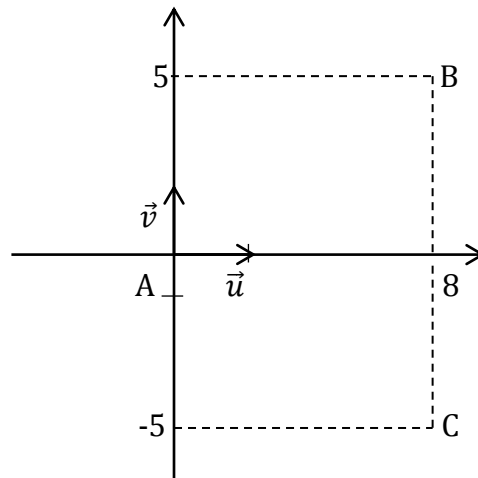
Donc (E) admet deux solutions, à savoir : $\frac{16}{2} - \frac{10}{2}i$ et $\frac{16}{2} + \frac{10}{2}i$.

C'est-à-dire : $8 - 5i$ et $8 + 5i$.

Conclusion : $S = \{8 - 5i; 8 + 5i; -i\}$.

3.a) Représentons ces points dans un repère orthonormé

On a d'après les hypothèses : $A(-i)$, $B(8 + 5i)$ et $C(8 - 5i)$.



3.b) Déterminons la nature du triangle ABC

On a : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(8-5i)-(-i)}{(8+5i)-(-i)}$. Soit encore : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{8-4i}{8+6i}$.

Or : $\frac{8-4i}{8+6i} = \frac{(8-4i)(8-6i)}{100} = \frac{64-48i-32i-24}{100} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$.

Donc : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$.

Conclusion : Le triangle ABC est donc quelconque.

3.c) Déterminer un point D d'affixe z_3 tels que ABCD soit un parallélogramme.

Pour que ABCD soit un parallélogramme dans cet ordre, il suffit que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Or si : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow z_1 - z_0 = z_2 - z_3$ en utilisant les notations de notre exercice. Il vient que : $z_3 = z_2 + z_0 - z_1 = 8 - 5i - i - (8 + 5i)$.

Soit : $z_3 = -11i$.

10^{ème} module : Géométrie et nombres complexes

a) Écritures complexes des transformations usuelles

Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z' , son image par une transformation f .

- Si f est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b , alors son écriture complexe est donnée par : $z' = z + b$.

Exemple : Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_A = 1 + i$; $z_B = -2 + 3i$ et $z_C = -2i$. Soit t la translation de vecteur $\vec{AB}$ du plan qui transforme C en D .

- 1) Déterminer l'écriture complexe de t .
- 2) Trouver l'affixe du point D .

Solution :

1) Déterminons l'écriture complexe de t .

L'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est : $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = -2 + 3i - 1 - i = -3 + 2i$.

L'écriture complexe de t est alors : $z' = z - 3 + 2i$.

2) Trouvons l'affixe du point D .

On a : $D = t_{\vec{AB}}(C)$ ce qui équivaut à $z_D = z_C - 3 + 2i = -2i - 3 + 2i = -3$.

• Si f est une rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle α , alors son écriture complexe est donnée par : $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

Exemple : Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = -\sqrt{3} + i$ et $z_C = -2i$. Soit r la rotation du plan qui transforme A en B et B en C .

- 1) Trouver le centre et l'angle de r .
- 2) Dédire alors l'écriture complexe de r .

Solution :

1) Trouvons le centre et l'angle de r .

Rappel : Si r est une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α , alors son écriture complexe est donnée par : $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

Supposons que le point $\Omega(\omega)$ est le centre de r et que α est son angle.

$$\text{On a : } \begin{cases} r(A) = B \\ r(B) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_B - \omega = e^{i\alpha}(z_A - \omega) & (1) \\ z_C - \omega = e^{i\alpha}(z_B - \omega) & (2) \\ \widehat{(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B})} = \alpha & (3) \\ \widehat{(\vec{\Omega B}, \vec{\Omega C})} = \alpha & (4) \end{cases}$$

• Formons le rapport $\frac{(1)}{(2)} : \frac{z_B - \omega}{z_C - \omega} = \frac{z_A - \omega}{z_B - \omega} \Rightarrow (z_B - \omega)^2 = (z_A - \omega)(z_C - \omega)$

$$\Rightarrow z_B^2 - 2z_B\omega + \omega^2 = z_A z_C - (z_C + z_A)\omega + \omega^2$$

$$\Rightarrow (2z_B - (z_C + z_A))\omega = z_B^2 - z_A z_C$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{z_B^2 - z_A z_C}{2z_B - (z_C + z_A)}$$

$$\text{Or : } z_B^2 - z_A z_C = (-\sqrt{3} + i)^2 - (\sqrt{3} + i)(-2i) = 2 - 2\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}i - 2 = 0$$

Ce qui implique : $\omega = 0$.

Donc le centre de la rotation r est le point O .

• **Déduisons l'angle α :**

$$\text{On a : } \alpha = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}});$$

$$\text{Or : } \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \text{Arg}\left(\frac{z_B - 0}{z_A - 0}\right) = \text{Arg}\left(\frac{-\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i}\right) = \text{Arg}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Donc : } \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

b) L'écriture complexe de r

De la question précédente, on déduit que l'écriture complexe de r est :

$$z' - 0 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)(z - 0)$$

$$z' - 0 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z - 0)$$

$$\text{Soit : } z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z.$$

• Si f est une homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k , alors son écriture complexe est donnée par : $z' - \omega = k(z - \omega)$.

Exemple : Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_A = 1 + i$; $z_B = -2 + i$ et $z_C = 7 + i$. Soit h l'homothétie de centre A du plan qui transforme B en C .

1) Trouver le rapport de h .

2) Déduire alors l'écriture complexe de h .

Solution :

1) Trouvons le rapport de h .

Comme $A(z_A)$ est le centre de h et que $h(B) = C$.

$$\text{Alors : } z_C - z_A = k(z_B - z_A), \text{ donc : } k = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{7+i-(1+i)}{-2+i-(1+i)} = \frac{7+i-1-i}{-2+i-1-i} = \frac{6}{-3} = -2.$$

2) L'écriture complexe de h est :

Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ son image par h .

$$\text{On a : } z' - z_A = -2(z - z_A).$$

$$\text{Soit encore : } z' = -2(z - z_A) + z_A = -2z + 2z_A + z_A = -2z + 3z_A.$$

En remplaçant z_A par sa valeur, vous obtiendrez : $z' = -2z + 3 + 3i$.

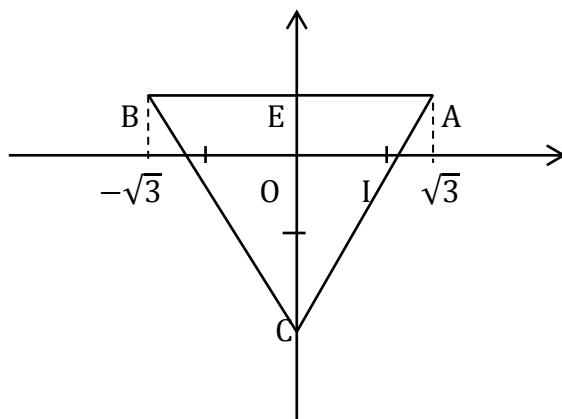
• Si f est une similitude de centre $\Omega(\omega)$, de rapport k et d'angle α , alors son écriture complexe est donnée par : $z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$.

Exemple : Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = -\sqrt{3} + i$ et $z_C = -2i$. On note E le milieu du segment $[AB]$, soit S la similitude directe dont le point B est invariant et S transforme le point E en C .

- 1) Trouver les éléments caractéristiques de S .
- 2) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S .

Solution :

Figure :



3 a) Trouvons les éléments caractéristiques de S :

S étant une similitude directe, alors son écriture complexe est de la forme : $z' = az + b$. Or par hypothèse : le point B est invariant par S , donc : $z_B = az_B + b$ (1). De plus S transforme le point E en C donc : $z_C = az_E + b$ (2). En tirant b dans l'égalité (1), il vient :

$$b = z_B - az_B \quad (3)$$

En injectant cette dernière égalité dans (2), il vient : $z_C = az_E + z_B - az_B$ (4). Ce qui nous permet de tirer : $a = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$. Or comme $E = \text{mil}[AB]$, on déduit que : $z_E = \frac{z_A + z_B}{2} = i$.

En faisant le calcul, on aura : $a = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Donc S est la similitude de centre $B(-\sqrt{3} + i)$, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

b) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S.

Rappel : Si S est une similitude de centre $\Omega(\omega)$, de rapport k et d'angle α , alors son écriture complexe est donnée par : $z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$.

On a alors : $z' - (-\sqrt{3} + i) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - (-\sqrt{3} + i))$

$$z' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - (-\sqrt{3} + i)) + (-\sqrt{3} + i).$$

Soit : $z' = 2\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(z + \sqrt{3} - i) - \sqrt{3} + i$

Donc : $z' = (1 - i\sqrt{3})z + (1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i) - \sqrt{3} + i$

Soit après tout calcul fait : $z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - 3i$.

• Si f est une symétrie de centre Ω d'affixe ω , alors son écriture complexe est donnée par : $z' - \omega = -(z - \omega)$.

Exemple : Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_A = 2 + i$; $z_B = -3 + 2i$ et $z_C = 4 - 2i$. On note E le milieu du segment $[AB]$. Soit S la symétrie de centre E .

1) Déterminer l'écriture complexe de la symétrie S .

2) En déduire l'affixe du point D image du point C par la symétrie S .

Solution :

1) Déterminons l'écriture complexe de la symétrie S .

Pour commencer, il faut d'abord déterminer l'affixe du centre E . On sait que le point E est le milieu du segment $[AB]$.

$$\text{Donc : } z_E = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{(2+i) + (-3+2i)}{2} = \frac{-1+3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Or l'écriture complexe d'une symétrie centrale de centre $\Omega(\omega)$ est : $z' - \omega = -(z - \omega)$.

Et comme ici c'est le point E le centre de la symétrie, alors : $z' - z_E = -(z - z_E)$.

Soit encore : $z' - z_E = -z + z_E$ ou $z' = -z + 2z_E$.

$$\text{Donc : } z' = -z + 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right).$$

C'est-à-dire : $z' = -z - 1 + 3i$.

2) Déduisons l'affixe du point D image du point C par la symétrie S .

On a : $D = S_E(C)$.

$$\text{Donc : } z_D = -z_C - 1 + 3i = -(4 - 2i) - 1 + 3i = -4 + 2i - 1 + 3i = -5 + 5i.$$

Les autres écritures complexes usuelles sont :

• Si f est une symétrie par rapport à l'axe réel, alors son écriture complexe est donnée par : $z' = \bar{z}$.

• Si f est une symétrie par rapport à l'axe imaginaire, alors son écriture complexe est donnée par : $z' = -\bar{z}$.

b) Configuration du plan et nombres complexes

• Pour démontrer que trois points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C sont **alignés** il suffit de vérifier que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.

Exemple : Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_A = 1 + i$; $z_B = -4 + 3i$ et $z_C = -9 + 5i$. Montrer que les points A, B et C sont alignés.

Solution :

Montrons que les points A, B et C sont alignés.

On a : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(-9+5i)-(1+i)}{(-4+3i)-(1+i)} = \frac{-9+5i-1-i}{-4+3i-1-i} = \frac{-10+4i}{-5+2i} = \frac{2(-5+2i)}{-5+2i} = 2 \in \mathbb{R}^*$. Donc les points A, B et C sont alignés.

• Pour démontrer que trois points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C forment un triangle isocèle en A, il suffit de vérifier que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$.

Où : $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemple : Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_A = \sqrt{3} + i$, $z_B = -\sqrt{3} + i$. Montrer que le triangle OAB est isocèle en O.

Solution :

Montrons que le triangle OAB est isocèle en O.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} &= \frac{(-\sqrt{3}+i)-0}{(\sqrt{3}+i)-0} \\ &= \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} \\ &= \frac{(-\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \\ &= \frac{-3+i\sqrt{3}+i\sqrt{3}+1}{4} \\ &= \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{-2}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{4}i \\ &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Or : } -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

$$\text{Donc : } \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Donc le triangle OAB est isocèle en O.

- Pour démontrer que trois points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C forment un **triangle rectangle en A**, il suffit de vérifier que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = ib$ ($b \in \mathbb{R}^*$).

Exemple : Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_A = 2, z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 1 + 2i$.

Montrer que le triangle ABC est rectangle en B .

Solution :

Montrons que le triangle ABC est rectangle.

$$\text{On a : } \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{(1+2i)-(2+2i)}{2-(2+2i)} = \frac{1+2i-2-2i}{2-2-2i} = \frac{-1}{-2i} = \frac{1}{2i} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2}i.$$

Donc le triangle ABC est rectangle en B .

- Pour démontrer que trois points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C forment un **triangle rectangle et isocèle en A**, il suffit de vérifier que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$.

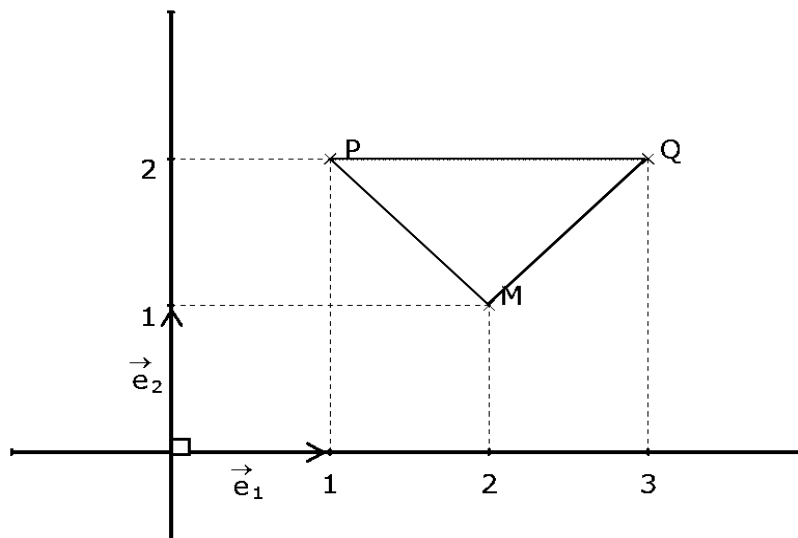
Exemple : Le plan orienté étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Unité de longueurs sur les axes : 2 cm.

- 1) Placer les points M, P et Q d'affixes respectives : $2 + i$; $1 + 2i$ et $3 + 2i$.
- 2) Montrer que le triangle MPQ est rectangle et isocèle de sommet principal M .

Solution :

- 1) **Plaçons les points M, P et Q d'affixes respectives : $2 + i$; $1 + 2i$ et $3 + 2i$.**



2) Montrons que le triangle MPQ est rectangle isocèle de sommet principal M .

On a : $\frac{z_Q - z_M}{z_P - z_M} = \frac{(3+2i)-(2+i)}{(1+2i)-(2+i)} = \frac{1+i}{-1+i} = \frac{1+i}{i^2+i} = \frac{1+i}{i(1+i)} = \frac{1}{i} = -i$. Puisque : $\frac{z_Q - z_M}{z_P - z_M} = -i$, alors on déduit que le triangle MPQ est rectangle et isocèle en M .

• Pour démontrer que trois points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C forment un triangle équilatéral en A , il suffit de vérifier que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exemple : Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_A = \sqrt{3} + i$, $z_B = 2i$. Montrer que le triangle OAB est équilatéral.

Solution :

Montrons que le triangle OAB est équilatéral.

$$\text{On a : } \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{(2i) - 0}{(\sqrt{3} + i) - 0} = \frac{2i}{\sqrt{3} + i} = \frac{2i(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \frac{2i(\sqrt{3} - i)}{4} = \frac{i(\sqrt{3} - i)}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Donc le triangle OAB est équilatéral.

• Pour démontrer que quatre points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D sont cocycliques, il suffit de vérifier que : $\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \div \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}^*$.

Exemple : Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} - i$ et $2i$. Montrer que ces points sont cocycliques. (Les points sont cocycliques s'ils appartiennent à un même cercle).

Solution :

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \div \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} &= \frac{-\sqrt{3} - i - (-\sqrt{3} + i)}{-\sqrt{3} - i - (\sqrt{3} + i)} \div \frac{2i - (-\sqrt{3} + i)}{2i - (\sqrt{3} + i)} \\ &= \frac{-\sqrt{3} - i + \sqrt{3} - i}{-\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i} \div \frac{2i + \sqrt{3} - i}{2i - \sqrt{3} - i} \\ &= \frac{-2i}{-2\sqrt{3} - 2i} \div \frac{\sqrt{3} + i}{-\sqrt{3} + i} \\ &= \frac{-2i}{-2\sqrt{3} - 2i} \times \frac{-\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Soit : } \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \div \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} &= \frac{-2i}{-2(\sqrt{3}+i)} \times \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} \\
&= \frac{i}{\sqrt{3}+i} \times \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} \\
&= \frac{i(-\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}+i)^2} \\
&= \frac{-1-i\sqrt{3}}{3+2i\sqrt{3}-1} \\
&= \frac{-1-i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}} \\
&= \frac{-(1+i\sqrt{3})}{2(1+i\sqrt{3})} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : Les points A, B, C et D sont cocycliques.

- Pour démontrer deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires avec A, B, C et D les points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D , il suffit de vérifier que : $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

Exemple : Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $2 ; 2 + 2i ; 2 - 2i$ et $-3 - 2i$. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Solution :

$$\begin{aligned}
\text{On a : } \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} &= \frac{-3-2i-(2-2i)}{2+2i-2} \\
&= \frac{-3-2i-2+2i}{2i} \\
&= \frac{-5}{2i} \\
&= \frac{-5(-2i)}{4} \\
&= \frac{10i}{4} \\
&= \frac{5}{2}i
\end{aligned}$$

Conclusion : Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

c) Barycentres et nombres complexes

Soient $(A_1(z_1), \alpha_1), (A_2(z_2), \alpha_2), \dots, (A_n(z_n), \alpha_n)$ n points pondérés du plan tels que : $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$. On pose : $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$.

L'affixe de G est donné par la relation : $z_G = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$.

Remarque : Si G est le centre de gravité d'un triangle ABC , alors : $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

Exemple : Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : 2 ; $1 + 2i$; $1 - i$ et $-2i$.

On pose $G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 2 & -1 & 3 & -1 \end{array}$.

Déterminer l'affixe du point G .

Solution :

$$\begin{aligned} \text{On a : } z_G &= \frac{2z_A - z_B + 3z_C - z_D}{2 - 1 + 3 - 1} \\ &= \frac{2z_A - z_B + 3z_C - z_D}{3} \\ &= \frac{2 \times 2 - (1 + 2i) + 3 \times (1 - i) - (-2i)}{3} \\ &= \frac{4 - 1 - 2i + 3 - 3i + 2i}{3} \\ &= \frac{6 - 3i}{3} \\ &= 2 - i \end{aligned}$$

11^{ème} module : Formules utiles

Soient p et q deux réels.

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \quad ; \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \quad ; \quad \sin p - \sin q = 2 \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \cos \left(\frac{p+q}{2} \right)$$

$$1 + e^{ix} = 2 \cos \left(\frac{x}{2} \right) e^{i \frac{x}{2}} \quad ; \quad 1 - e^{ix} = -2i \sin \left(\frac{x}{2} \right) e^{i \frac{x}{2}}$$

Exercices pour s'exercer

Exercice 1 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2 - (1 - i)z - i = 0$.
- 2) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^6 - (1 - i)z^3 - i = 0$.

Exercice 2 :

Soit z un nombre complexe et $P(z) = z^3 + z^2 + z - 39$.

1. Montrer que 3 est une racine de l'équation (E) : $P(z) = 0$.
2. Déterminer les deux autres solutions de (E).
3. On note A le point d'affixe 3, B et C les points dont les affixes respectives sont les deux autres racines de (E).
 - a. Représenter les points A, B et C dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. (Unité : 1 cm)
 - b. Montrer que le triangle ABC est isocèle.
4. On veut trouver le centre Ω du cercle passant par A, B et C.
 - a. Montrer que Ω appartient à l'axe des abscisses.
 - b. Soit x l'abscisse de Ω . Calculer les distances $A\Omega$ et $B\Omega$ en fonction de x . Déduire alors la valeur de x . Tracer le cercle sur la figure précédente.

Exercice 3 :

Soit le polynôme complexe : $P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i$.

1. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ et écrire toutes les solutions sous forme trigonométrique.
3. On considère le point A d'affixe $z_A = i$, le point B d'affixe $z_B = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et le point C d'affixe z_C ; C étant symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.
 - a) Déterminer z_C .
 - b) Représenter dans le plan les points A, B et C.
 - c) Déterminer le module et un argument du quotient $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.
 - d) En déduire une mesure en radian de l'angle $(\widehat{BA, BC})$ et la nature du triangle ABC.

Exercice 4 :

On se propose de résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z notée (E): $z^4 + 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 + 3z + 1 = 0$.

1. Comparer : $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$. (Indiquer avec précision les propriétés utilisées)
2. Montrer que si z_0 est solution de l'équation (E), alors $\bar{z}_0$ l'est aussi.
3. Montrer que si z_0 est solution de l'équation (E), alors il en est de même de $\frac{1}{z_0}$ et de $\frac{1}{\bar{z}_0}$.
4. Montrer que l'équation (E) admet une solution de la forme $a + i$, a étant un réel.
5. Résoudre alors l'équation (E). On donnera le module et un argument pour chacune des solutions.

Exercice 5 :

Soient P un plan affine euclidien et (O, I, J) un repère orthonormé direct de P .
Soient z un nombre complexe différent de 1 et M son point image dans le plan P .

On pose : $Z = \frac{z-2i}{z-1}$.

- 1) Soient x et y les parties réelle et imaginaire de z ; calculer en fonction de x et y , les parties réelle et imaginaire de Z .
2. a) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que Z soit un nombre réel.
b) Préciser le sous ensemble de (E) formé par les points tel que l'on ait : $\text{Im}(Z) \geq 0$.
3. Déterminer l'ensemble (F) des points M tel que $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
4. Déterminer l'ensemble (G) des points M tel que : $|Z| = 2$.

Exercice 6 :

Soit le nombre complexe $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. On pose : $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.
a) Démontrer que : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et en déduire que α et β sont solutions de l'équation (E): $Z^2 + Z - 1 = 0$.
b) Exprimer α en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
c) Résoudre (E) et en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

2. On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points d'affixes respectives :

1, z_0, z_0^2, z_0^3 et z_0^4

a) Soit H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec la droite de repère $(O, \vec{e}_1)$.

Démontrer que l'affixe du point H est $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

b) Soit (Γ) le cercle de centre le point Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ et passant par le point B d'affixe i .

(Γ) coupe la droite de repère $(O, \vec{e}_1)$ en M et N, M étant le point d'affixe positive.

Démontrer que M et N ont pour affixes respectives α et β et que H est le milieu de $[OM]$.

Exercice 7 :

Soit $z_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. On pose : $\alpha = z_0 + z_0^4, \beta = z_0^2 + z_0^3$.

1) Vérifier que : $z_0^5 = 1$.

2.a) Montrer que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$.

2.b) En déduire que α et β sont solutions de : $x^2 + x - 1 = 0$.

3) Déterminer α en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

4-Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 8 :

1) Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation :

$$(1 - i)z^2 + 2(1 + 2i)z + \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i = 0.$$

On trouve deux solutions, chacune étant de la forme $a + ib$, avec a et b réels.

Soit z_0 celle pour laquelle $a = b$ et M_0 son image dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la similitude directe S de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Soit $M_0, M_1, \dots, M_n$ la suite des points du plan telle que : $M_i = S(M_{i-1}), i \in \{1; \dots; n\}$.

2) Soit z_n l'affixe de $M_n (n \in \mathbb{N})$. Écrire z_n en fonction de z_{n-1} .

Soit ρ_n et θ_n le module et l'argument de z_n .

3) Montrer que la suite (ρ_n) est une suite géométrique et que la suite (θ_n) est une suite arithmétique. Donner le premier terme et la raison de chaque suite.

4) Exprimer ρ_n et θ_n en fonction de n .

5) Étudier la convergence des suites (ρ_n) et (θ_n) .

Exercice 9 :

On considère les nombres complexes : $a = -\sqrt{3} + i$, $b = 3 + 2i$, $c = 7 - 2i$.

1.a) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a .

En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

1.b) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre réel.

1.c) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre imaginaire pur.

2. Déterminer et construire les ensembles de points M d'affixe z tels que :

a) $|z - b| = |z - c|$; b) $2|z - b| = |a|$.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$.

a) Démontrer que f admet un seul point invariant Ω .

b) Démontrer que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie positive de même centre Ω . Préciser l'angle de la rotation et le rapport de l'homothétie.

c) Déterminer et construire les images par f des ensembles déterminées à la question 2.

Exercice 10 :

Soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.

On pose : $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Démontrer que a et b sont deux nombres complexes conjugués et que la partie imaginaire de a est positive.

2. Calculer $a + b$ et ab . En déduire a et b .

Exercice 11 :

Le plan complexe est rapporté au repère ortho normal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 2 cm

.Soient A_0 le point d'affixe 2, A'_0 le point d'affixe $2i$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$.

Plus généralement, si A_n le point d'affixe z_n , on désigne par A'_n le point d'affixe $z'_n = iz_n$ et par A_{n+1} le milieu du segment $[A_nA'_n]$. On note ρ_n et θ_n le module et l'argument de z_n .

1. Déterminer les affixes des points $A_0, A'_0, A_1, A'_1, A_2, A'_2$ et A_3 . Placer ces points sur une figure.

2. Calculer ρ_0, ρ_1, ρ_2 et ρ_3 ainsi que $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ et θ_3 .

3. Pour tout entier n , exprimer z_{n+1} en fonction de z_n . En déduire z_n en fonction de n .

4. Établir les expressions de ρ_n et θ_n en fonction de n .
5. Déterminer la limite de ρ_n quand n tend vers $+\infty$.
6. Comparer les modules et les arguments de z_n et z_{n+8} .
7. Établir que : $A_n A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1} A_n$.
8. Après avoir exprimé, $A_n A_{n+1}$ en fonction de n , déterminer en fonction de n , la longueur de la ligne brisée $A_0 A_1 \dots A_n$. Déterminer la limite de l_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 12 :

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 3 cm.

À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe : $z' = \frac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}$.

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives : $z_A = 1 + 2i, z_B = 1$ et $z_C = 3i$.

Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives de A, B et C par f .

Placer les points A, B, C, A', B' et C' .

2. On pose $z = x + iy$ (avec x et y réels). Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y .

3. Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$. Tracer (D) .

Quelle remarque peut-on faire ?

4. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f . Montrer que M' appartient à la droite (D) .

5. a. Montrer que, pour tout nombre complexe z : $\frac{z'-z}{z_A} = \frac{z+\bar{z}}{6} + i\left(\frac{z-\bar{z}}{3}\right)$. En déduire que le nombre $\frac{z'-z}{z_A}$ est réel.

- b. En déduire que, si $M' \neq M$, les droites (OA) et (MM') sont parallèles.

6. Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ? (on étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à (D)). Effectuer la construction sur la figure.

Exercice 13 :

Soit α est un nombre réel.

- 1) Résoudre l'équation $(E_1) : \begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^2 - (2\cos\alpha)z + 1 = 0 \end{cases}$

2) En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation :

$$(E_n): \left\{ \begin{array}{l} z \in \mathbb{C} \\ z^{2n} - (2\cos\alpha)z^n + 1 = 0 \end{array} \right. \text{ où } n \text{ est un entier naturel non nul donné.}$$

3) **Notation** : Étant donné des nombres complexes : $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, on note :

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k \text{ le produit } z_0 \times z_1 \times \dots \times z_{n-1}$$

Pour tout entier naturel non nul n , pour tout réel α , pour tout nombre complexe z , on pose :

$$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n \cos\alpha + 1.$$

On admet que :
$$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1} \left[z^2 - 2z \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1 \right].$$

Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}.$$

4) Pour tout n supérieur ou égal à 2, on pose :
$$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right).$$

a) Montrer que, pour α non nul, on a :
$$2^{n-1} H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}.$$

b) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?

c) En déduire que, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2 :

$$\sin \frac{\pi}{n} \times \sin \frac{2\pi}{n} \times \dots \times \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Bonne lecture !

Septembre 2019.