

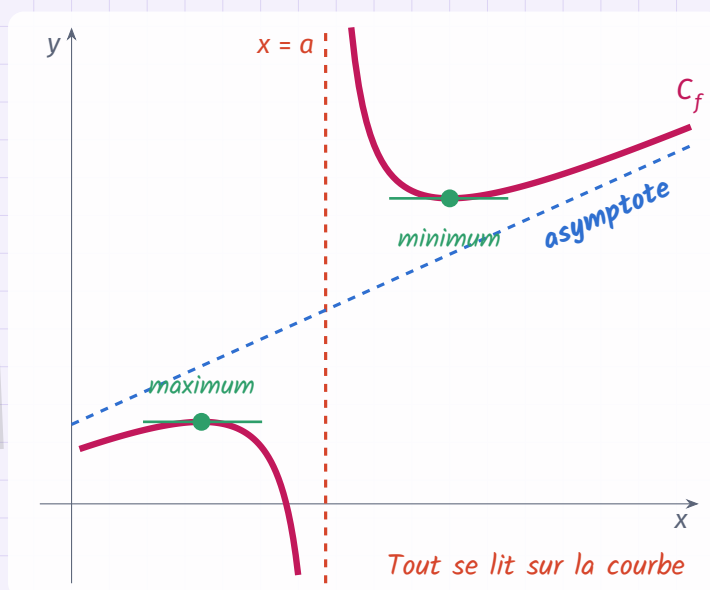
Livret spécial

Étude de fonctions

Du niveau de base au niveau concours

À connaître par cœur

Plan d'étude :

 $D_f \rightarrow$ limites $\rightarrow f' \rightarrow$ variations
 $\rightarrow$ branches infinies $\rightarrow$ courbe*Défi de concours* e^π ou π^e : lequel
est le plus grand ?

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes de concours

126 exercices corrigés

Formulaire

Sommaire

Par où commencer ? tests de niveau			
1	Par où commencer ?	5	5 Limites : trigo, comparaison 36
2	Test 1 · Tronc commun	5	6 Nombre dérivé et tangente 37
3	Test 2 · 1 ^{re} Bac	6	7 Fonction dérivée et opérations 38
4	Test 3 · 2 ^e Bac PC	7	8 Dérivée et variations 39
5	Corrigés des tests	8	9 Branches infinies 40
			10 Concavité et points d'inflexion 41
			11 Plan d'étude : trois modèles 42
			11.1 Un polynôme de degré 3 42
			11.2 Une fonction rationnelle à asymptote oblique 43
			11.3 Une fonction irrationnelle à demi-tangente 44
			12 Les pièges classiques 44
			13 Les astuces des concours 45
			14 Exercices de la partie 2 46
			14.1 Niveau 1 · Automatismes 47
			14.2 Niveau 2 · Bac 48
			14.3 Niveau 3 · Approfondissement 50
			14.4 Niveau 4 · Concours 52
			15 Corrigés de la partie 2 54
			Partie 3 · L'étude complète 2^e Bac PC
			1 Continuité et TVI 64
			2 Réciproque et racine n-ième 66
			3 Dérivabilité et composées 68
			4 Branches infinies : le bilan 69
			5 Le logarithme népérien 70
			6 L'exponentielle 72
			7 $\ln u$, e^u , a^x et x^a 73
			8 Croissances comparées 74
Partie 1 · Les bases tronc commun			
1	Notion de fonction	10	
2	Parité et symétries	11	
3	Variations et extremums	12	
4	Affines et valeur absolue	13	
5	Le trinôme $ax^2 + bx + c$	14	
6	Fonctions homographiques	15	
7	Translater une courbe	16	
8	Résolutions graphiques	17	
9	Les pièges classiques	18	
10	Les astuces des concours	18	
11	Exercices de la partie 1	20	
12	Corrigés de la partie 1	24	
Partie 2 · Limites et dérivées 1 ^{re} Bac			
1	Fonctions bornées et composées	31	
2	Périodicité et symétries	32	
2.1	Deux nouvelles fonctions de référence	34	
3	Limites : définitions, opérations	34	
4	Les formes indéterminées	35	

9 Fonction auxiliaire et signe	75	13 Inégalités par une étude	112
10 Une étude complète type examen	76	14 Comparer a^b et b^a	113
10.1 Partie I, limites et branches infinies . . .	77	15 La fonction auxiliaire	114
10.2 Variations, bijection, tangente	77	16 Réciproque sans calcul	115
10.3 Concavité, courbe et aire	77	17 Croissances comparées en pratique	116
11 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$	78	18 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$	117
12 Les pièges classiques	79	19 Optimiser une aire, une distance	118
13 Les astuces des concours	80	20 Familles de courbes	119
14 Exercices de la partie 3	82	Partie 5 · Questions de concours	60 QCM
14.1 Niveau 1 · Automatismes	82	1 Série 1 · Généralités et courbes	120
14.2 Niveau 2 · Bac	83	2 Série 2 · Transformations	122
14.3 Niveau 3 · Approfondissement	86	3 Série 3 · Limites et asymptotes	123
14.4 Niveau 4 · Concours	87	4 Série 4 · Dérivées et variations	125
15 Corrigés de la partie 3	89	5 Série 5 · Fonctions ln et exp	126
15.1 Corrigés du niveau 1	89	6 Série 6 · Défis de concours	127
15.2 Corrigés du niveau 2	91	7 Grille des réponses	129
15.3 Corrigés du niveau 3	95	8 Corrigés des questions	130
15.4 Corrigés du niveau 4	97	Partie 6 · Grands problèmes	6 problèmes
Partie 4 · Méthodes de concours	20 fiches	1 Problèmes type examen national	138
1 Domaine de définition express	100	2 Problèmes de concours	140
2 L'image par le discriminant	101	3 Corrigés des problèmes	143
3 Parité, axe et centre	102	Plan d'étude, atlas, formulaire et bilan	
4 Transformer une courbe	103	1 Le plan d'étude en une page	151
5 Courbes de f et de $f(x)$	104	2 L'atlas des courbes	152
6 Composées et $f(f(x)) = 0$	105	3 Le formulaire du livret	157
7 Nombre de solutions de $f(x) = m$	106	4 Mon bilan	159
8 Cubique : trois racines ?	107		
9 Asymptote oblique express	108		
10 Formes indéterminées : réflexes	109		
11 Tangentes passant par un point	110		
12 Lire f, f', f'' sur les courbes	111		

Comment utiliser ce livret**Les 4 niveaux d'exercices****Niveau 1 · Bases ★**

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau des devoirs et de l'examen.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

■ **Définition** : à savoir par cœur.

■ **Propriété / Théorème** : les outils.

■ **Méthode** : la démarche pas à pas.

■ **Exemple** : un calcul entièrement rédigé.

■ **Piège** : l'erreur classique à éviter.

■ **Astuce de concours ★** : le petit plus qui fait gagner du temps.

Le livret contient 6 parties : la partie 1 (tronc commun), la partie 2 (1^{re} Bac) et la partie 3 (2^e Bac PC) donnent chacune un cours complet, des exercices sur 4 niveaux et leurs corrigés ; la partie 4 rassemble les méthodes et astuces de concours ; la partie 5 propose 60 questions de concours à choix multiples ; la partie 6 réunit de grands problèmes de synthèse. **Parcours conseillé** : en tronc commun, partie 1 puis les astuces marquées TC de la partie 4 ; en 1^{re} Bac, parties 1 et 2 ; en 2^e Bac PC, tout le livret.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé.

1

Par où commencer ?

Ce livret couvre trois années de programme. Pour savoir par où commencer, passe le ou les **tests de niveau** de ta classe : **12 questions courtes** sur tout le programme de l'année, à traiter en **20 minutes** sans calculatrice ni cours.

1 • Choisis tes tests

Tronc commun : test 1

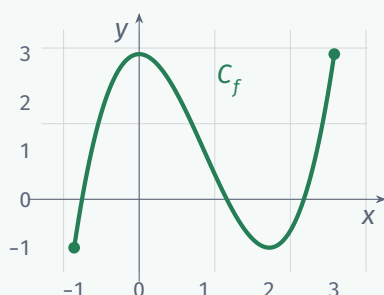
1^{re} Bac : tests 1 et 22^e Bac PC : les trois tests**2 • Réponds sur ta feuille**

Réponses courtes. Pour un

Vrai ou faux ? réponds, puis justifie en une ligne.**3 • Corrige-toi**

Corrigés page 8 : chaque erreur te renvoie à une section du cours.

2

Test 1 • Tronc commun**Tronc commun** 20 minutes • sans calculatrice ni cours • 1 point par question • réponses sur ta feuille**1 Domaine**Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-9}$.**2 Parité**La fonction $f(x) = x^3 - \frac{2}{x}$ est-elle paire, impaire ou ni l'une ni l'autre ?**3 Parité****Vrai ou faux ?**« Il existe une fonction impaire f , définie sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 2$. »**4 Variations** f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Comparer $f(\sqrt{5})$ et $f(\frac{9}{4})$.**5 Variations****Vrai ou faux ?**« Si u est croissante sur $\mathbb{R}$, alors $v = 5 - 2u$ est croissante sur $\mathbb{R}$. »**6 Trinôme**Écrire $2x^2 + 8x + 5$ sous forme canonique, puis donner le minimum de ce trinôme.**7 Trinôme**Pour quels réels m l'équation $x^2 + mx + 9 = 0$ n'a-t-elle aucune solution réelle ?**8 Homographique**Écrire $f(x) = \frac{3x+1}{x+2}$ sous la forme $a + \frac{b}{x+2}$; centre de symétrie de C_f ?**9 Homographique****Vrai ou faux ?**« $g(x) = \frac{x+3}{x+2}$ est croissante sur $] -2, +\infty[$. »**Lecture graphique • questions 10 à 12**

Ci-contre, la courbe C_f d'une fonction f définie sur $[-1, 3]$. Réponds par simple lecture graphique.

- 10** Donner le maximum et le minimum de f sur $[-1, 3]$, et les réels où ils sont atteints.
- 11** Combien de solutions l'équation $f(x) = 1$ a-t-elle dans $[-1, 3]$?
- 12** Pour quelles valeurs du réel m l'équation $f(x) = m$ a-t-elle *exactement* deux solutions ?

Temps écoulé ? Pose le crayon et corrige-toi **page 8**.**Mon score :** _____ / 12

3

Test 2 · 1^{re} Bac

1^{re} Bac 20 minutes · sans calculatrice ni cours · 1 point par question · réponses sur ta feuille

1 Limite

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 - x + 1}{1 - 2x^2}$.

2 Limite

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 3}{x^2 - 1}$.

3 Forme indéterminée

Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 1}$.

4 Forme indéterminée

Calculer $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$.

5 Limite trigonométrique

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$.

6 Dérivée

Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$, $x > 0$, et l'écrire sous forme d'un seul quotient.

7 Tangente

Équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \frac{16}{x^2}$ au point d'abscisse 2.

8 Branche infinie

Déterminer l'asymptote oblique en $+\infty$ de la courbe de $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x + 1}$.

9 Concavité

Vrai ou faux ?

« La courbe de $f(x) = x^4 + 6x^2$ admet au moins un point d'inflexion. »

Lecture graphique · questions 10 à 12



Ci-contre, la courbe C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, ses deux asymptotes (en pointillés) et ses deux tangentes horizontales (en vert). Quadrillage : une unité en abscisse, deux unités en ordonnée.

- 10 Lire les équations des deux asymptotes de C_f .
- 11 Lire $f(4)$ et $f'(4)$.
- 12 Sur quel intervalle la courbe C_f est-elle convexe ?

Brouillon

Temps écoulé ? Pose le crayon et corrige-toi page 8.

Mon score : _____ / 12

4

Test 3 · 2^e Bac PC2^e Bac PC · 20 minutes · sans calculatrice ni cours · 1 point par question · réponses sur ta feuille

1 Continuité · TVI

Montrer que $x^5 + 2x - 1 = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$. A-t-on $\alpha < \frac{1}{2}$?

2 Continuité · TVI

Vrai ou faux ?

« Si f est continue sur $[0, 2]$, avec $f(0) = 1$ et $f(2) = 3$, alors f ne s'annule pas sur $[0, 2]$. »

3 Réciproque

$f(x) = 2x + \ln x$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $(f^{-1})'(2)$.

4 Logarithme

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(5 - 2x) \leq 0$.

5 Logarithme

Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = x \ln x - 2x$, puis donner le minimum de f sur $]0, +\infty[$.

6 Exponentielle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$.

7 Exponentielle

$f(x) = e^{x/2} - 3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -3, +\infty[$. Exprimer $f^{-1}(x)$.

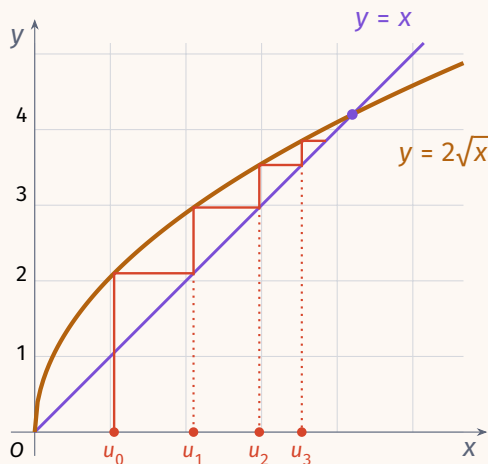
8 Croissances comparées

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3 \ln x)$.

9 Croissances comparées

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{e^x}$.

Suite récurrente · questions 10 à 12



On pose $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$. La figure montre la courbe de $x \mapsto 2\sqrt{x}$, la droite d'équation $y = x$ et la construction des premiers termes.

10 Calculer u_1 et u_2 (valeurs exactes).

11 Quel est le sens de variation de (u_n) ? Justifier par le signe de $2\sqrt{x} - x$ sur $[1, 4[$.

12 Vrai ou faux ? « Comme $u_n < 4$ pour tout n , la limite de (u_n) est strictement inférieure à 4. »

Brouillon

Temps écoulé ? Pose le crayon et corrige-toi page 9.

Mon score : _____ / 12

5

Corrigés des tests

Test 1 · Tronc commun

- 1 $D_f = [-2, 3[\cup]3, +\infty[: x + 2 \geq 0$ et $x^2 \neq 9$; -3 est déjà exclu.
- 2 Impaire : $D_f = \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = -x^3 + \frac{2}{x} = -f(x)$.
- 3 Faux : $f(0) = f(-0) = -f(0)$, donc $f(0) = 0$.
- 4 $f(\sqrt{5}) > f(\frac{9}{4}) : (\frac{9}{4})^2 = \frac{81}{16} > 5$, donc $\sqrt{5} < \frac{9}{4}$.
- 5 Faux : multiplier par -2 renverse l'ordre : v est décroissante.
- 6 $2(x+2)^2 - 3$; minimum -3 en $x = -2$
- 7 $-6 < m < 6$: aucune solution
 $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 36 < 0$.
- 8 $f(x) = 3 - \frac{5}{x+2}$; centre $\Omega(-2, 3)$
- 9 Faux : $g(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$ est décroissante sur $]-2, +\infty[$.
- 10 max. 3 (en 0 et 3) ; min. -1 (en -1 et 2)
- 11 3 solutions : la droite $y = 1$ coupe C_f trois fois.
- 12 $m = -1$ ou $m = 3$: pour $-1 < m < 3$, il y a trois solutions.

Barème : 1 point par question, total sur 12 ; $\frac{1}{2}$ point si une seule des deux valeurs demandées est juste ; un « Vrai ou faux ? » non justifié vaut 0.

10 à 12 : acquis 6 à 9 : fragile 0 à 5 : à reprendre

Si tu as raté la question k → relis la partie 1, section :

- | | |
|---|---|
| Q1 → « Notion de fonction » | Q6, Q7 → « Le trinôme $ax^2 + bx + c$ » |
| Q2, Q3 → « Parité et symétries » | Q8, Q9 → « Fonctions homographiques » |
| Q4, Q5, Q10 → « Variations et extremums » | Q11, Q12 → « Résolutions graphiques » |

Test 2 · 1^{re} Bac

- 1 -3 : quotient des termes de plus haut degré.
- 2 $-\infty$: numérateur → -2, dénominateur → 0^+ .
- 3 $\frac{2}{3}$: on simplifie par $x + 1$: $\frac{x+3}{x^2-x+1} \rightarrow \frac{2}{3}$.
- 4 $\frac{1}{4}$: avec le conjugué, $\frac{1}{\sqrt{x-1}+2} \rightarrow \frac{1}{4}$.
- 5 $2 : \frac{\sin x}{x} \times \frac{x^2}{1-\cos x} \rightarrow 1 \times 2$.
- 6 $f'(x) = \frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} : 2x\sqrt{x} + \frac{x^2-1}{2\sqrt{x}}$ au même dénominateur.
- 7 $y = -4x + 12 : f(2) = 4, f'(x) = -\frac{32}{x^3}, f'(2) = -4$.
- 8 $y = 2x - 5 : f(x) = 2x - 5 + \frac{5}{x+1}$ et $\frac{5}{x+1} \rightarrow 0$.
- 9 Faux : $f''(x) = 12x^2 + 12 > 0$: courbe convexe sur $\mathbb{R}$.
- 10 $x = 2$ et $y = x$
- 11 $f(4) = 6$ et $f'(4) = 0$: la tangente en (4, 6) est horizontale.
- 12 $]2, +\infty[$: ici $f(x) = x + \frac{4}{x-2}$ et $f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$.

Barème : 1 point par question, total sur 12 ; $\frac{1}{2}$ point si une seule des deux valeurs demandées est juste ; un « Vrai ou faux ? » non justifié vaut 0.

10 à 12 : acquis 6 à 9 : fragile 0 à 5 : à reprendre

Si tu as raté la question k → relis la partie 2, section :

- | | |
|--|---|
| Q1, Q2 → « Limites : définitions, opérations » | Q7, Q11 → « Nombre dérivé et tangente » |
| Q3, Q4 → « Les formes indéterminées » | Q8, Q10 → « Branches infinies » |
| Q5 → « Limites : trigo, comparaison » | Q9, Q12 → « Concavité et points d'inflexion » |
| Q6 → « Fonction dérivée et opérations » | |

Test 3 · 2^e Bac PC

- 1 **Oui** : $0 < \alpha < \frac{1}{2}$: $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$, $f(0) = -1$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{32}$.
- 2 **Faux** : $f(x) = (2x - 1)(x - 1)$; $f(0) = 1$, $f(2) = 3$ mais $f(\frac{1}{2}) = 0$.
- 3 $\frac{1}{3}$: $f(1) = 2$ et $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$.
- 4 $S = [2, \frac{5}{2}]$: $\ln(5 - 2x) \leq 0 \iff 0 < 5 - 2x \leq 1$.
- 5 $f'(x) = \ln x - 1$; **minimum** $f(e) = -e$
- 6 $S = \{\ln 5\}$: $(e^x - 5)(e^x + 1) = 0$ et $e^x + 1 > 0$.
- 7 $f^{-1}(x) = 2 \ln(x + 3)$, $x > -3$
- 8 $+\infty$: $x(1 - 3 \frac{\ln x}{x})$ et $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$.
- 9 0 : $\frac{x^3}{e^x} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{e^x} \rightarrow 0$.
- 10 $u_1 = 2$ et $u_2 = 2\sqrt{2}$
- 11 **croissante** : $2\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(2 - \sqrt{x}) > 0$ sur $[1, 4[$.
- 12 **Faux** : $\ell = 2\sqrt{\ell}$ et $\ell \geq 1$ donnent $\ell = 4$: à la limite, « < » devient « ≤ ».

Barème : 1 point par question, total sur 12 ; $\frac{1}{2}$ point si une seule des deux valeurs demandées est juste ; un « Vrai ou faux ? » non justifié vaut 0.

10 à 12 : acquis 6 à 9 : fragile 0 à 5 : à reprendre

Si tu as raté la question $k \rightarrow$ relis la partie 3, section :

Q1, Q2 $\rightarrow$ « Continuité et TVI »

Q6 $\rightarrow$ « L'exponentielle »

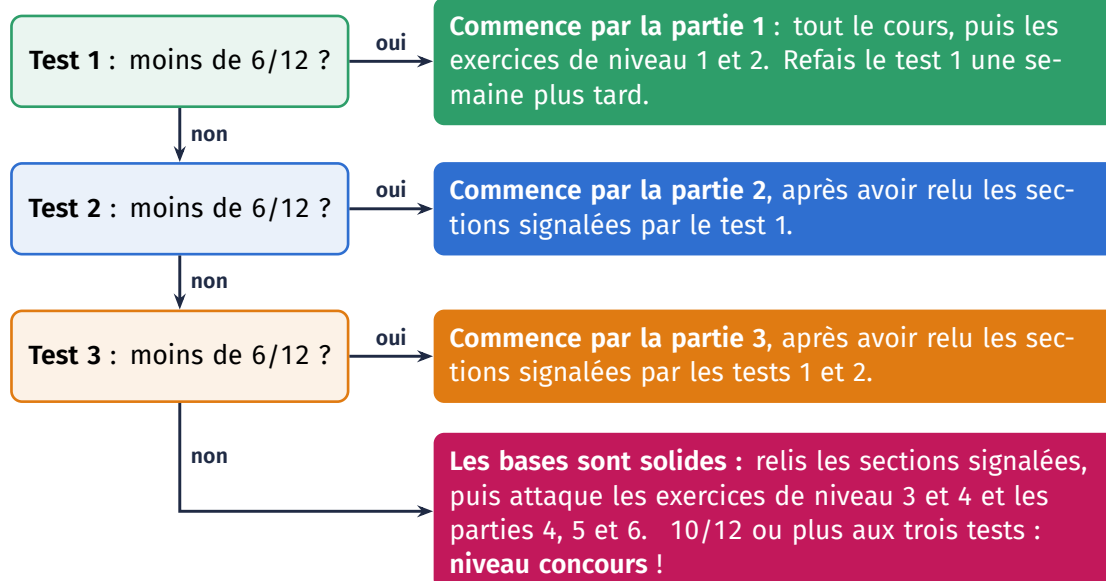
Q3, Q7 $\rightarrow$ « Réciproque et racine n -ième »

Q8, Q9 $\rightarrow$ « Croissances comparées »

Q4, Q5 $\rightarrow$ « Le logarithme népérien »

Q10 à Q12 $\rightarrow$ « Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ »

Ton point de départ



Selon ta classe : en **tronc commun**, arrête-toi au test 1 : moins de 6/12, partie 1 depuis le début ; sinon, exercices de la partie 1 et fiches de la partie 4 marquées « TC ». En **1^{re} Bac**, passe les tests 1 et 2 et suis les deux premières flèches. En **2^e Bac PC**, passe les trois tests.

Pour t'entraîner ensuite : les fiches de la partie 4 prolongent les tests (« Domaine de définition express », « Formes indéterminées : réflexes », « Asymptote oblique express », « Réciproque sans calcul », « Croissances comparées en pratique », « Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ »).

Partie I • Les bases

Tronc commun : généralités, fonctions de référence et lectures graphiques

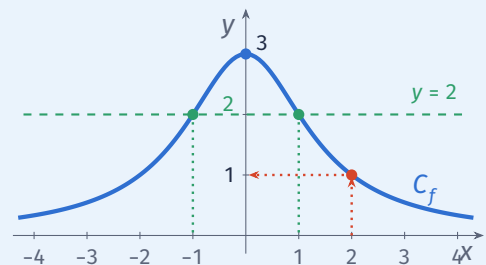
1

Notion de fonction

Définition : fonction, image, antécédent, courbe

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Une **fonction** f définie sur D associe à **chaque** réel x de D un **unique** réel $f(x)$; on note $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$.

- $D = D_f$ est l'**ensemble de définition** de f ;
- $f(x)$ est l'**image** de x ; si $f(a) = b$, le réel a est un **antécédent** de b ;
- la **courbe** C_f est l'ensemble des points $M(x, f(x))$, $x \in D_f$: $M(x, y) \in C_f \iff x \in D_f$ et $y = f(x)$.



$f(x) = \frac{6}{x^2+2}$: l'image de 2 est 1 ;

le réel 2 a deux antécédents, -1 et 1

Retenir. Un réel a **au plus une** image, mais il peut avoir **zéro, un ou plusieurs** antécédents. **Lecture graphique :** l'image de a est l'**ordonnée** du point de C_f d'abscisse a ; les antécédents de b sont les **abscisses** des points communs à C_f et à la droite horizontale $y = b$.

Exemple : lire, puis calculer : $f(x) = \frac{6}{x^2+2}$ sur $\mathbb{R}$

Images : $f(0) = 3$, $f(\pm 1) = 2$, $f(\pm 2) = 1$, $f(4) = \frac{1}{3}$. **Antécédents de b :** si $b \leq 0$, aucun ($f(x) > 0$) ; si $b > 0$, $\frac{6}{x^2+2} = b \iff x^2 = \frac{6}{b} - 2$. Si $b > 3$: **aucun** antécédent ($\frac{6}{b} - 2 < 0$) ; si $b = 3$: **un seul**, 0 ; si $0 < b < 3$: **deux**, $\pm \sqrt{\frac{6}{b} - 2}$ (pour $b = 1$: ± 2). **Bilan :** f prend toutes les valeurs de $]0, 3]$ et seulement elles ; la courbe reste dans la bande $0 < y \leq 3$.

Méthode : trouver l'ensemble de définition

On **exclut** les réels qui annulent un dénominateur ou rendent strictement négatif un nombre sous un radical : $\frac{A}{B}$ existe $\iff B \neq 0$; $\sqrt{A}$ existe $\iff A \geq 0$; $\frac{A}{\sqrt{B}}$ existe $\iff B > 0$.

• $f_1(x) = \frac{2x-1}{x^2+2x-15}$: $x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3)$: $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-5, 3\}$. $f_2(x) = \sqrt{4-x} + \frac{1}{x}$: $4-x \geq 0$ et $x \neq 0$: $D_{f_2} =]-\infty, 0[\cup]0, 4]$.

• $f_3(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}$: le discriminant de $x^2 + x + 1$ vaut $-3 < 0$ (section 5), il ne s'annule jamais : $D_{f_3} = \mathbb{R}$.

Égalité de deux fonctions

$f = g \iff D_f = D_g$ et $f(x) = g(x)$ pour tout x de ce domaine commun.

Le domaine fait partie de la fonction !

- $\frac{x^3+x}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} = x$ pour **tout** réel x ($x^2 + 1 > 0$) : cette fonction **est** la fonction $x \mapsto x$.
- $u(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ et $v(x) = x + 3$: égales pour $x \neq 3$, mais $D_u = \mathbb{R} \setminus \{3\} \neq \mathbb{R} = D_v$: $u \neq v$; la courbe de u est la droite $y = x + 3$ **privée du point** $(3, 6)$.
- $x \mapsto \sqrt{x^2}$ et $x \mapsto |x|$ sont égales ; mais $(\sqrt{x})^2 = x$ seulement pour $x \geq 0$.

2 Parité et symétries

Définition : fonction paire, impaire, et ce que l'on voit (repère orthogonal)

On suppose D_f **symétrique par rapport à 0** (si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$).

- f est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f \iff C_f$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy) .
- f est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f \iff C_f$ est symétrique par rapport à l'origine O .

Démonstration. Le symétrique de $M(x, y)$ par rapport à (Oy) est $M'(-x, y)$, par rapport à O c'est $M''(-x, -y)$. Si f est paire, pour $M(x, f(x)) \in C_f$, le point $M'(-x, f(x)) = (-x, f(-x))$ est encore sur C_f ; si f est impaire, $M''(-x, -f(x)) = (-x, f(-x))$ aussi. **Conséquence** : si f est impaire et $0 \in D_f$, alors $f(0) = -f(0)$, donc $f(0) = 0$.

Méthode : étudier la parité

1. D_f est-il symétrique ? (sinon : ni paire ni impaire, c'est fini). 2. Calculer $f(-x)$, le comparer à $f(x)$ et à $-f(x)$. 3. Pour prouver que f n'est **pas** paire, **un seul** contre-exemple suffit.

- $f(x) = \frac{6}{x^2+2}$ (section 1) : $f(-x) = f(x)$, **paire**. $g(x) = \frac{4x}{x^2+9}$: $g(-x) = \frac{-4x}{x^2+9} = -g(x)$, **impaire** (figure de droite).
- $k(x) = 2x^3 + 1$: $k(1) = 3$, $k(-1) = -1$: ni $k(-1) = k(1)$, ni $k(-1) = -k(1)$: **ni paire ni impaire**.
 $\ell(x) = \frac{x}{x-2}$: $-2 \in D_\ell$ mais $2 \notin D_\ell$: **ni l'un ni l'autre**, sans calcul.

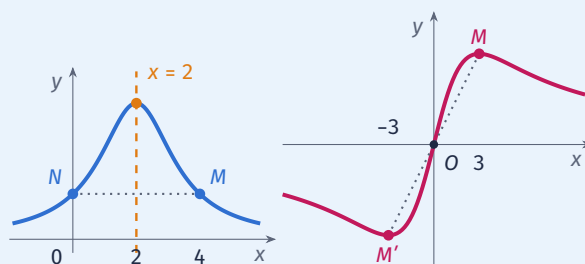
Axe et centre de symétrie (D_f symétrique par rapport à a)

- La droite $x = a$ est un **axe de symétrie** de $C_f \iff f(a+h) = f(a-h)$ pour tout h tel que $a+h \in D_f$.
- Le point $\Omega(a, b)$ est un **centre de symétrie** de $C_f \iff f(a+h) + f(a-h) = 2b$ pour tout h tel que $a+h \in D_f$.

Avec $x = a + h$: $f(2a - x) = f(x)$ (axe) et $f(2a - x) + f(x) = 2b$ (centre).

Démonstration. $M(a+h, f(a+h))$ et $N(a-h, f(a-h))$ ont pour milieu $I\left(a, \frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}\right)$. Si $f(a+h) = f(a-h)$, $[MN]$ est horizontal, de milieu sur la droite $x = a$: N est le symétrique de M par rapport à cette droite. Si $f(a+h) + f(a-h) = 2b$, alors $I = \Omega$.

- $h(x) = \frac{6}{x^2 - 4x + 6}$: $x^2 - 4x + 6 = (x - 2)^2 + 2 > 0$, donc $D_h = \mathbb{R}$ et $h(2 + t) = \frac{6}{t^2 + 2} = h(2 - t)$: **axe** $x = 2$ (figure de gauche). C'est la courbe de la section 1 **déplacée** de deux unités vers la droite (section 7).
- $s(x) = |x + 2| + |x - 4|$: $s(2 - x) = |4 - x| + |-2 - x| = s(x)$: **axe** $x = 1$. $d(x) = |x + 2| - |x - 4|$: $d(2 - x) = -d(x)$: **centre** $(1, 0)$ (figure en section 4).
- $g(x) = \frac{4x}{x^2 + 9}$: **centre** O ; $M\left(3, \frac{2}{3}\right)$ et $M'\left(-3, -\frac{2}{3}\right)$ sont symétriques par rapport à O .



à gauche : axe $x = 2$; à droite : $y = \frac{4x}{x^2 + 9}$, centre O

3

Variations et extremums

Définition : sens de variation sur un intervalle $I \subset D_f$

f est **strictement croissante** sur I si, pour tous a, b de I : $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ (elle **conserve** l'ordre) ; **strictement décroissante** si $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$ (elle **renverse** l'ordre). Avec des inégalités larges : croissante, décroissante. **Monotone** : l'un ou l'autre.

Le taux de variation

Pour $a \neq b$ dans I : $T(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, pente de la corde joignant $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

f est strictement croissante sur $I \iff T(a, b) > 0$ pour tous $a \neq b$ de I ; strictement décroissante $\iff T(a, b) < 0$.

Démonstration. $T(a, b) > 0$ signifie que $f(b) - f(a)$ et $b - a$ ont le **même signe** : si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$. **Méthode** : on calcule $f(b) - f(a)$, on met $(b - a)$ en facteur, puis on cherche le signe de $T(a, b)$ quand a et b sont **tous deux** dans l'intervalle étudié (encadrements), et l'on résume dans un **tableau de variations**.

Exemple : $g(x) = \frac{4x}{x^2 + 9}$ sur $\mathbb{R}$ (la fonction impaire de la section 2)

Le taux. Comme $4b(a^2 + 9) - 4a(b^2 + 9) = 4ab(a - b) + 36(b - a) = 4(b - a)(9 - ab)$:

$$g(b) - g(a) = \frac{4b}{b^2 + 9} - \frac{4a}{a^2 + 9} = \frac{4(b - a)(9 - ab)}{(a^2 + 9)(b^2 + 9)}, \quad \text{d'où} \quad T(a, b) = \frac{4(9 - ab)}{(a^2 + 9)(b^2 + 9)},$$

du signe de $9 - ab$.

Sur $[0, 3]$: si $a \neq b$ sont dans $[0, 3]$, l'un est < 3 , donc $0 \leq ab < 9$ et $T > 0$: g est **strictement croissante**. **Sur** $[3, +\infty[$: $a \neq b$ sont ≥ 3 , donc $ab > 9$ et $T < 0$: **strictement décroissante**.

Par symétrie : g est impaire, elle a les **mêmes** variations sur deux intervalles symétriques : si $-3 \leq a < b \leq 0$, alors $0 \leq -b < -a \leq 3$, donc $g(-b) < g(-a)$, soit $g(a) < g(b)$.

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$g(x)$					

Définition : maximum, minimum

M est le **maximum** de f sur I s'il est **atteint** ($M = f(a)$, $a \in I$) et si $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$.
Minimum : de même avec $f(x) \geq m$. Extremum : maximum ou minimum.

Prouver un extremum sans tableau : on étudie le signe de $M - f(x)$, en faisant apparaître un **carré**.
Pour g :

$$\frac{2}{3} - g(x) = \frac{2(x^2 + 9) - 12x}{3(x^2 + 9)} = \frac{2(x - 3)^2}{3(x^2 + 9)} \geq 0 \quad \text{et} \quad g(x) + \frac{2}{3} = \frac{2(x + 3)^2}{3(x^2 + 9)} \geq 0.$$

Donc $-\frac{2}{3} \leq g(x) \leq \frac{2}{3}$ pour tout réel x : le maximum de g sur $\mathbb{R}$ est $g(3) = \frac{2}{3}$ (seul cas d'égalité), le minimum est $g(-3) = -\frac{2}{3}$.

Remarque. Si f et g sont croissantes sur I , $f + g$ l'est aussi ; $f + c$ a les variations de f ; kf a les variations de f si $k > 0$, les variations **contraires** si $k < 0$. Rien de tel, en général, pour $f \times g$ ou $f - g$.

4 Affines et valeur absolue

Fonctions affines $f(x) = ax + b$

$T(u, v) = \frac{(av+b)-(au+b)}{v-u} = a$: la courbe est la **droite** de coefficient directeur a , d'ordonnée à l'origine b . $a > 0$: strictement croissante ; $a < 0$: strictement décroissante ; $a = 0$: constante. Si $a \neq 0$, $ax + b$ s'annule en $-\frac{b}{a}$ et a le **signe de a à droite** de $-\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

Définition : valeur absolue, distance

$|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x < 0$; $|x| \geq 0$, $|-x| = |x|$, $\sqrt{x^2} = |x|$, $|xy| = |x| |y|$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Sur une droite graduée, $|x - a|$ est la **distance** entre les points d'abscisses x et a . Pour $r \geq 0$: $|x - a| = r \iff x = a \pm r$; $|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r$; $|x - a| > r \iff x < a - r$ ou $x > a + r$.

Exemple : raisonner avec des distances

- $|x - 3| \leq 2$: la distance de x à 3 est au plus 2 : $x \in [1, 5]$.
- $|2x + 1| > 3 \iff 2 \left| x - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| > 3 \iff$ la distance de x à $-\frac{1}{2}$ dépasse $\frac{3}{2}$: $x < -2$ ou $x > 1$.
- $|x - 1| = |x + 3|$: x est à égale distance de 1 et de -3, c'est le **milieu** : $x = -1$.

Méthode : fonctions affines par morceaux

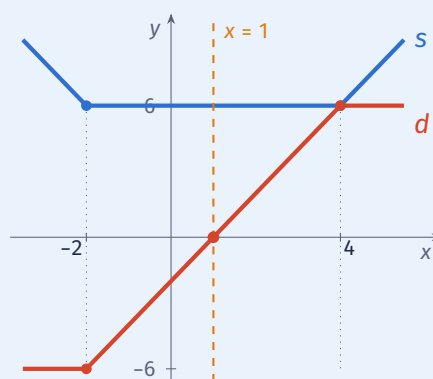
$x \mapsto |x - a|$ vaut $-x + a$ sur $]-\infty, a]$ et $x - a$ sur $[a, +\infty[$: un « V » de sommet $(a, 0)$. Avec plusieurs valeurs absolues, on fait un **tableau** : on repère où chacune change d'expression, puis on écrit la fonction sans valeur absolue sur chaque intervalle.

Exemple : $s(x) = |x+2| + |x-4|$ et $d(x) = |x+2| - |x-4|$.

x	$x \leq -2$	$-2 \leq x \leq 4$	$x \geq 4$
$ x+2 $	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$ x-4 $	$-x+4$	$-x+4$	$x-4$
$s(x)$	$-2x+2$	6	$2x-2$
$d(x)$	-6	$2x-2$	6

Lecture « distances » : avec $A(-2)$, $B(4)$, $M(x)$ sur la droite graduée, $s(x) = MA + MB \geq AB = 6$, avec égalité si et seulement si $M \in [AB]$: le **minimum** de s est 6, atteint en **tout** point de $[-2, 4]$. Et $|d(x)| = |MA - MB| \leq AB$: $-6 \leq d(x) \leq 6$.

Résoudre : $s(x) = 10 \iff -2x+2 = 10$ ($x \leq -2$) ou $2x-2 = 10$ ($x \geq 4$) : $x \in \{-4, 6\}$; $d(x) = 3 \iff x = \frac{5}{2}$; $d(x) \geq 0 \iff x \geq 1$.



s : axe $x = 1$, palier $y = 6$;

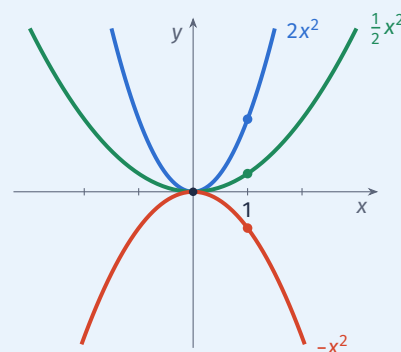
d : centre $(1, 0)$, paliers $y = \pm 6$

5

Le trinôme $ax^2 + bx + c$

La fonction $x \mapsto ax^2$ ($a \neq 0$)

Elle est définie sur $\mathbb{R}$, paire, et $T(u, v) = \frac{av^2 - au^2}{v-u} = a(u+v)$, du signe de a si $u, v \geq 0$. $a > 0$: strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, minimum 0 ; $a < 0$: le contraire, maximum 0. Courbe : **parabole** de sommet O , d'axe (Oy) , tournée vers le haut si $a > 0$; d'autant plus « fermée » que $|a|$ est grand.



Forme canonique ($a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$)

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$\text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Démonstration. $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$

Conséquences. La courbe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ est la parabole $y = ax^2$ **translatée** du vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$ (section 7) : **sommet** $S(\alpha, \beta)$, **axe** $x = \alpha$. Si $a > 0$, f décroît sur $]-\infty, \alpha]$, croît sur $[\alpha, +\infty[$ et β est son **minimum** ; si $a < 0$, c'est le contraire et β est son **maximum**.

Racines, factorisation, signe

- $\Delta > 0$: racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, du **signe de a à l'extérieur** des racines, du signe contraire entre elles.
- $\Delta = 0$: racine double α ; $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$. $\Delta < 0$: aucune racine ; le trinôme a **toujours** le signe de a .

Lorsqu'il y a des racines : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

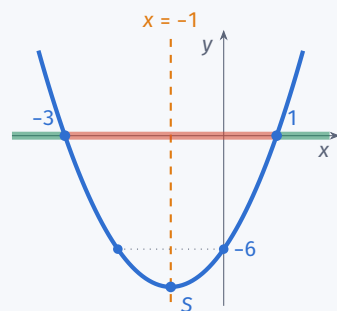
Démonstration. $ax^2 + bx + c = a\left[(x - \alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$. Si $\Delta < 0$, le crochet est > 0 ; si $\Delta = 0$, c'est $(x - \alpha)^2$; si $\Delta > 0$, avec $\delta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$, c'est $(x - \alpha - \delta)(x - \alpha + \delta)$, positif à l'extérieur de $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, négatif à l'intérieur. Enfin $x_1 + x_2 = 2\alpha$ et $x_1 x_2 = \alpha^2 - \delta^2 = \frac{c}{a}$.

Exemple : $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

Forme canonique : $f(x) = 2(x^2 + 2x) - 6 = 2[(x + 1)^2 - 1] - 6 = 2(x + 1)^2 - 8$: sommet $S(-1, -8)$, axe $x = -1$; $a = 2 > 0$: f décroît sur $]-\infty, -1]$, croît sur $[-1, +\infty[$, **minimum** -8 .

Racines : $\Delta = 16 + 48 = 64$, $x = \frac{-4 \pm 8}{4}$: -3 et 1 ; $f(x) = 2(x + 3)(x - 1)$ (contrôle : somme $-2 = -\frac{4}{2}$, produit $-3 = \frac{-6}{2}$).

Signe : $f(x) < 0 \iff x \in]-3, 1[$; $f(x) > 0 \iff x < -3$ ou $x > 1$. Et $f(0) = f(-2) = -6$: points symétriques par rapport à l'axe.



rouge : $f < 0$; vert : $f > 0$

Exemple : trois réflexes

• $3x^2 - 5x - 2 \leq 0$: $\Delta = 49$, racines $\frac{5 \pm 7}{6}$, soit 2 et $-\frac{1}{3}$; $a > 0$: négatif **entre** les racines :

$$S = \left[-\frac{1}{3}, 2\right].$$

• $-x^2 + 3x - 4$: $\Delta = -7 < 0$ et $a < 0$: **strictement négatif pour tout** x ; forme canonique $-(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{7}{4}$: maximum $-\frac{7}{4}$.

• **Bicarrée** $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$: avec $X = x^2 \geq 0$, $X^2 - 5X - 36 = (X - 9)(X + 4) = 0$; $X = -4$ est exclu, donc $x^2 = 9$: $S = \{-3, 3\}$.

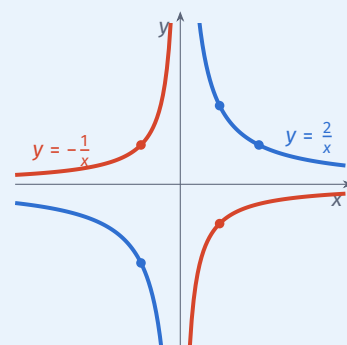
6

Fonctions homographiques

La fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)

Définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, impaire ; $T(u, v) = \frac{\frac{a}{v} - \frac{a}{u}}{\frac{a}{v} - \frac{a}{u}} = -\frac{a}{uv}$, et $uv > 0$ si u, v sont dans le **même** intervalle. $a > 0$: strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ **et** sur $]0, +\infty[$; $a < 0$: strictement croissante sur chacun d'eux. Courbe : **hyperbole** de centre O , qui s'approche des axes sans les toucher : graphiquement, (Ox) et (Oy) sont ses **asymptotes**.

Piège : $\frac{1}{x}$ n'est **pas** décroissante sur $\mathbb{R}^*$: $-1 < 1$ et $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$.



Fonction homographique $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, et il existe des réels $\alpha, \beta, k \neq 0$ tels que, pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) = \alpha + \frac{k}{x - \beta} \quad \text{avec} \quad \beta = -\frac{d}{c}, \quad \alpha = \frac{a}{c}, \quad k = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

La courbe est l'hyperbole $y = \frac{k}{x}$ **translatée** du vecteur $\vec{u}(\beta, \alpha)$: **centre de symétrie** $\Omega(\beta, \alpha)$, asymptotes (graphiques) $x = \beta$ et $y = \alpha$. Sur $]-\infty, \beta[$ et sur $]\beta, +\infty[$, f est strictement décroissante si $k > 0$, strictement croissante si $k < 0$.

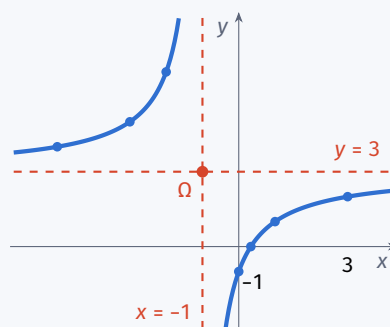
Démonstration. $ax + b = \frac{a}{c}(cx + d) + b - \frac{ad}{c}$, d'où $f(x) = \frac{a}{c} + \frac{(bc - ad)/c^2}{x + \frac{d}{c}}$, avec $k = \frac{bc - ad}{c^2} \neq 0$. La translation et les variations viennent des sections 7 et 3 (ajouter une constante ne change pas les variations).
Si $ad - bc = 0$, f est **constante** : $\frac{6-3x}{2x-4} = \frac{-3(x-2)}{2(x-2)} = -\frac{3}{2}$ pour $x \neq 2$ (une droite privée d'un point, pas une hyperbole).

Exemple : $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $3x - 1 = 3(x + 1) - 4$, donc

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}.$$

- **Centre** $\Omega(-1, 3)$, asymptotes $x = -1$ et $y = 3$. Contrôle : $f(-2-x) + f(x) = 3 - \frac{4}{-1-x} + 3 - \frac{4}{x+1} = 6 = 2 \times 3$.
- $k = -4 < 0$: f est **strictement croissante** sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.
- 3 n'a **aucun** antécédent ($\frac{4}{x+1} \neq 0$) : la courbe ne coupe jamais la droite $y = 3$.
- Points : $(-5, 4)$, $(-3, 5)$, $(-2, 7)$, $(0, -1)$, $(\frac{1}{3}, 0)$, $(1, 1)$, $(3, 2)$.



7

Translater une courbe

Translations, symétries, valeurs absolues

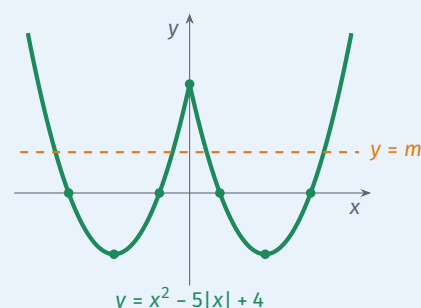
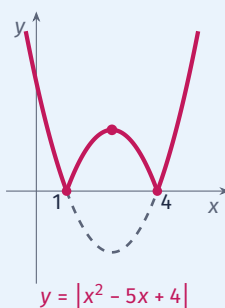
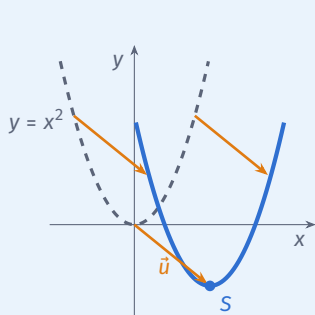
- Si $g(x) = f(x - a) + b$, la courbe C_g est l'image de C_f par la **translation de vecteur** $\vec{u}(a, b)$; on obtient D_g en ajoutant a aux éléments de D_f .
- $y = -f(x)$: symétrique de C_f par rapport à (Ox) ; $y = f(-x)$: symétrique par rapport à (Oy) .
- $y = |f(x)|$: on **garde** ce qui est au-dessus de (Ox) et l'on **retourne** (symétrie d'axe (Ox)) ce qui est au-dessous. $y = f(|x|)$ (D_f symétrique) : fonction paire ; on garde la partie où $x \geq 0$ et on la complète par symétrie d'axe (Oy) .

Démonstration. $M(x, y) \in C_f \iff y = f(x) \iff y + b = f((x + a) - a) + b \iff M'(x + a, y + b) \in C_g$, et M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}(a, b)$. De même, $M(x, y) \mapsto M'(x, -y)$ et $M(x, y) \mapsto M'(-x, y)$ pour les deux symétries.

Piège : $f(x - 3)$ décale la courbe de 3 unités vers la **droite**, $f(x + 3)$ vers la **gauche**, et $f(x) + 3$ la monte de 3.

Exemple : reconnaître une translation, lire un nombre de solutions

- $y = x^2 - 5x + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$: la parabole $y = x^2$ translatée du vecteur $\vec{u}\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$; sommet $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ (figure de gauche).
- $y = \frac{-x}{x-2} = -1 - \frac{2}{x-2}$ (car $-x = -(x-2) - 2$) : l'hyperbole $y = -\frac{2}{x}$ translatée du vecteur $\vec{u}(2, -1)$; centre $(2, -1)$.
- $y = x^2 - 5|x| + 4$ est $f(|x|)$ pour $f(x) = x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$: racines $\pm 1, \pm 4$, minimums $-\frac{9}{4}$ en $\pm \frac{5}{2}$, et $f(0) = 4$ (figure de droite). En faisant glisser la droite $y = m$, on lit le **nombre de solutions** de $x^2 - 5|x| + 4 = m$: 0 si $m < -\frac{9}{4}$; 2 si $m = -\frac{9}{4}$; 4 si $-\frac{9}{4} < m < 4$; 3 si $m = 4$; 2 si $m > 4$.



8

Résolutions graphiques

Lire des équations et des inéquations

- Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les **abscisses** des points communs à C_f et C_g ; celles de $f(x) < g(x)$, les abscisses des points de C_f **strictement au-dessous** de C_g .
- Pour $f(x) = k$ ou $f(x) \leq k$, on compare C_f à la droite $y = k$; le **nombre de solutions** de $f(x) = m$ est le nombre de points communs à C_f et à la droite $y = m$, que l'on fait « glisser ».
- **Position relative** : C_f est au-dessus de C_g là où $f(x) - g(x) > 0$: on étudie le **signe de la différence**.

Exemple : nombre de solutions de $\frac{4x}{x^2+9} = m$ (sections 2 et 3)

La courbe et le tableau de variations de g donnent : **aucune** solution si $|m| > \frac{2}{3}$; **une** si $m = \pm \frac{2}{3}$ (en ± 3) ; **deux** si $0 < |m| < \frac{2}{3}$; **une** si $m = 0$. **Contrôle par le calcul** : pour $m \neq 0$, l'équation s'écrit $mx^2 - 4x + 9m = 0$, de discriminant $16 - 36m^2$, positif si et seulement si $|m| < \frac{2}{3}$; le produit des racines vaut $9 > 0$ et leur somme $\frac{4}{m}$: elles ont le signe de m , comme sur la courbe.

Exemple : $f(x) = \frac{3}{x}$ et $g(x) = x + 2$

Lecture : deux points communs, $A(-3, -1)$ et $B(1, 3)$.

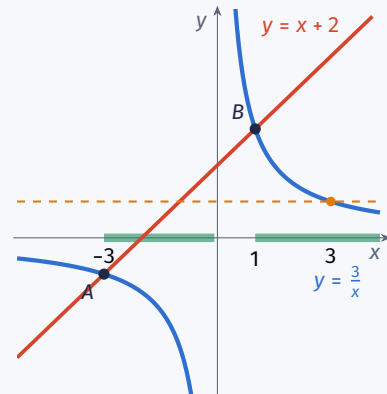
Calcul : pour $x \neq 0$, $\frac{3}{x} = x + 2 \iff x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x \in \{-3, 1\}$ (racine évidente 1, produit -3) ✓.

Position : $f(x) - g(x) = \frac{3 - x^2 - 2x}{x} = \frac{-(x-1)(x+3)}{x}$.

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$		
$-(x-1)(x+3)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	
x	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$f(x) - g(x)$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$

Donc $\frac{3}{x} \leq x + 2 \iff x \in [-3, 0[\cup [1, +\infty[$ (en vert sur la figure) ; c'est là que l'hyperbole est sous la droite.

Avec la droite $y = 1$: $\frac{3}{x} \leq 1 \iff x < 0$ ou $x \geq 3$.



9

Les pièges classiques

Faux	Vrai
$\sqrt{x^2} = x$	$\sqrt{x^2} = x $: $\sqrt{(-5)^2} = 5$, et non -5.
$x^2 \geq 9 \iff x \geq 3$	$x^2 \geq 9 \iff x \geq 3 \iff x \leq -3$ ou $x \geq 3$.
$\frac{1}{x} < \frac{1}{2} \iff x > 2$	on ne multiplie pas par x de signe inconnu : $\frac{1}{x} < \frac{1}{2} \iff x < 0$ ou $x > 2$.
$a < b \Rightarrow a^2 < b^2$	vrai seulement si $0 \leq a < b$: $-4 < 1$ mais $(-4)^2 > 1^2$.
$-2x < 6 \iff x < -3$	diviser par -2 renverse l'inégalité : $x > -3$.
$x^2 = 5x \iff x = 5$	on ne divise pas par x (peut-être nul) : $x(x-5) = 0 \iff x \in \{0, 5\}$.
$ a+b = a + b $	$ a+b \leq a + b $: $ 3+(-5) = 2 < 8$.
« $f(-2) = f(2)$, donc f est paire »	il faut $f(-x) = f(x)$ pour tout x : $x^3 + x^2 - 4x$ vaut 4 en ± 2 , mais -2 en 1 et 4 en -1.
« $f(x) < 1$ pour tout x , donc 1 est le maximum »	un maximum est atteint : $\frac{x^2}{x^2+1} < 1$ pour tout x , et n'a pas de maximum.
« $\Delta < 0$: le trinôme est négatif »	il a le signe de a : $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout x .
« le sommet est en $x = \frac{b}{2a}$ »	en $x = -\frac{b}{2a}$: $x^2 - 4x + 7$ a son sommet en $x = 2$.
« $y = f(x+3)$: décalage de 3 vers la droite »	vers la gauche : translation de vecteur $(-3, 0)$.

10

Les astuces des concours

★ Astuce de concours : l'image d'un trinôme

Regarder si le **sommet** est dans l'intervalle !

$f(x) = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x-1)^2 + 3$ sur $[0, 3]$: le sommet 1 est dedans, le minimum est $f(1) = 3$; le maximum est la plus grande des valeurs aux bornes, $f(0) = 5$ et $f(3) = 11$: $f([0, 3]) = [3, 11]$, et non $[5, 11]$.

★ Astuce de concours : l'image d'une homographie

On encadre pas à pas avec la forme réduite.

$f(x) = \frac{3x+5}{x+1} = 3 + \frac{2}{x+1}$ sur $[1, +\infty[$: $x+1 \geq 2$, donc $0 < \frac{2}{x+1} \leq 1$ et $3 < f(x) \leq 4$; la valeur 4 = $f(1)$ est atteinte, la valeur 3 jamais.

★ Astuce de concours : l'image par le discriminant

y est une valeur prise par $f \iff$ l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x , a une solution. Pour $f(x) = \frac{x-1}{x^2+8}$: $f(x) = y \iff yx^2 - x + 8y + 1 = 0$. Si $y = 0$, $x = 1$ convient ; si $y \neq 0$, il faut

$\Delta = 1 - 4y(8y + 1) \geq 0$, soit $32y^2 + 4y - 1 \leq 0$, de racines $\frac{1}{8}$ et $-\frac{1}{4}$: $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{8}$, avec $f(4) = \frac{1}{8}$ et $f(-2) = -\frac{1}{4}$ (racine double $x = \frac{1}{2y}$).

★ Astuce de concours : encadrer par la forme canonique

Somme fixée, produit maximal quand les facteurs sont égaux :

$$x(10-x) = 25 - (x-5)^2 \leq 25 ; \text{ et } xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

car la différence vaut $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \geq 0$. Un rectangle de périmètre 40 a une aire au plus 100 (le carré).

★ Astuce de concours : symétries : la moitié du travail

Paire : étude sur $[0, +\infty[$, variations **contraires** à gauche. **Impaire** : **mêmes** variations à gauche. **Axe** $x = a$, **centre** $\Omega(a, b)$: étude sur $[a, +\infty[$, puis symétrie. Un trinôme a toujours un axe, une homographie un centre.

★ Astuce de concours : signe d'un quotient, racines évidentes

$\frac{ax+b}{cx+d}$ a le signe de $(ax+b)(cx+d)$:

$\frac{2x-1}{3-x} \geq 0 \iff \frac{1}{2} \leq x < 3$. Si $a+b+c=0$, les racines de ax^2+bx+c sont 1 et $\frac{c}{a}$ (si $a-b+c=0$: -1 et $-\frac{c}{a}$) : $7x^2-3x-4$ a pour racines 1 et $-\frac{4}{7}$.

★ Astuce de concours : le sens d'une homographie

Pour $\frac{ax+b}{cx+d}$, le signe de $ad-bc$ suffit : > 0 : croissante sur chaque intervalle ; < 0 : décroissante ; $= 0$: constante (car $k = \frac{bc-ad}{c^2}$). $\frac{3x-1}{x+1}$: $3 \times 1 - (-1) \times 1 = 4 > 0$: croissante ✓.

11

Exercices de la partie I

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Programme du tronc commun : ni limites, ni dérivées. Les figures se lisent sur le quadrillage (unité : un carreau).

Niveau 1 • Bases ★

Exercice 1 Domaines, images, antécédents ★

corrigé p. 24

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions :

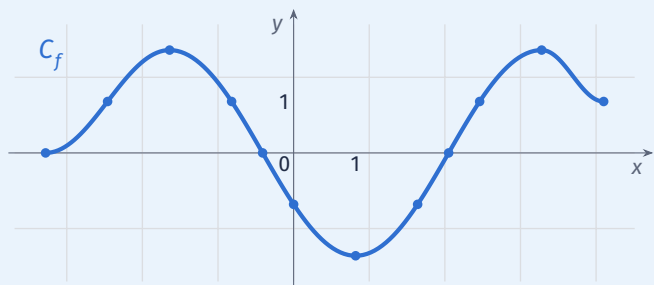
$$f_1(x) = \frac{x+5}{x^2-3x-10}; \quad f_2(x) = \sqrt{9-3x} - \frac{1}{x+1}; \quad f_3(x) = \frac{x^2+2}{|x|-3}; \quad f_4(x) = \frac{1}{x^2-x+1}.$$

2. Soit $p(x) = x^2 + 4x - 3$. Calculer $p(-2)$ et $p(\sqrt{2}-2)$, puis les antécédents par p de 2, de -7 et de -8.
3. Les fonctions $u(x) = \frac{2x^2+2}{x^2+1}$ et $v(x) = 2$ sont-elles égales ? Et $w(x) = \frac{x^2-2x}{x}$ et $t(x) = x-2$?

Exercice 2 Lire une courbe ★

corrigé p. 24

Ci-contre, la courbe C_f d'une fonction f : les points marqués ont des coordonnées entières, sauf deux points de l'axe (Ox), situés au milieu de deux graduations.



1. Donner D_f , puis $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(5)$.
2. Donner les antécédents de 1, de -2 et de 3.
3. Résoudre graphiquement : $f(x) = 0$; $f(x) \geq 1$; $f(x) < 0$.
4. Dresser le tableau de variations de f . Donner le maximum et le minimum de f sur D_f , puis sur $[-4, 0]$.
5. Selon les valeurs du réel m , donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 3 Paire, impaire ou ni l'une ni l'autre ★

corrigé p. 24

1. Étudier la parité des fonctions définies par :

a) $\frac{x^4+1}{x^2-9}$

b) $\frac{x^3-4x}{x^2+1}$

c) $|x-1| - |x+1|$

d) $x^2 - 3x$

e) $\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$

f) $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3}$

g) $\frac{x}{x-1}$

2. Une fonction impaire f , définie sur $\mathbb{R}$, vérifie $f(x) = x^2 - 3x$ pour tout $x \geq 0$. Calculer $f(0)$ et $f(-1)$, puis exprimer $f(x)$ pour $x < 0$.

Exercice 4 Trinômes en série ★

corrigé p. 25

1. Forme canonique, sommet, axe et tableau de variations de $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$ et de $g(x) = -2x^2 - 6x + 1$.
2. Étudier le signe de $f(x)$. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 - x - 6 > 0$ et $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$.
3. Vérifier que 1 est racine de $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$, puis trouver l'autre racine sans calculer de discriminant.

Exercice 5 Une fonction homographique ★

corrigé p. 25

Soit $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$.

1. Donner D_f et vérifier que $f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$. Calculer $f(6-x) + f(x)$ et interpréter.
2. Étudier, avec le taux de variation, le sens de variation de f sur $]-\infty, 3[$ et sur $]3, +\infty[$; dresser le tableau de variations.
3. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f\left(\frac{5}{2}\right)$, $f(4)$, $f(5)$; tracer C_f et ses asymptotes.
4. Résoudre $f(x) \geq 1$ par le calcul, puis contrôler sur la figure.

Niveau 2 · Bac ★★**Exercice 6 Valeurs absolues par morceaux ★★**

corrigé p. 26

Soit $h(x) = 2|x-1| - |x+3|$.

1. Écrire $h(x)$ sans valeur absolue sur $]-\infty, -3]$, sur $[-3, 1]$ et sur $[1, +\infty[$. Tracer C_h ; variations et minimum de h .
2. Résoudre $h(x) = 0$ et $h(x) \leq 0$. Selon m , combien l'équation $h(x) = m$ a-t-elle de solutions ?
3. En voyant $|x-1| + |x+3|$ comme une somme de deux distances, résoudre les équations

$$|x-1| + |x+3| = 6 ; \quad |x-1| + |x+3| = 4 ; \quad |x-1| + |x+3| = 3.$$

Exercice 7 Variations par le taux ★★

corrigé p. 26

Soit $f(x) = \frac{x^2+9}{3x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

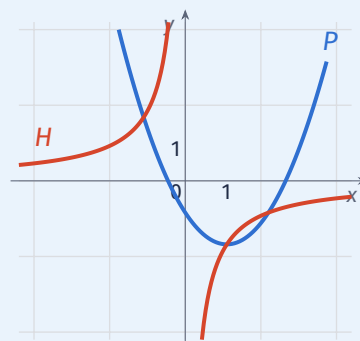
1. Étudier la parité de f . Montrer que, pour $a \neq b$ dans $\mathbb{R}^*$: $T(a, b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{ab-9}{3ab}$.
2. En déduire les variations de f sur $]0, 3]$ et sur $[3, +\infty[$, puis sur $]-\infty, 0[$; dresser le tableau de variations.
3. Montrer que $f(x) \geq 2$ pour tout $x > 0$; quel est le minimum de f sur $]0, +\infty[$? son maximum sur $]-\infty, 0[$?
4. Selon m , nombre de solutions de $f(x) = m$? Contrôler avec le discriminant de $x^2 - 3mx + 9$.

Exercice 8 Parabole et hyperbole ★★

corrigé p. 27

On note P la courbe de $f(x) = x^2 - 2x - 1$ et H celle de $g(x) = -\frac{2}{x}$ (figure).

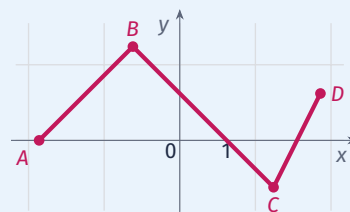
1. Lire les coordonnées des points communs à P et H .
2. Montrer que, pour $x \neq 0$: $f(x) = g(x) \iff x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. Factoriser (regrouper les termes deux à deux) et retrouver les résultats de 1.
3. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ et résoudre $f(x) \leq g(x)$. Interpréter sur la figure.
4. Sommet de P et minimum de f : que remarque-t-on ?



Exercice 9 Une courbe, des transformations ★★

corrigé p. 27

La fonction f , définie sur $[-3, 3]$, a pour courbe la ligne brisée $ABCD$ ci-contre, avec $A(-3, 0)$, $B(-1, 2)$, $C(2, -1)$ et $D(3, 1)$.



1. Lire $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, les extremums et les solutions de $f(x) = 0$. Écrire $f(x)$ sur $[-3, -1]$, sur $[-1, 2]$ et sur $[2, 3]$.
2. Soit $g(x) = f(x - 2) + 1$. Donner D_g , les sommets de C_g , le maximum et le minimum de g ; tracer C_g .
3. Mêmes questions pour $h(x) = -f(x)$ et pour $k(x) = f(-x)$.
4. Tracer les courbes de $u(x) = |f(x)|$ et de $v(x) = f(|x|)$, puis résoudre $v(x) = 0$ et $u(x) = 1$.

Exercice 10 Trois points, une parabole ★★

corrigé p. 27

1. Déterminer les réels a , b , c tels que la parabole $P : y = ax^2 + bx + c$ passe par $A(-1, 4)$, $B(1, -4)$ et $C(4, -1)$.
2. Forme canonique, sommet S , axe et racines du trinôme obtenu. Vérifier que le symétrique B' de B par rapport à l'axe est sur P .
3. Pour k réel, D_k est la droite $y = 2x + k$. Discuter selon k le nombre de points communs à P et D_k . Pour quelle valeur de k n'y en a-t-il qu'un seul ? Lequel ?

Niveau 3 · Approfondissement ★★★**Exercice 11 Ensembles images ★★★**

corrigé p. 28

1. $f(x) = -x^2 + 4x + 1$: déterminer $f([-1, 3])$ et $f([3, 5])$.
2. $g(x) = \frac{x-3}{x+1}$: déterminer $g([0, 3])$ et $g([-1, 0])$ en encadrant pas à pas.
3. $k(x) = \frac{2x}{x^2 + 2x + 2}$: justifier que $D_k = \mathbb{R}$, puis déterminer, avec un discriminant, l'ensemble des valeurs prises par k . Où sont atteints son maximum et son minimum ?

Exercice 12 Optimiser sans dériver ★★★

corrigé p. 28

1. D est la droite d'équation $2x + y = 5$ et $M(x, y)$ un point de D . Exprimer OM^2 en fonction de x , puis trouver la distance minimale de O à un point de D et le point H où elle est atteinte. Vérifier que $(OH) \perp D$.
2. $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(0, 4)$; M est un point de $[AB]$ d'abscisse $x \in [0, 6]$, P et Q ses projetés sur (Ox) et (Oy) . Montrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est $S(x) = x \left(4 - \frac{2x}{3}\right)$. Où placer M pour que cette aire soit maximale ? Comparer à l'aire du triangle OAB .
3. x et y sont deux réels strictement positifs tels que $x + 2y = 12$. Quelle est la plus grande valeur possible de xy ?

Exercice 13 Une équation à paramètre ★★★

corrigé p. 28

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'équation $(E_m) : (m - 1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$.

1. Résoudre (E_1) . Pour $m \neq 1$, montrer que le discriminant vaut $4(3 - 2m)$, puis discuter selon m le nombre de solutions de (E_m) .
2. Montrer que 1 n'est solution de (E_m) pour aucune valeur de m . Pour quelle valeur de m le réel -1 est-il solution ? Donner alors l'autre solution.

3. Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) a-t-elle deux solutions de signes contraires ? deux solutions distinctes strictement positives ?

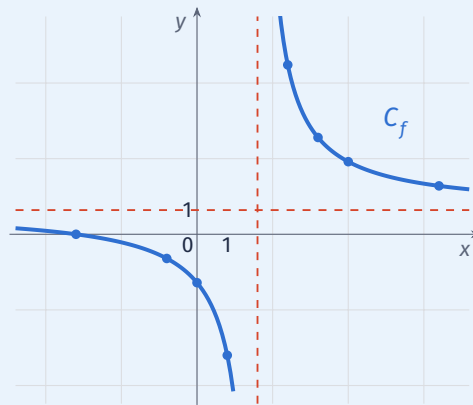
Niveau 4 · Concours ★★★★★

Exercice 14 Courbes de $|f(x)|$ et de $f(|x|)$ ★★★★★

corrigé p. 29

Soit $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$, de courbe C_f ci-contre.

1. Montrer que $f(x) = 1 + \frac{6}{x-2}$; centre de symétrie et variations de f ? Vérifier les points marqués.
2. Soit $u(x) = f(|x|)$. Donner D_u et la parité de u , construire C_u à partir de C_f , puis donner, selon m , le nombre de solutions de $u(x) = m$.
3. Mêmes questions pour $v(x) = |f(x)|$.



Exercice 15 Une équation fonctionnelle ★★★★★

corrigé p. 29

On cherche toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x :

$$2f(x) + f(1-x) = 3x^2 - 21.$$

1. **Analyse.** Soit f une telle fonction. En remplaçant x par $1-x$, obtenir une seconde relation, puis montrer que $f(x) = x^2 + 2x - 8$ pour tout x .
2. **Synthèse.** Vérifier que cette fonction convient. Conclure.
3. Forme canonique, sommet, axe et racines de f . Déterminer $f([-3, 2])$ et, selon m , le nombre de solutions de $f(x) = m$ dans $[-3, 2]$.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq f(1-x)$.

Exercice 16 Changer de variable ★★★★★

corrigé p. 29

Soit $f(x) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, et $t = x^2 - 2x$.

1. Montrer que $t \geq -1$. Pour un réel t donné, combien y a-t-il de réels x tels que $x^2 - 2x = t$?
2. On pose $\varphi(t) = t^2 - 2t$. Étudier les variations de φ sur $[-1, +\infty[$.
3. Montrer que la droite $x = 1$ est un axe de symétrie de C_f . Déterminer le minimum de f , les réels où il est atteint, puis $f(1)$. Dresser le tableau de variations de f .
4. Selon m , donner le nombre de solutions de $f(x) = m$. Résoudre $f(x) = 0$ et $f(x) = 3$.

12

Corrigés de la partie I

■ Corrigé de l'exercice 1

- $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$: $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 5\}$. Pour $f_2 : 9 - 3x \geq 0 \iff x \leq 3$, et $x \neq -1$: $D_{f_2} =]-\infty, -1[\cup]-1, 3]$. Pour $f_3 : |x| \neq 3 \iff x \neq \pm 3$: $D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Pour $f_4 : x^2 - x + 1$ a pour discriminant $-3 < 0$ et $a = 1 > 0$, il est toujours > 0 : $D_{f_4} = \mathbb{R}$.
- $p(x) = (x + 2)^2 - 7$. $p(-2) = -7$ et $p(\sqrt{2} - 2) = (\sqrt{2})^2 - 7 = -5$. $p(x) = 2 \iff (x + 2)^2 = 9 \iff x + 2 = \pm 3$: antécédents 1 et -5 . $p(x) = -7 \iff (x + 2)^2 = 0$: un seul antécédent, -2 . $p(x) = -8 \iff (x + 2)^2 = -1$: **aucun** antécédent (-7 est le minimum de p).
- $2x^2 + 2 = 2(x^2 + 1)$ et $x^2 + 1 > 0$: $D_u = \mathbb{R} = D_v$ et $u(x) = 2 = v(x)$: $u = v$. En revanche $D_w = \mathbb{R}^* \neq \mathbb{R} = D_t$ (même si $w(x) = x - 2$ pour $x \neq 0$) : $w \neq t$.

■ Corrigé de l'exercice 2

- $D_f = [-4, 5]$; $f(-2) = 2$, $f(0) = -1$, $f(3) = 1$, $f(5) = 1$.
- Antécédents de 1 : $-3, -1, 3, 5$; de -2 : 1 ; de 3 : **aucun**.
- $f(x) = 0 \iff x \in \{-4, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$; $f(x) \geq 1 \iff x \in [-3, -1] \cup [3, 5]$; $f(x) < 0 \iff x \in]-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}[$.
- Tableau ci-contre. Sur D_f : maximum 2 (atteint en -2 et en 4), minimum -2 (en 1). Sur $[-4, 0]$: f croît de 0 à 2 puis décroît jusqu'à $f(0) = -1$: maximum 2 , minimum -1 .
- On fait glisser la droite $y = m$: $m < -2$: 0 solution ; $m = -2$: 1 ; $-2 < m < 0$: 2 ; $0 \leq m < 1$: 3 ; $1 \leq m < 2$: 4 ; $m = 2$: 2 ; $m > 2$: 0 .

x	-4	-2	1	4	5
f(x)	0	2	-2	2	1

■ Corrigé de l'exercice 3

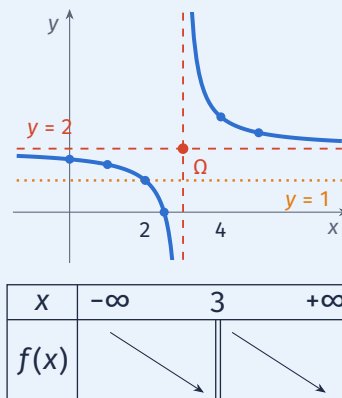
- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, symétrique, et l'expression ne contient que des puissances paires : **paire**. b) $D = \mathbb{R}$; $\frac{(-x)^3 - 4(-x)}{x^2 + 1} = -\frac{x^3 - 4x}{x^2 + 1}$: **impaire**. c) $D = \mathbb{R}$; $|-x-1| - |-x+1| = |x+1| - |x-1|$, l'opposé : **impaire**. d) $1 - 3 = -2$ en 1 , $1 + 3 = 4$ en -1 : **ni paire ni impaire**. e) $16 - x^2 \geq 0$ et $x \neq 0$: $D = [-4, 0[\cup]0, 4]$, symétrique ; $\frac{\sqrt{16-x^2}}{-x}$ est l'opposé : **impaire**. f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$; $\frac{1}{-x+3} + \frac{1}{-x-3} = -\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}$: **impaire** (c'est $\frac{2x}{x^2-9}$). g) $-1 \in D$ mais $1 \notin D$: **ni l'une ni l'autre**.
- f impaire et $0 \in \mathbb{R}$: $f(0) = 0$ (cohérent avec $0^2 - 3 \times 0 = 0$). $f(-1) = -f(1) = -(1 - 3) = 2$. Pour $x < 0$, $-x > 0$: $f(x) = -f(-x) = -(x^2 + 3x) = -x^2 - 3x$.

■ Corrigé de l'exercice 4

- $f(x) = 3(x^2 - 4x) + 7 = 3[(x-2)^2 - 4] + 7 = 3(x-2)^2 - 5$: sommet $(2, -5)$, axe $x = 2$; $a > 0$: f décroît sur $]-\infty, 2]$, croît sur $[2, +\infty[$, minimum -5 .
 $g(x) = -2(x^2 + 3x) + 1 = -2\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 1 = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2}$: sommet $\left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$, axe $x = -\frac{3}{2}$;
 $a < 0$: g croît sur $]-\infty, -\frac{3}{2}]$, décroît sur $[-\frac{3}{2}, +\infty[$, maximum $\frac{11}{2}$.
- $f(x) = 0 \iff (x-2)^2 = \frac{5}{3} \iff x = 2 \pm \frac{\sqrt{15}}{3}$: $f(x) < 0$ entre ces racines, $f(x) > 0$ à l'extérieur.
 $2x^2 - x - 6 : \Delta = 49$, racines $\frac{1 \pm 7}{4}$, soit 2 et $-\frac{3}{2}$: $S =]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]2, +\infty[$. $-x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2 \geq 0 \iff x = 3$: $S = \{3\}$.
- $1 - (1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0$ ✓. Le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = \sqrt{3}$, donc l'autre racine est $\sqrt{3}$ (contrôle : somme $1 + \sqrt{3} = -\frac{b}{a}$).

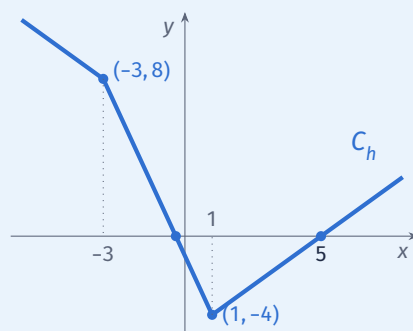
■ Corrigé de l'exercice 5

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ et $2x - 5 = 2(x-3) + 1$, d'où $f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$.
 $f(6-x) = 2 + \frac{1}{3-x} = 2 - \frac{1}{x-3}$, donc $f(6-x) + f(x) = 4 = 2 \times 2$: $\Omega(3, 2)$ est **centre de symétrie** de C_f .
- Si $a \neq b$ sont dans le même intervalle : $f(b) - f(a) = \frac{1}{b-3} - \frac{1}{a-3} = \frac{a-b}{(a-3)(b-3)}$, donc $T(a, b) = \frac{-1}{(a-3)(b-3)} < 0$ car $(a-3)(b-3) > 0$: f est **strictement décroissante** sur $]-\infty, 3[$ et sur $]3, +\infty[$ (tableau ci-contre).
- $f(0) = \frac{5}{3}$, $f(1) = \frac{3}{2}$, $f(2) = 1$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$, $f(4) = 3$, $f(5) = \frac{5}{2}$; asymptotes $x = 3$ et $y = 2$ (figure).
- $f(x) \geq 1 \iff 1 + \frac{1}{x-3} \geq 0 \iff \frac{x-2}{x-3} \geq 0 \iff x \leq 2 \text{ ou } x > 3$: la courbe est au-dessus de la droite $y = 1$ à gauche de 2 et à droite de 3.



■ Corrigé de l'exercice 6

- Si $x \leq -3$: $h(x) = 2(1-x) + (x+3) = -x+5$; si $-3 \leq x \leq 1$: $h(x) = 2(1-x) - (x+3) = -3x-1$; si $x \geq 1$: $h(x) = 2(x-1) - (x+3) = x-5$. Pentas -1, -3, 1 : h décroît sur $]-\infty, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$; $h(-3) = 8$; **minimum** $h(1) = -4$.
- $-x+5 = 0$ donne $5 > -3$: rejeté ; $-3x-1 = 0$ donne $-\frac{1}{3} \in [-3, 1]$; $x-5 = 0$ donne $5 \geq 1$. $h(x) = 0 \iff x \in \left[-\frac{1}{3}, 5\right]$ et $h(x) \leq 0 \iff x \in \left[-\frac{1}{3}, 5\right]$. Sur $]-\infty, 1]$, h prend une fois chaque valeur ≥ -4 (la solution est $5-m$ si $m \geq 8$, $-\frac{m+1}{3}$ si $-4 \leq m \leq 8$) ; sur $[1, +\infty[$ aussi ($x = m+5$). Donc : $m < -4$: 0 solution ; $m = -4$: 1 ; $m > -4$: 2.
- Avec $A(1)$, $B(-3)$ et $M(x)$: $|x-1| + |x+3| = MA+MB \geq AB = 4$, avec égalité si et seulement si $M \in [AB]$. = 4 : $x \in [-3, 1]$; = 3 : **aucune** solution ; = 6 : M est hors de $[AB]$, à distance $\frac{6-4}{2} = 1$ de l'extrémité la plus proche : $x = -4$ ou $x = 2$.



■ Corrigé de l'exercice 7

- $D = \mathbb{R}^*$ est symétrique et $f(-x) = \frac{x^2+9}{-3x} = -f(x)$: f est **impaire**. Avec $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$: $f(b) - f(a) = \frac{b-a}{3} + \frac{3(a-b)}{ab} = (b-a)\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{ab}\right) = \frac{(b-a)(ab-9)}{3ab}$, d'où $T(a, b) = \frac{ab-9}{3ab}$.
- Si $a \neq b$ sont dans $]0, 3]$: $0 < ab < 9$, $T < 0$: f **décroît** sur $]0, 3]$. Dans $[3, +\infty[$: $ab > 9$, $T > 0$: f **croît**. f étant impaire : elle croît sur $]-\infty, -3]$ et décroît sur $[-3, 0[$.

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
f(x)		-2		2	

- Pour $x > 0$: $f(x) - 2 = \frac{x^2-6x+9}{3x} = \frac{(x-3)^2}{3x} \geq 0$, nul seulement en 3 : minimum $f(3) = 2$ sur $]0, +\infty[$. Pour $x < 0$: $f(x) = -f(-x) \leq -2$: maximum $f(-3) = -2$ sur $]-\infty, 0[$. Aucune valeur de $]-2, 2[$ n'est prise.
- Pour $x \neq 0$: $f(x) = m \iff x^2 - 3mx + 9 = 0$ (0 n'est jamais racine). $\Delta = 9m^2 - 36 = 9(m-2)(m+2)$. $|m| > 2$: **deux** solutions (produit 9 > 0, somme 3m : du signe de m) ; $m = \pm 2$: **une** (± 3) ; $|m| < 2$: **aucune**. C'est bien ce que montre le tableau.

■ Corrigé de l'exercice 8

- On lit trois points communs : $(-1, 2)$, $(1, -2)$ et $(2, -1)$.
- Pour $x \neq 0$: $x^2 - 2x - 1 = -\frac{2}{x} \iff x^3 - 2x^2 - x = -2 \iff x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. Or $x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x^2 - 1) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$: solutions $\boxed{-1, 1, 2}$ (non nulles), et $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(2) = -1$ ✓.
- $f(x) - g(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{x}$. Tableau de signes :

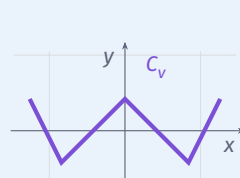
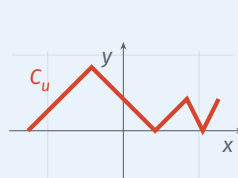
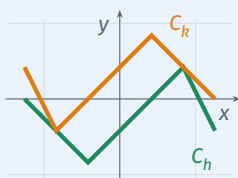
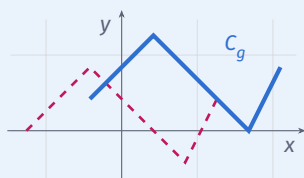
x									
x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$			
$(x+1)(x-1)(x-2)$	-	0	+		+	0	-	0	+
x	-		-	0	+		+		+
$f(x)-g(x)$	+	0	-		+	0	-	0	+

Donc $\boxed{f(x) \leq g(x) \iff x \in [-1, 0] \cup [1, 2]}$: sur ces intervalles, P est au-dessous de H .

- $f(x) = (x - 1)^2 - 2$: sommet $S(1, -2)$, minimum -2 atteint en 1. Le sommet de P est l'un des trois points communs : H passe par le sommet de P .

■ Corrigé de l'exercice 9

- $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$, $f(2) = -1$; maximum 2 (en -1), minimum -1 (en 2). Pentes : $\frac{2-0}{-1} = 1$, $\frac{-1-2}{2} = -1$, $\frac{1+1}{1} = 2$: $f(x) = x + 3$ sur $[-3, -1]$, $f(x) = -x + 1$ sur $[-1, 2]$, $f(x) = 2x - 5$ sur $[2, 3]$. Zéros : $\boxed{-3, 1, \frac{5}{2}}$.
- C_g est la translatée de C_f de vecteur $\vec{u}(2, 1)$: $D_g = [-1, 5]$, sommets $A'(-1, 1)$, $B'(1, 3)$, $C'(4, 0)$, $D'(5, 2)$; maximum $\boxed{3}$ en 1, minimum $\boxed{0}$ en 4.
- $h = -f$ (symétrie d'axe (Ox)) : sommets $(-3, 0)$, $(-1, -2)$, $(2, 1)$, $(3, -1)$; maximum 1 en 2, minimum -2 en -1 . $k(x) = f(-x)$ (symétrie d'axe (Oy)), $D_k = [-3, 3]$: sommets $(3, 0)$, $(1, 2)$, $(-2, -1)$, $(-3, 1)$; maximum 2 en 1, minimum -1 en -2 .
- C_u : on retourne la partie située entre 1 et $\frac{5}{2}$. C_v : on garde la partie $x \geq 0$, de sommets $(0, 1)$, $(2, -1)$, $(3, 1)$, et on la symétrise par rapport à (Oy) . $v(x) = 0 \iff f(|x|) = 0 \iff |x| \in \{1, \frac{5}{2}\}$ (-3 n'est pas une valeur de $|x|$) : $x \in \{-\frac{5}{2}, -1, 1, \frac{5}{2}\}$. $u(x) = 1 \iff f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$: $f(x) = 1$ pour $x = -2, 0, 3$; $f(x) = -1$ pour $x = 2$: $x \in \{-2, 0, 2, 3\}$.



■ Corrigé de l'exercice 10

- $$\begin{cases} a - b + c = 4 \\ a + b + c = -4 \\ 16a + 4b + c = -1 \end{cases}$$

La différence des deux premières donne $2b = -8$, $b = -4$, puis $a + c = 0$; la troisième devient $16a + c = 15$, d'où $15a = 15$: $a = 1$, $c = -1$: $\boxed{P : y = x^2 - 4x - 1}$.
- $x^2 - 4x - 1 = (x - 2)^2 - 5$: sommet $S(2, -5)$, axe $x = 2$, racines $2 \pm \sqrt{5}$. $B'(3, -4)$ et $3^2 - 4 \times 3 - 1 = -4$: $B' \in P$ ✓.

3. $x^2 - 4x - 1 = 2x + k \iff x^2 - 6x - (1 + k) = 0$, de discriminant $36 + 4(1 + k) = 4(k + 10)$. $k > -10$: **deux** points communs ; $k < -10$: **aucun** ; $k = -10$: un **seul**, d'abscisse $x = 3$ (racine double) et d'ordonnée $2 \times 3 - 10 = -4$: c'est le point $B'(3, -4)$.

■ Corrigé de l'exercice 11

1. $f(x) = -(x - 2)^2 + 5$. Sur $[-1, 3]$, le sommet 2 est dans l'intervalle : maximum $f(2) = 5$; $f(-1) = -4$ et $f(3) = 4$, le minimum est -4 . Toute valeur $y \in [-4, 5]$ est atteinte : $x = 2 - \sqrt{5 - y} \in [-1, 2]$. $f([-1, 3]) = [-4, 5]$. Sur $[3, 5]$, f décroît de $f(3) = 4$ à $f(5) = -4$: $f([3, 5]) = [-4, 4]$.
2. $g(x) = 1 - \frac{4}{x+1}$. Si $0 \leq x \leq 3$: $1 \leq x+1 \leq 4$, $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$, $1 \leq \frac{4}{x+1} \leq 4$, d'où $-3 \leq g(x) \leq 0$; réciproquement, $g(x) = y \iff x = \frac{4}{1-y} - 1$, qui est dans $[0, 3]$ si $-3 \leq y \leq 0$: $g([0, 3]) = [-3, 0]$.
Si $-1 < x \leq 0$: $0 < x+1 \leq 1$, $\frac{4}{x+1} \geq 4$, $g(x) \leq -3$; et tout $y \leq -3$ est atteint : $g([-1, 0]) =]-\infty, -3]$.
3. $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$: $D_k = \mathbb{R}$. $k(x) = y \iff yx^2 + (2y-2)x + 2y = 0$. Si $y = 0$: $x = 0$ convient. Si $y \neq 0$: solution $\iff \Delta = (2y-2)^2 - 8y^2 = -4(y^2 + 2y - 1) \geq 0 \iff y^2 + 2y - 1 \leq 0 \iff -1 - \sqrt{2} \leq y \leq -1 + \sqrt{2}$. $k(\mathbb{R}) = [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}]$. La racine double $x = \frac{1-y}{y}$ donne : maximum $\sqrt{2} - 1$ en $x = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}$, minimum $-1 - \sqrt{2}$ en $x = -\sqrt{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 12

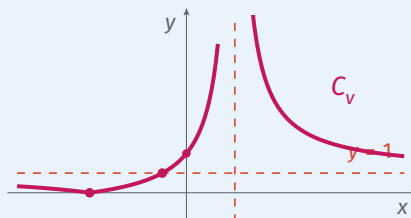
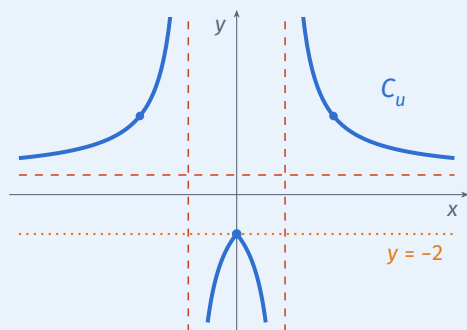
1. $y = 5 - 2x$, donc $OM^2 = x^2 + (5 - 2x)^2 = 5x^2 - 20x + 25 = 5(x - 2)^2 + 5 \geq 5$, avec égalité pour $x = 2$: la distance minimale est $\sqrt{5}$, atteinte en $H(2, 1)$. Un vecteur directeur de D est $\vec{v}(1, -2)$ et $\vec{OH} \cdot \vec{v} = 2 - 2 = 0$: $(OH) \perp D$ ✓.
2. $(AB) : \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$, soit $y = 4 - \frac{2x}{3}$; $M(x, 4 - \frac{2x}{3})$, et le rectangle $OPMQ$ a pour côtés x et $4 - \frac{2x}{3}$:
 $S(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x = -\frac{2}{3}[(x - 3)^2 - 9] = -\frac{2}{3}(x - 3)^2 + 6$. Maximum 6 pour $x = 3$: $M(3, 2)$ est le **milieu** de $[AB]$. L'aire de OAB vaut $\frac{6 \times 4}{2} = 12$: le rectangle maximal en occupe la **moitié**.
3. $x = 12 - 2y$ avec $0 < y < 6$: $xy = 12y - 2y^2 = -2(y - 3)^2 + 18 \leq 18$, avec égalité pour $y = 3$, $x = 6$: maximum **18**.

■ Corrigé de l'exercice 13

1. $(E_1) : -2x + 4 = 0$, $x = 2$. Pour $m \neq 1$: $\Delta = 4m^2 - 4(m - 1)(m + 3) = 4[m^2 - (m^2 + 2m - 3)] = 4(3 - 2m)$. $m < \frac{3}{2}$, $m \neq 1$: **deux** solutions ; $m = \frac{3}{2}$: **une** (racine double $\frac{m}{m-1} = 3$) ; $m > \frac{3}{2}$: **aucune**. Avec $m = 1$: une solution.
2. En $x = 1$: $(m - 1) - 2m + m + 3 = 2 \neq 0$ pour tout m . En $x = -1$: $(m - 1) + 2m + m + 3 = 4m + 2 = 0 \iff m = -\frac{1}{2}$; l'équation devient $-\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} = 0$, soit $3x^2 - 2x - 5 = (x + 1)(3x - 5) = 0$: l'autre solution est $\frac{5}{3}$ (contrôle : produit $\frac{m+3}{m-1} = \frac{5/2}{-3/2} = -\frac{5}{3}$).
3. Il faut $m \neq 1$. Signes contraires $\iff P = \frac{m+3}{m-1} < 0 \iff -3 < m < 1$ (alors $\Delta > 0$ automatiquement, car $ac < 0$). Deux solutions strictement positives : $\Delta > 0$ ($m < \frac{3}{2}$), $P > 0$ ($m < -3$ ou $m > 1$) et $S = \frac{2m}{m-1} > 0$ ($m < 0$ ou $m > 1$) : $m < -3$ ou $1 < m < \frac{3}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 14

1. $x + 4 = (x - 2) + 6$, donc $f(x) = 1 + \frac{6}{x-2}$: centre $\Omega(2, 1)$, asymptotes $x = 2$ et $y = 1$; $k = 6 > 0$: f est strictement décroissante sur $] -\infty, 2[$ et sur $] 2, +\infty[$. Points : $f(-4) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(0) = -2$, $f(1) = -5$, $f(3) = 7$, $f(4) = 4$, $f(5) = 3$, $f(8) = 2$ ✓. Pour $y \neq 1$, $f(x) = y \iff x = 2 + \frac{6}{y-1}$: **chaque réel $y \neq 1$ a un unique antécédent**, et 1 n'en a aucun.
2. $u(x)$ existe $\iff |x| \neq 2$: $D_u = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, symétrique, et $u(-x) = u(x)$: **paire**. Pour $x \geq 0$, $u(x) = f(x)$: on garde la partie de C_f où $x \geq 0$ et on la symétrise par rapport à (Oy) . L'antécédent $t = 2 + \frac{6}{m-1}$ de m est dans $[0, 2[\iff -2 \leq \frac{6}{m-1} < 0 \iff m \leq -2$, et dans $] 2, +\infty[\iff m > 1$. Les solutions de $u(x) = m$ sont $\pm t$: $m < -2$: $\boxed{2}$; $m = -2$: $\boxed{1}$ ($x = 0$) ; $-2 < m \leq 1$: $\boxed{0}$; $m > 1$: $\boxed{2}$.
3. $D_v = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $f(x) < 0 \iff -4 < x < 2$: on retourne cette partie de C_f . $v(x) = m$: aucune solution si $m < 0$; si $m = 0$, $f(x) = 0$: $x = -4$ seulement. Si $m > 0$: $f(x) = m$ ou $f(x) = -m$; comme $-m \neq 1$, $f(x) = -m$ a une solution, et $f(x) = m$ en a une si $m \neq 1$, aucune si $m = 1$. Bilan : $m < 0$: $\boxed{0}$; $m = 0$: $\boxed{1}$; $0 < m < 1$: $\boxed{2}$; $m = 1$: $\boxed{1}$ ($x = -1$) ; $m > 1$: $\boxed{2}$.



■ Corrigé de l'exercice 15

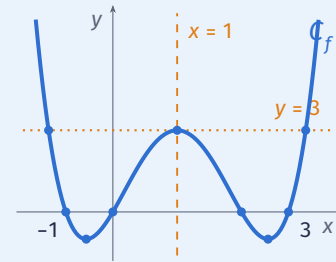
1. En remplaçant x par $1 - x$ (et $1 - (1 - x) = x$) : $2f(1 - x) + f(x) = 3(1 - x)^2 - 21$. Avec $A = f(x)$ et $B = f(1 - x)$: $2A + B = 3x^2 - 21$ et $A + 2B = 3(1 - x)^2 - 21$. En retranchant la seconde du double de la première : $3A = 6x^2 - 42 - 3(1 - x)^2 + 21 = 3x^2 + 6x - 24$, donc $\boxed{f(x) = x^2 + 2x - 8}$.
2. $f(1 - x) = (1 - x)^2 + 2(1 - x) - 8 = x^2 - 4x - 5$, et $2f(x) + f(1 - x) = 2x^2 + 4x - 16 + x^2 - 4x - 5 = 3x^2 - 21$ ✓. Il y a donc **une seule** fonction solution.
3. $f(x) = \boxed{(x + 1)^2 - 9}$: sommet $(-1, -9)$, axe $x = -1$, racines -4 et 2 ($(x + 1)^2 = 9$). Sur $[-3, 2]$, f décroît de $f(-3) = -5$ à -9 , puis croît de -9 à $f(2) = 0$: $\boxed{f([-3, 2]) = [-9, 0]}$. Nombre de solutions dans $[-3, 2]$: $m < -9$ ou $m > 0$: 0 ; $m = -9$: 1 ; $-9 < m \leq -5$: 2 ; $-5 < m \leq 0$: 1 .
4. $f(x) - f(1 - x) = (x^2 + 2x - 8) - (x^2 - 4x - 5) = 6x - 3$: $f(x) \leq f(1 - x) \iff \boxed{x \leq \frac{1}{2}}$.

■ Corrigé de l'exercice 16

1. $t = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$. $x^2 - 2x = t \iff (x - 1)^2 = t + 1$: aucun x si $t < -1$; un seul ($x = 1$) si $t = -1$; deux ($1 \pm \sqrt{t + 1}$) si $t > -1$.
2. $\varphi(t) = (t - 1)^2 - 1$: φ décroît sur $[-1, 1]$ (de $\varphi(-1) = 3$ à $\varphi(1) = -1$), croît sur $] 1, +\infty[$.
3. $(2 - x)^2 - 2(2 - x) = x^2 - 2x$: t prend la même valeur en x et en $2 - x$, donc $f(2 - x) = f(x)$: **axe $x = 1$** . $f(x) = \varphi(t) \geq -1$, avec égalité $\iff t = 1 \iff (x - 1)^2 = 2$: minimum $\boxed{-1}$, atteint en $\boxed{1 \pm \sqrt{2}}$; $f(1) = \varphi(-1) = \boxed{3}$.

Variations. Sur $[1, +\infty[$, $x \mapsto t$ est strictement croissante. Si $1 \leq a < b \leq 1 + \sqrt{2}$, alors $-1 \leq t(a) < t(b) \leq 1$ et φ décroît : $f(a) > f(b)$. Si $1 + \sqrt{2} \leq a < b$: $1 \leq t(a) < t(b)$ et $f(a) < f(b)$. On complète par symétrie d'axe $x = 1$:

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)$		-1	3	-1	



4. $f(x) = m \iff (t-1)^2 = m+1$, puis on compte les x grâce à 1. $m < -1$: $\boxed{0}$. $m = -1$: $t = 1$, $\boxed{2}$ solutions. $m > -1$: $t = 1 \pm \sqrt{m+1}$; la valeur $1 + \sqrt{m+1} > -1$ donne deux x ; la valeur $1 - \sqrt{m+1}$ est > -1 si $m < 3$ (deux x de plus), égale à -1 si $m = 3$ (un x), < -1 si $m > 3$ (aucun). Bilan : $-1 < m < 3$: $\boxed{4}$; $m = 3$: $\boxed{3}$; $m > 3$: $\boxed{2}$.

$$f(x) = 0 \iff t(t-2) = 0 : t = 0 \text{ (} x = 0 \text{ ou } 2 \text{)} \text{ ou } t = 2 \text{ (} x = 1 \pm \sqrt{3} \text{)} : \boxed{\{1 - \sqrt{3}, 0, 2, 1 + \sqrt{3}\}}.$$

$$f(x) = 3 \iff (t-3)(t+1) = 0 : t = 3 \text{ (} x = -1 \text{ ou } 3 \text{)} \text{ ou } t = -1 \text{ (} x = 1 \text{)} : \boxed{\{-1, 1, 3\}}.$$

Partie 2 · Limites et dérivées

1^{re} Bac : limites, dérivation, branches infinies et premières études

1^{re} Bac **Objectif** : étudier **complètement** une fonction polynôme, rationnelle, irrationnelle ou trigonométrique simple (limites, dérivée, variations, branches infinies, concavité) et tracer sa courbe. **Prérequis** : la partie 1.

1

Fonctions bornées et composées

Définition : fonction majorée, minorée, bornée

Soit f définie sur un ensemble I (en général un intervalle). f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$ (M est un **majorant**) ; **minorée** s'il existe un réel m tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in I$; **bornée** si elle est majorée **et** minorée. Graphiquement, C_f reste dans la **bande** comprise entre les droites $y = m$ et $y = M$.

Propriété : f est bornée sur $I \iff$ il existe un réel $A \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq A$ pour tout $x \in I$ (si $m \leq f \leq M$, prendre $A = \max(|m|, |M|)$).

Exemple 1 : un minimum atteint, un majorant qui ne l'est pas.

$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1} = 2 - \frac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $x^2 + 1 \geq 1$: $0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$, donc $1 \leq f(x) < 2$. $f(0) = 1$: 1 est le **minimum** de f . Mais 2 n'est **jamais atteint**, et aucun réel $M < 2$ n'est un majorant : si $1 \leq M < 2$, $f(x) > M \iff x^2 + 1 > \frac{1}{2-M}$, ce qui est vrai pour $|x|$ assez grand. f est bornée **sans avoir de maximum**.

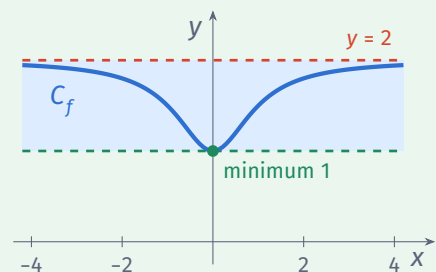
Exemple 2 : borner sans étudier. $g(x) = \frac{3 \sin x - 2}{\cos^2 x + 1}$: $|3 \sin x - 2| \leq 3|\sin x| + 2 \leq 5$ et $\cos^2 x + 1 \geq 1$, donc $|g(x)| \leq 5$ pour tout réel x : g est bornée.

Définition : comparer deux fonctions

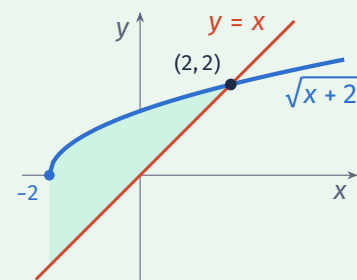
Soit f et g définies sur I . On écrit $f \leq g$ sur I si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$: sur I , C_f est **au-dessous** de C_g .

Méthode : étudier le **signe** de $g(x) - f(x)$.

Exemple : comparer $\sqrt{x+2}$ et x sur $[-2, +\infty[$. Si $-2 \leq x < 0$: $x < 0 \leq \sqrt{x+2}$. Si $x \geq 0$, les deux membres sont positifs, on peut élever au carré : $\sqrt{x+2} \geq x \iff x+2 \geq x^2 \iff (x-2)(x+1) \leq 0 \iff x \leq 2$. Bilan : $\sqrt{x+2} \geq x \iff x \in [-2, 2]$, avec égalité seulement en 2.



$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$: la courbe reste dans la bande $1 \leq y < 2$; la droite $y = 2$ n'est jamais atteinte



zone verte : $\sqrt{x+2} \geq x$

Définition : composée de deux fonctions

Soit f définie sur D_f et g définie sur D_g . La **composée** $g \circ f$ (« g rond f ») est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ sur $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$: on applique d'abord f , puis g .

L'ordre compte, le domaine aussi. $u(x) = x^2 - 9$ et $v(x) = \sqrt{x}$: $(v \circ u)(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ existe $\iff x^2 \geq 9$, donc $D_{v \circ u} =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$. $(u \circ v)(x) = (\sqrt{x})^2 - 9 = x - 9$, mais **seulement pour** $x \geq 0$: $u \circ v$ n'est pas la fonction affine $x \mapsto x - 9$ de $\mathbb{R}$. En général, $v \circ u \neq u \circ v$.

Monotonie d'une composée

Si f est monotone sur I , avec $f(x) \in J$ pour tout $x \in I$, et si g est monotone sur J : f et g de **même** sens de variation $\Rightarrow g \circ f$ **croissante** sur I ; de sens **contraires** $\Rightarrow g \circ f$ **décroissante** sur I .

Démonstration (f croissante, g décroissante). Si $a \leq b$ dans I , alors $f(a) \leq f(b)$ dans J , donc $g(f(a)) \geq g(f(b))$: $g \circ f$ décroît. Les autres cas sont identiques.

f	g	$g \circ f$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

la « règle des signes »

Exemple : $h(x) = \frac{2}{x^2 + 4x + 8}$ sans dériver

$h = g \circ f$ avec $f(x) = x^2 + 4x + 8 = (x + 2)^2 + 4 \geq 4$ et $g(t) = \frac{2}{t}$, décroissante sur $]0, +\infty[$. f décroît sur $]-\infty, -2]$: h y est **croissante** ; f croît sur $[-2, +\infty[$: h y est **décroissante**. Maximum : $h(-2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, et $0 < h(x) \leq \frac{1}{2}$: h est bornée.

2 Périodicité et symétries

Définition : fonction périodique

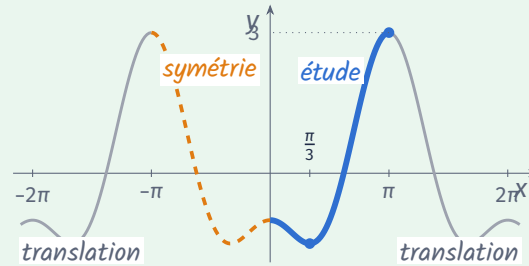
Soit $T > 0$. f est **périodique de période** T si, pour tout $x \in D_f$: $x + T \in D_f$, $x - T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$. Alors $f(x + kT) = f(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$: C_f est invariante par la **translation** de vecteur $T\vec{i}$, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur T (un **motif**) puis de translater. **Périodes usuelles** ($a \neq 0$) : $\sin$ et $\cos$ sont 2π -périodiques, $\tan$ est π -périodique ; $x \mapsto \cos(ax + b)$ et $x \mapsto \sin(ax + b)$ sont $\frac{2\pi}{|a|}$ -périodiques, $x \mapsto \tan(ax + b)$ est $\frac{\pi}{|a|}$ -périodique.

Démonstration. $\cos\left(a\left(x + \frac{2\pi}{|a|}\right) + b\right) = \cos(ax + b \pm 2\pi) = \cos(ax + b)$. **Exemple :** $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}$: les deux termes ont pour périodes 4π et 6π ; un multiple commun est 12π : $f(x + 12\pi) = \sin\left(\frac{x}{2} + 6\pi\right) + \cos\left(\frac{x}{3} + 4\pi\right) = f(x)$: f est 12π -périodique.

Méthode : réduire le domaine d'étude

Si f est T -périodique, on l'étudie sur un intervalle de longueur T . Si de plus elle est **paire** (ou **impaire**), on l'étudie sur $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, puis on complète par la symétrie d'axe (Oy) (ou de centre O) et par les translations de vecteurs $kT\vec{i}$.

Exemple : $f(x) = \cos 2x - 2 \cos x$ est définie sur $\mathbb{R}$, **paire** ($f(-x) = f(x)$) et **2π -périodique** : on l'étudie sur $[0, \pi]$ (tableau à la section 8), on symétrise par rapport à (Oy) , puis on translate. Minimum $-\frac{3}{2}$ en $\pm\frac{\pi}{3}$, maximum 3 en $\pm\pi$.



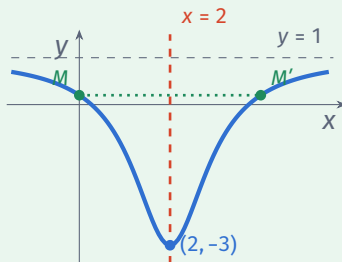
Axe et centre de symétrie

- La droite $x = a$ est un **axe de symétrie** de $C_f \iff$ pour tout $x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
- Le point $\Omega(a, b)$ est un **centre de symétrie** de $C_f \iff$ pour tout $x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

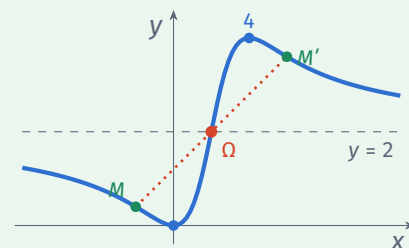
Pour $a = 0$ (et $b = 0$), on retrouve les fonctions paires (axe (Oy)) et impaires (centre O).
Formes équivalentes : $f(a - h) = f(a + h)$ et $f(a - h) + f(a + h) = 2b$.

Démonstration. Le symétrique de $M(x, f(x))$ par rapport à la droite $x = a$ est $M'(2a - x, f(x))$; par rapport à $\Omega(a, b)$, c'est $M'(2a - x, 2b - f(x))$ (Ω est le milieu de $[MM']$). La courbe est symétrique si et seulement si $M' \in C_f$ pour tout point M de C_f .

Axe : $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 4x + 5}$, $D_f = \mathbb{R}$ ($x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 > 0$).
 $(4 - x)^2 - 4(4 - x) = x^2 - 4x$, donc $f(4 - x) = f(x)$: la droite $x = 2$ est un axe. De plus $f(x) = 1 - \frac{4}{(x - 2)^2 + 1} \geq -3$: minimum -3 en 2.



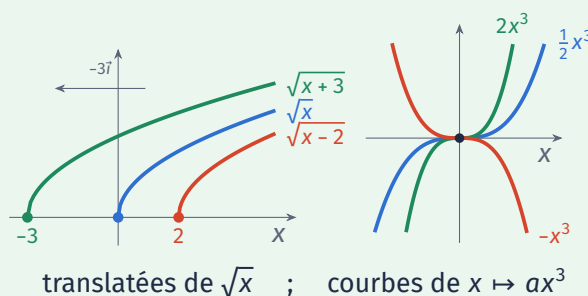
Centre : $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 2}$, $D_f = \mathbb{R}$ ($x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$).
 $(2 - x)^2 - 2(2 - x) + 2 = x^2 - 2x + 2$, donc $f(2 - x) + f(x) = \frac{2[(2 - x)^2 + x^2]}{x^2 - 2x + 2} = \frac{2(2x^2 - 4x + 4)}{x^2 - 2x + 2} = 4$: $\Omega(1, 2)$ est un centre.



Ici aussi $0 \leq f(x) \leq 4$, car $4 - f(x) = \frac{2(x - 2)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$: le minimum 0 (en 0) et le maximum 4 (en 2) sont **symétriques** par rapport à Ω .

2.1 Deux nouvelles fonctions de référence

- $x \mapsto \sqrt{x+a}$ est définie sur $[-a, +\infty[$ et strictement croissante. Sa courbe est l'image de celle de $x \mapsto \sqrt{x}$ par la **translation** de vecteur $-a\vec{i}$: elle part du point $(-a, 0)$, avec une demi-tangente **verticale** (section 6).
- $x \mapsto ax^3$ ($a \neq 0$) est **impaire** : sa courbe admet O pour centre de symétrie. Strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$, décroissante si $a < 0$; plus $|a|$ est grand, plus la courbe est « raide ». En O , la tangente est l'axe (Ox) , et la courbe la **traverse** (section 10).



3

Limites : définitions, opérations

Définition : les limites, en langage courant

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: $f(x)$ devient **aussi grand que l'on veut** (dépasse tout réel A donné) dès que x est assez grand ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$) : $f(x)$ est **aussi proche de ℓ que l'on veut** dès que x est assez grand. Mêmes idées en $-\infty$ et quand x se rapproche d'un réel a .
- **Limite à droite** en a : $x \rightarrow a^+$ avec $x > a$; **à gauche** : $x \rightarrow a^-$ avec $x < a$. f a pour limite ℓ en $a \iff$ ses limites à droite et à gauche en a valent toutes deux ℓ .
- Si f est un polynôme, une fraction rationnelle, $\sqrt{}$, $\sin$, $\cos$ ou $\tan$, et si $a \in D_f$: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (« on remplace »).

Limites de référence ($n \in \mathbb{N}^*$)

	en $+\infty$	en $-\infty$	en 0^+	en 0^-
x^n	$+\infty$	$+\infty$ (n pair) ; $-\infty$ (n impair)	0	0
$\frac{1}{x^n}$	0	0	$+\infty$	$+\infty$ (n pair) ; $-\infty$ (n impair)
$\sqrt{x}$; $\frac{1}{\sqrt{x}}$	$+\infty$; 0	—	0 ; $+\infty$	—

Opérations sur les limites (ℓ, ℓ' réels ; en $\pm\infty$, en a , à droite ou à gauche)

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

$\lim f$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(fg)$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$\pm\infty^*$	F.I.

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^+ ou 0^-	$\ell' \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty^*$	$\pm\infty^*$	F.I.	F.I.

* signe donné par la **règle des signes**. Les quatre **formes indéterminées** : « $+\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ » : il faut transformer l'écriture (section 4).

Exemple : limites en un point « interdit » : $f(x) = \frac{x+4}{x^2-2x-3}$

$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. Le numérateur tend vers 7 en 3 et vers 3 en -1 : la limite est infinie, son **signe** se lit dans le tableau de signes du dénominateur.

En 3 : $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{7}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{7}{0^-} = -\infty$.

En -1 : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$.

En $\pm\infty$: 0 (section 4). Pas de limite en 3 ni en -1 (limites à droite et à gauche différentes).

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$	+	0	- 0	+

4 Les formes indéterminées

Polynômes et fractions rationnelles en $\pm\infty$

En $+\infty$ et en $-\infty$, un polynôme a la même limite que son **terme de plus haut degré**, et une fraction rationnelle a la même limite que le **quotient des termes de plus haut degré**.

Démonstration. $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n} \right)$, et la parenthèse tend vers 1 ; pour un quotient, on factorise en haut et en bas. **Attention :** c'est **faux** en un réel a .

Méthode : lever une forme indéterminée

Polynôme, fraction en $\pm\infty$ termes de plus haut degré (propriété ci-dessus) ;
« $\frac{0}{0}$ » en a (fraction) a est racine du numérateur et du dénominateur : **factoriser par $x - a$** , simplifier ;
Radicaux multiplier par la **quantité conjuguée** :
 $(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$;
 $\sqrt{\quad}$ en $\pm\infty$ factoriser par x^2 sous la racine : $\sqrt{x^2(\dots)} = |x|\sqrt{\dots}$, avec $|x| = -x$ en $-\infty$.

Exemple : formes indéterminées levées

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 5x + 2}{1 - 6x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{-6x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x}{2} \right) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x}{2x^2 - 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = 2.$$

2. **Factoriser :** $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$ est « $\frac{0}{0}$ » ; $x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$ et $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$,
 donc la limite vaut $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x + 1} = \frac{27}{4}$.

3. **Conjugué en un point :** $\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} = \frac{(x+5)-9}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x+5}+3} \xrightarrow{x \rightarrow 4} \boxed{\frac{1}{6}}.$

4. **Conjugué en $+\infty$** (« $+\infty - \infty$ » ; pour $x > 0$, on divise en haut et en bas par x) :

$$\sqrt{4x^2+3x+1}-2x = \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+3x+1}+2x} = \frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2+2} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

5. **En $-\infty$, $|x| = -x$:** $\sqrt{x^2-3x}+x = \frac{-3x}{\sqrt{x^2-3x}-x} = \frac{-3x}{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}-x} = \frac{3}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \boxed{\frac{3}{2}}.$

6. **Deux limites différentes :** $\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x+2} = \frac{|x|\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{2}{x})}$ tend vers $\boxed{3}$ en $+\infty$ ($|x| = x$) et vers $\boxed{-3}$ en $-\infty$ ($|x| = -x$).

5 Limites : trigo, comparaison

Trois limites trigonométriques usuelles

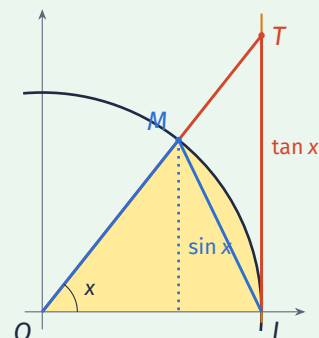
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Pour $a \neq 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$.

Démonstration. Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on compare les aires du triangle OIM , du secteur OIM et du triangle OIT : $\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$, d'où $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$, encore vrai pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ (parité). Comme $\cos x \rightarrow 1$, les gendarmes (ci-dessous) donnent la première limite. Puis $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1$ et $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} \rightarrow \frac{1}{2}$.



aire de $OIM \leq$ aire du secteur $\leq$ aire de OIT

Méthode : limites trigonométriques en 0

Faire apparaître $\frac{\sin X}{X}$, $\frac{\tan X}{X}$ ou $\frac{1-\cos X}{X^2}$ avec **le même** X en haut et en bas, $X \rightarrow 0$. En un réel $a \neq 0$, poser $h = x - a$ (ou $h = a - x$) pour se ramener en 0.

Exemple : quatre limites

$$\frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{5}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{5}{2}}$$

$$\frac{1 - \cos 3x}{x^2} = 9 \times \frac{1 - \cos 3x}{(3x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{9}{2}}$$

$$\frac{\tan 2x}{x^2 + 3x} = \frac{\tan 2x}{2x} \times \frac{2}{x+3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\text{en } \pi, h = \pi - x : \frac{\sin x}{\pi - x} = \frac{\sin(\pi - h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \boxed{1}$$

Théorèmes de comparaison (en $+\infty$; de même en $-\infty$, en a , à droite, à gauche)

1. Si $f(x) \geq g(x)$ pour x assez grand et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (de même : $f \leq g$ et $g \rightarrow -\infty$ donnent $f \rightarrow -\infty$).
2. **Gendarmes** : si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour x assez grand et si g et h ont la même limite ℓ , alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.
3. Si $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ pour x assez grand et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

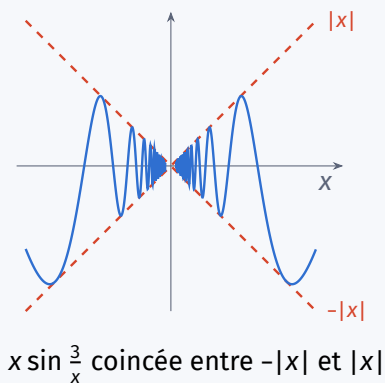
Exemple : une même fonction, deux limites : $f(x) = x \sin \frac{3}{x}$

En 0 : $|x \sin \frac{3}{x}| \leq |x|$ (car $|\sin| \leq 1$), et $|x| \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{3}{x} = 0, \text{ bien que } \sin \frac{3}{x} \text{ n'ait pas de limite en 0.}$$

En $+\infty$: avec $t = \frac{3}{x} \rightarrow 0^+$: $x \sin \frac{3}{x} = 3 \frac{\sin t}{t} \rightarrow \boxed{3}$.

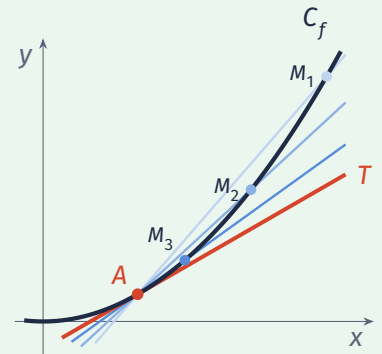
Deux autres exemples : pour $x > 0$, $\left| \frac{5x-2\cos x}{x+3} - 5 \right| = \frac{|15+2\cos x|}{x+3} \leq \frac{17}{x+3}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-2\cos x}{x+3} = 5$; et $x^2 - 4\sin x \geq x^2 - 4$ donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4\sin x) = +\infty$.

**6 Nombre dérivé et tangente****Définition : nombre dérivé**

Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant a . On dit que f est **dérivable en a** si le **taux d'accroissement** $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ a une limite **finie** ℓ quand $h \rightarrow 0$. Ce réel est le **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Interprétation. Le taux d'accroissement est le **coefficient directeur de la sécante** (AM), avec $A(a, f(a))$ et $M(a+h, f(a+h))$. Quand $h \rightarrow 0$, M glisse vers A et les sécantes « tournent » vers la **tangente** en A , de coefficient directeur $f'(a)$. Sur la figure, $f(x) = \frac{x^2}{2}$ et $a = 1$: le taux vaut $1 + \frac{h}{2}$; pour $h = 2 ; 1,2 ; 0,5$ on trouve les pentes $2 ; 1,6 ; 1,25$, qui tendent vers $f'(1) = 1$.



les sécantes $(AM_1), (AM_2), (AM_3)$ se rapprochent de la tangente T

Tangente et approximation affine

Si f est dérivable en a , la courbe C_f admet au point $A(a, f(a))$ la **tangente** $T : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Pour h proche de 0 : $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ (**approximation affine** : on remplace la courbe par sa tangente). Usuelles : $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$, $\frac{1}{1+h} \approx 1 - h$, $(1+h)^n \approx 1 + nh$, $\sin h \approx h$.

Exemple : par la définition : $f(x) = \frac{4}{x+3}$ en $a = 1$

$$f(1) = 1 \text{ et } \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{4}{4+h} - 1}{h} = \frac{4 - (4+h)}{h(4+h)} = \frac{-1}{4+h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{1}{4}. \text{ Donc } f'(1) = -\frac{1}{4} \text{ et } T : y = -\frac{1}{4}(x-1) + 1 = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}.$$

Approximation : avec $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$ (section 7) : $\sqrt{25,3} \approx 5 + \frac{0,3}{10} = 5,03$ (valeur exacte : 5,0299 ...).

Définition : dérivée à droite, à gauche ; demi-tangentes

Si $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell_d \in \mathbb{R}$, f est **dérivable à droite** en a et $f'_d(a) = \ell_d$: C_f a en A une **demi-tangente** $y = \ell_d(x - a) + f(a)$, $x \geq a$. De même **à gauche** ($h \rightarrow 0^-, x \leq a$).

f est dérivable en $a \iff f$ est dérivable à droite et à gauche en a avec $f'_d(a) = f'_g(a)$.

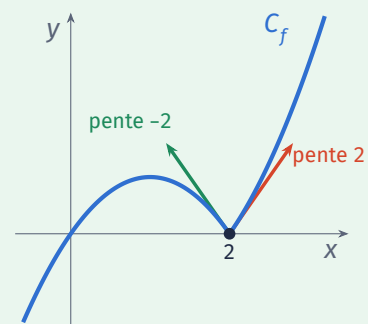
Si le taux tend vers $\pm\infty$ (à droite ou à gauche), f n'est pas dérivable de ce côté, et C_f a en A une **demi-tangente verticale**.

Point anguleux : $f(x) = x|x-2|$ en $a = 2$ ($f(2) = 0$).

Pour $h > 0$: $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)h}{h} = 2+h \rightarrow 2$; pour $h < 0$: $\frac{(2+h)(-h)}{h} = -(2+h) \rightarrow -2$.

$f'_d(2) = 2 \neq f'_g(2) = -2$: f n'est **pas** dérivable en 2 ; deux demi-tangentes $y = 2(x-2)$ ($x \geq 2$) et $y = -2(x-2)$ ($x \leq 2$) forment un « coin ».

Demi-tangente verticale : $f(x) = \sqrt{x}$ en 0 : $\frac{\sqrt{h}-0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \rightarrow +\infty$ quand $h \rightarrow 0^+$. De même $x \mapsto \sqrt{x+a}$ au point $(-a, 0)$ (figure de la section 2).



7 Fonction dérivée et opérations

Définition : fonction dérivée

f est **dérivable sur un intervalle ouvert** I si elle est dérivable en tout point de I ; la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f . Si f' est elle-même dérivable, sa dérivée $f'' = (f')'$ est la **dérivée seconde**.

Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$-\frac{1}{x^2}$; $-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\sin x$; $\cos x$	$\cos x$; $-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Opérations (u, v dérivables, $k \in \mathbb{R}$)

fonction	dérivée	fonction	dérivée
$u + v$	$u' + v'$	ku	ku'
uv	$u'v + uv'$	u^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$n u' u^{n-1}$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$ ($u > 0$)	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(ax + b)$	$a f'(ax + b)$

$$\begin{aligned} (\sin(ax + b))' &= a \cos(ax + b) ; \\ (\cos(ax + b))' &= -a \sin(ax + b) ; \\ (\tan(ax + b))' &= a (1 + \tan^2(ax + b)). \end{aligned}$$

Démonstration du produit. $\frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + u(a) \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$, car $v(a+h) \rightarrow v(a)$ (v est dérivable en a). **Conséquence :** les polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$, les fractions rationnelles sur chaque intervalle de leur domaine.

Exemple : six dérivées

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (3x - 1)^4 : f_1'(x) = 4 \times 3 (3x - 1)^3 = 12(3x - 1)^3 \\ f_2(x) &= \sqrt{2x^2 + 1} : f_2'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}} \\ f_3(x) &= \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) : f_3'(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \\ f_4(x) &= \sqrt{7 - 3x} \quad (x < \frac{7}{3}) : f_4'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{7 - 3x}} \\ f_5(x) &= \frac{x^2 + 1}{2x - 1} : f_5'(x) = \frac{2x(2x - 1) - 2(x^2 + 1)}{(2x - 1)^2} = \frac{2(x^2 - x - 1)}{(2x - 1)^2} \quad (x \neq \frac{1}{2}) \\ f_6(x) &= \frac{\cos x}{2 - \sin x} : f_6'(x) = \frac{-\sin x (2 - \sin x) - \cos x \times (-\cos x)}{(2 - \sin x)^2} = \frac{1 - 2 \sin x}{(2 - \sin x)^2} \end{aligned}$$

8 Dérivée et variations

Théorème (admis) — sur un intervalle I

Soit f dérivable sur un intervalle I .

- si $f' \geq 0$ sur I , f est croissante sur I ; si $f' \leq 0$ sur I , f est décroissante sur I ; si $f' = 0$ sur I , f est constante sur I ;
- si $f' > 0$ sur I , sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, f est **strictement** croissante sur I (de même pour < 0).

Extremums et dérivée

$f(a)$ est un **maximum local** (resp. **minimum local**) s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$) pour tout $x \in J \cap D_f$.

- Si f est dérivable en a (intérieur à D_f) et admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$: la tangente est **horizontale**.
- **Réciproque fausse** (x^3 en 0). Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors $f(a)$ est un extremum local.

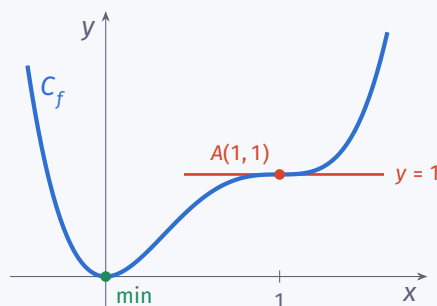
Exemple : $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$: une tangente horizontale sans extremum

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x-1)^2$: du signe de x , nulle en 0 et en 1.
En $\pm\infty$, f a la limite de $3x^4 : +\infty$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	1	$+\infty$

En 0 : f' change de signe : **minimum** $f(0) = 0$
(global, car $f(x) = x^2(3x^2 - 8x + 6)$ et $3x^2 - 8x + 6 > 0, \Delta < 0$).

En 1 : $f'(1) = 0$ mais f' **ne change pas de signe** :
pas d'extremum. La tangente $y = 1$ est horizontale
et la courbe la **traverse**.



Exemple : $f(x) = \cos 2x - 2 \cos x$ sur $[0, \pi]$ (suite de la section 2)

$f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \sin x = -4 \sin x \cos x + 2 \sin x = 2 \sin x(1 - 2 \cos x)$. Sur $]0, \pi[$, $\sin x > 0$: $f'(x)$ a le signe de $1 - 2 \cos x$, négatif sur $]0, \frac{\pi}{3}[$, positif sur $]\frac{\pi}{3}, \pi[$ (cos décroît sur $[0, \pi]$ et $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$).
 $f(0) = -1$, $f(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$, $f(\pi) = 1 + 2 = 3$.
Par parité, $f(0) = -1$ est un **maximum local** (mais pas le maximum de f).

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	0	-	+
$f(x)$	-1	$-\frac{3}{2}$	3

9 Branches infinies

On dit que C_f a une **branche infinie** quand x ou $f(x)$ tend vers l'infini. Étudier la branche, c'est décrire l'allure de la courbe « très loin ».

Méthode : étudier une branche infinie en $\pm\infty$

1. $\lim f(x)$; 2. si elle est infinie, $\lim \frac{f(x)}{x}$; 3. si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a \neq 0$, $\lim (f(x) - ax)$: chaque résultat renvoie à une ligne du tableau ci-dessous.

Raccourci : si l'on écrit $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\varphi(x) \rightarrow 0$, la droite $y = ax + b$ est asymptote, et la **position** de C_f par rapport à elle est donnée par le **signe** de $\varphi(x) = f(x) - (ax + b)$.

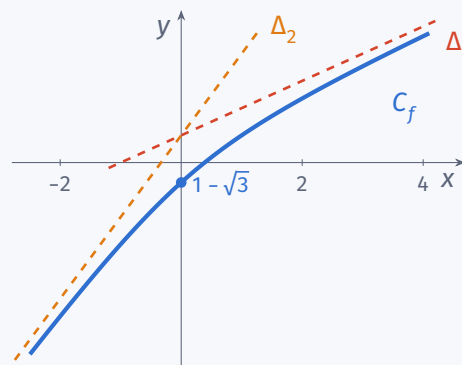
Limite(s) obtenue(s)	Conclusion	Allure	Exemple
$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$	asymptote verticale $x = a$		$\frac{1}{(x-5)^2} : x = 5$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$	asymptote horizontale $y = b$		$\frac{3x^2}{x^2+2} : y = 3$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad (a \neq 0)$	asymptote oblique $y = ax + b$		$x + 3 - \frac{1}{x} : y = x + 3$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$	branche parabolique de direction (Oy)		$-x^3 + 4x ; (x-3)\sqrt{x+1}$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	branche parabolique de direction (Ox)		$2\sqrt{x} - 1$ en $+\infty$
$\frac{f(x)}{x} \rightarrow a \neq 0$ et $f(x) - ax \rightarrow \pm\infty$	branche parabolique de direction $y = ax$		$x - \sqrt{x}$ en $+\infty$ (rare en 1 ^{re} Bac)

Exemple : deux asymptotes obliques différentes : $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 + 3}$ sur $\mathbb{R}$

En $+\infty$ (conjugué) : $f(x) - (x + 1) = x - \sqrt{x^2 + 3} = \frac{-3}{x + \sqrt{x^2 + 3}} \rightarrow 0$: $\Delta_1 : y = x + 1$ est asymptote en $+\infty$.

En $-\infty$: $f(x) - (3x + 1) = -\left(x + \sqrt{x^2 + 3}\right) = \frac{-3}{\sqrt{x^2 + 3} - x} \rightarrow 0$ (le dénominateur tend vers $+\infty$) : $\Delta_2 : y = 3x + 1$ est asymptote en $-\infty$.

Positions : $\sqrt{x^2 + 3} > |x|$, donc $x + \sqrt{x^2 + 3} > 0$ et $\sqrt{x^2 + 3} - x > 0$ pour tout x : les deux différences sont **négligables**, C_f est **au-dessous** de Δ_1 et de Δ_2 sur $\mathbb{R}$. Enfin $f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} > 1 > 0$: f est strictement croissante.



10 Concavité et points d'inflexion

Définition : convexe, concave, point d'inflexion

Soit f dérivable sur un intervalle I . C_f est **convexe** sur I si elle est **au-dessus** de chacune de ses tangentes sur I ; elle est **concave** si elle est **au-dessous**. Un point A où la courbe **traverse** sa tangente (en passant de concave à convexe ou l'inverse) est un **point d'inflexion**.



convexe : $f'' \geq 0$



concave : $f'' \leq 0$



inflexion : f'' change de signe en A

Théorème (admis)

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I .

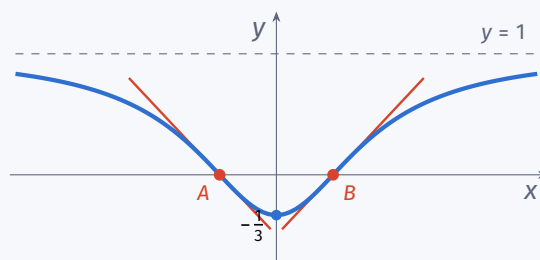
- si $f'' \geq 0$ sur I (f' croissante), C_f est convexe sur I ; si $f'' \leq 0$ sur I (f' décroissante), C_f est concave sur I ;
- si f'' s'annule en a **en changeant de signe**, le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion.
Exemple : le point $A(1, 1)$ de la section 8, où $f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x - 1)(x - 1)$ change de signe en 1 (et en $\frac{1}{3}$) : tangente horizontale **et** inflexion.

Exemple : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$: les points d'inflexion sont sur l'axe des abscisses

$f(x) = 1 - \frac{4}{x^2 + 3}$, $f'(x) = \frac{8x}{(x^2 + 3)^2}$, puis (on simplifie par $x^2 + 3$)

$$f''(x) = \frac{8(x^2 + 3) - 32x^2}{(x^2 + 3)^3} = \frac{24(1 - x^2)}{(x^2 + 3)^3}.$$

$f'' > 0$ sur $]-1, 1[$: convexe ; $f'' < 0$ si $|x| > 1$: concave. Les points d'inflexion $A(-1, 0)$ et $B(1, 0)$ sont **exactement** les points d'intersection avec (Ox) ! Tangente en B : $f'(1) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}(x - 1)$; en A : $y = -\frac{1}{2}(x + 1)$. Minimum $-\frac{1}{3}$ en 0, asymptote $y = 1$.



11

Plan d'étude : trois modèles**Méthode : le plan d'étude d'une fonction**

1. Domaine D_f (réduction : parité, périodicité). 2. Limites aux bornes. 3. Dérivabilité aux bornes fermées (demi-tangentes). 4. f' , son **signe** (factoriser !), tableau de variations. 5. Branches infinies, positions. 6. f'' : concavité, inflexions. 7. Points particuliers (axes, tangentes, symétries). 8. Tracé : asymptotes et tangentes d'abord, puis la courbe.

11.1 Un polynôme de degré 3

Exemple : $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 - 9x + 27) = \frac{1}{4}(x + 3)(x - 3)^2$ sur $\mathbb{R}$

1. Limites et branches. f a la limite de $\frac{1}{4}x^3$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\frac{f(x)}{x} \rightarrow +\infty$ (comme $\frac{x^2}{4}$) : **branches paraboliques** de direction (Oy) en $\pm\infty$.

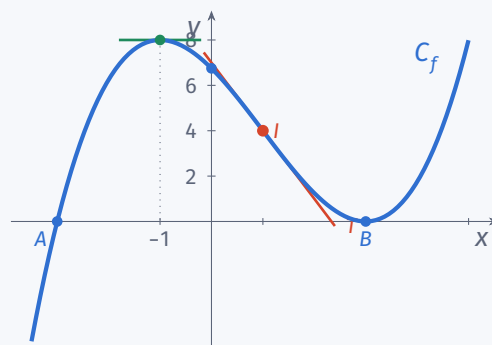
2. Variations. $f'(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 6x - 9) = \frac{3}{4}(x + 1)(x - 3)$: positive à l'extérieur des racines.
 $f(-1) = \frac{-1-3+9+27}{4} = 8$ (maximum local), $f(3) = 0$ (minimum local).

3. Inflexion et symétrie. $f''(x) = \frac{3}{2}(x-1)$: concave sur $]-\infty, 1]$, convexe sur $[1, +\infty[$, point d'inflexion $I(1, 4)$. En développant, $f(1+h) = 4 - 3h + \frac{h^3}{4}$, donc $f(1-h) + f(1+h) = 8$: **I est centre de symétrie** de C_f .

4. Tangente en I et points d'intersection. $f'(1) = -3$: $T : y = -3(x-1) + 4 = -3x + 7$, et $f(x) - (-3x + 7) = \frac{(x-1)^3}{4}$: la courbe traverse T en I . $f(x) = 0 \iff x = -3$ ou $x = 3$; en $B(3, 0)$, racine **double**, la courbe est **tangente** à (Ox) . $f(0) = \frac{27}{4}$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			8		0	$+\infty$
	$-\infty$					

max local 8 en -1 ; min local 0 en 3 ;
 $I(1, 4)$: inflexion et centre



11.2 Une fonction rationnelle à asymptote oblique

Exemple : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$ sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

1. Forme utile. Division euclidienne : $x^2 - 3x + 6 = (x-1)(x-2) + 4$, donc $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x-1}$.

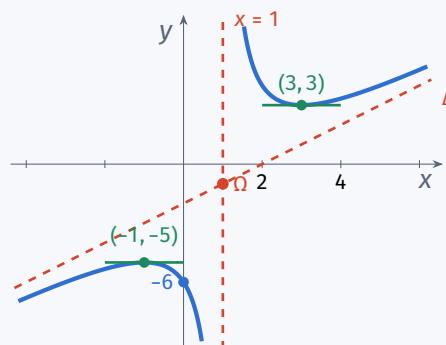
2. Limites et asymptotes. En $\pm\infty$: $f(x) \rightarrow \pm\infty$ et $f(x) - (x-2) = \frac{4}{x-1} \rightarrow 0$: $\Delta : y = x - 2$ asymptote oblique. En 1 : numérateur $\rightarrow 4 > 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$: $x = 1$ asymptote verticale. **Position :** $\frac{4}{x-1}$ a le signe de $x-1$: C_f est au-dessus de Δ sur $]1, +\infty[$, au-dessous sur $]-\infty, 1[$.

3. Variations. $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$. $f(-1) = -3 - 2 = -5$ (maximum local), $f(3) = 1 + 2 = 3$ (minimum local) : le maximum local est **plus petit** que le minimum local !

4. Symétrie, concavité, axes. $f(2-x) + f(x) = \left(-x + \frac{4}{1-x}\right) + \left(x - 2 + \frac{4}{x-1}\right) = -2$: $\Omega(1, -1)$, point commun aux deux asymptotes, est **centre de symétrie**. $f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$: concave sur $]-\infty, 1[$, convexe sur $]1, +\infty[$, **pas** de point d'inflexion ($1 \notin D_f$). $x^2 - 3x + 6$ a pour discriminant $-15 < 0$: la courbe ne coupe pas (Ox) ; $f(0) = -6$.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$			-5		
	$-\infty$		$-\infty$		
				$+\infty$	$+\infty$
				3	

$\Omega(1, -1)$: centre de symétrie



11.3 Une fonction irrationnelle à demi-tangente

Exemple : $f(x) = (x-3)\sqrt{x+1}$ sur $D_f = [-1, +\infty[$

1. Limite et branche. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{3}{x}\right)\sqrt{x+1} \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction (Oy).

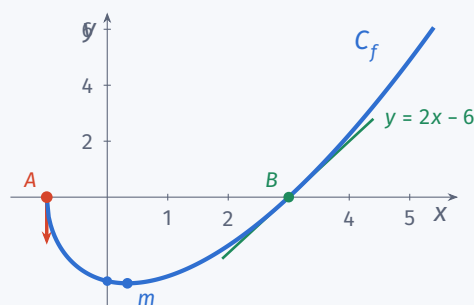
2. Dérivabilité en -1. Pour $x > -1$: $\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{(x-3)\sqrt{x+1}}{x+1} = \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} \frac{-4}{0^+} = -\infty$: f n'est **pas** dérivable à droite en -1 ; **demi-tangente verticale** en $A(-1, 0)$, dirigée vers le bas (car $f(x) < 0$ juste après -1).

3. Variations. Sur $] -1, +\infty[$: $f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x-3}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2(x+1) + x-3}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x+1}}$, du signe de $3x-1$. Minimum : $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{16}{3\sqrt{3}} = -\frac{16\sqrt{3}}{9} \approx -3,08$.

4. Concavité et points remarquables. $f''(x) = \frac{3x+7}{4(x+1)\sqrt{x+1}} > 0$: C_f est **convexe**. $f(x) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 3$; en $B(3, 0)$: $f'(3) = \frac{8}{4} = 2$, tangente $y = 2x - 6$. $f(0) = -3$.

x	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$ $	$-$	0	$+$
$f(x)$	0		$-\frac{16\sqrt{3}}{9}$	$+\infty$

double barre : f non dérivable en -1



12

Les pièges classiques

X Faux	✓ Vrai
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \infty$	$+\infty$ à droite, $-\infty$ à gauche : pas de limite en 2
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = 1$	$= 4 \times \frac{\sin 4x}{4x} \rightarrow 4$: il faut le même X en haut et en bas
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$	1 en 0 seulement ; en $+\infty$: $\left \frac{\sin x}{x} \right \leq \frac{1}{x}$, donc la limite vaut 0
$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$; $(\cos 3x)' = -\sin 3x$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $(\cos 3x)' = -3 \sin 3x$
dérivable à droite et à gauche en a , donc dérivable en a	il faut $f'_d(a) = f'_g(a)$: $x x-2 $ en 2 (pentes 2 et -2)
$f'(a) = 0$, donc $f(a)$ est un extremum	il faut que f' change de signe : $3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ en 1 (section 8)

$f' < 0$ sur D_f , donc f est décroissante sur D_f	seulement sur chaque intervalle : $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$, mais $-1 < \frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$
$\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$, donc $y = x$ est asymptote	il faut aussi $f(x) - x \rightarrow b \in \mathbb{R}$; $x - \sqrt{x} : f(x) - x \rightarrow -\infty$ (branche parabolique)
une courbe ne coupe jamais son asymptote	la courbe de $2x - 1 + \frac{4-2x}{x^2+1}$ coupe son asymptote $y = 2x - 1$ en $(2, 3)$ (section 13)
$f''(a) = 0$, donc point d'inflexion	il faut un changement de signe : x^4 en 0 ($f''(0) = 0$, courbe convexe)

13

Les astuces des concours

★ Astuce de concours : l'asymptote oblique par la division

Si $\deg P = \deg Q + 1$, la division euclidienne $P = Q \times (ax + b) + R$ ($\deg R < \deg Q$) donne $\frac{P}{Q} = ax + b + \frac{R}{Q}$ avec $\frac{R}{Q} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: **l'asymptote est le quotient**, la position est le signe de $\frac{R}{Q}$.

Exemple : $2x^3 - x^2 + 3 = (x^2 + 1)(2x - 1) + (4 - 2x)$, donc $\frac{2x^3 - x^2 + 3}{x^2 + 1} = 2x - 1 + \frac{4 - 2x}{x^2 + 1}$: asymptote $y = 2x - 1$ en $\pm\infty$; la courbe est au-dessus pour $x < 2$, au-dessous pour $x > 2$, et coupe l'asymptote en $(2, 3)$.

★ Astuce de concours : le centre d'une cubique en 5 secondes, contrôlé par $f(2a - x) + f(x) = 2b$

Toute fonction $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) a un centre de symétrie : son point d'inflexion, d'abscisse $x_0 = -\frac{b}{3a}$ (zéro de $f''(x) = 6ax + 2b$). En effet $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + ah^3$ (le terme en h^2 vaut $(3ax_0 + b)h^2 = 0$) : $f(x_0 + h) - f(x_0)$ est impaire en h .

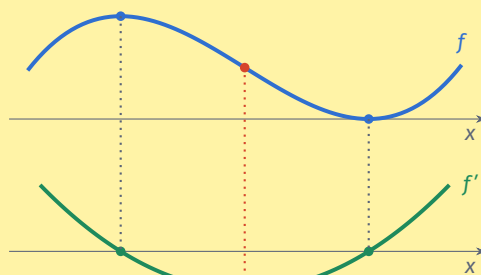
Exemple : $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x + 5$: $x_0 = -\frac{-6}{6} = 1$, $f(1) = 2$: centre $\Omega(1, 2)$, c'est-à-dire $f(2 - x) + f(x) = 4$ pour tout réel x .

★ Astuce de concours : lire f' sur la courbe de f

$f'(a)$ est la **pente** de la tangente en a : f croît $\Leftrightarrow f' \geq 0$; tangente horizontale $\Leftrightarrow f'(a) = 0$; point d'inflexion $\Leftrightarrow$ **extremum de f'** .

Ci-contre, la cubique de 11.1 et sa dérivée $f'(x) = \frac{3}{4}(x + 1)(x - 3)$: les zéros de f' (-1 et 3) sont les abscisses des extremums de f ; le minimum de f' , $f'(1) = -3$, est la pente de la tangente en I , **la plus raide en descente**.

Réflexe : pour reconnaître la courbe de f' parmi plusieurs, regarder où f a des tangentes horizontales.



★ **Astuce de concours : compter les solutions de $f(x) = m$ sur le tableau**

Les solutions de $f(x) = m$ sont les abscisses des points communs à C_f et à la droite horizontale $y = m$: on les **compte** en faisant glisser cette droite sur le tableau de variations (la justification complète utilise un théorème de 2^e Bac). **Attention aux bornes atteintes.** Avec $f(x) = (x-3)\sqrt{x+1}$ (11.3, minimum $\mu = -\frac{16\sqrt{3}}{9}$) : $m < \mu$: 0 solution ; $m = \mu$: 1 ; $\mu < m \leq 0$: 2 (pour $m = 0$: -1 et 3, car $f(-1) = 0$ est atteint) ; $m > 0$: 1.

Exemple : $(x-3)\sqrt{x+1} = -2$: $\mu \approx -3,08 < -2 \leq 0$, donc **deux** solutions ; comme $f(0) = -3$, $f(1) = -2\sqrt{2} \approx -2,83$ et $f(2) = -\sqrt{3} \approx -1,73$, l'une est dans $]-1, 0[$, l'autre dans $]1, 2[$.

★ **Astuce de concours : tangentes issues d'un point : l'inconnue est l'abscisse de contact**

Pour $f(x) = x^2$, la tangente en a est $y = 2ax - a^2$. Elle passe par $P(1, -15) \iff -15 = 2a - a^2 \iff a^2 - 2a - 15 = 0 \iff a \in \{5, -3\}$: **deux** tangentes, $y = 10x - 25$ et $y = -6x - 9$. Le nombre de tangentes issues de P est le nombre de solutions de l'équation en a .

★ **Astuce de concours : une limite cache un nombre dérivé**

Si $f(a)$ est connu, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$: aucun calcul de forme indéterminée ! Ainsi

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^7 + 1}{x + 1} = 7(-1)^6 = 7$ (nombre dérivé de x^7 en -1), et la limite 3 de la section 4 est le nombre dérivé de $x \mapsto \sqrt{x+5}$ en 4 : $\frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$. De même :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{2}.$$

★ **Astuce de concours : racine double = tangence ; test de la dérivée seconde**

Tangence. La droite $y = mx + p$ est tangente en x_0 à la courbe d'un polynôme $P \iff x_0$ est racine **au moins double** de $P(x) - (mx + p)$. En 11.1 : $f(x) = \frac{1}{4}(x+3)(x-3)^2$ ((Ox) tangente en B) et $f(x) - (-3x+7) = \frac{1}{4}(x-1)^3$ (racine triple : tangente d'inflexion en I).

Dérivée seconde. Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$: minimum local ; si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$: maximum local. En 11.1 : $f''(-1) = -3 < 0$ (maximum), $f''(3) = 3 > 0$ (minimum). Si $f''(a) = 0$, le test ne conclut pas (section 8, en 1).

14

Exercices de la partie 2

Notations du cours : D_f domaine, C_f courbe dans un repère orthonormé, $f'_a(a)$ et $f'_g(a)$ nombres dérivés à droite et à gauche ; AV, AH, AO : asymptotes verticale, horizontale, oblique ; BP : branche parabolique.

■ 14.1 Niveau 1 • Automatismes

Exercice 17 Polynômes et fractions : les formes indéterminées ★

corrigé p. 54

Calculer les limites suivantes, en nommant chaque fois la forme indéterminée levée.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4x^2 - 1}{2x - 5x^3} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - x^5 + 1) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 3x - 4}$$

e) Limites de $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$ à gauche et à droite de 1, puis de 2. Interprétation graphique ?

f) Déterminer les réels a et b tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax^2 + bx + 1}{x - 1} - 2x \right) = 3$.

Exercice 18 Conjugué, trigonométrie, comparaison ★

corrigé p. 54

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x) \quad & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 3} + 2x) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x + 21} - 5}{x - 4} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sqrt{x + 1} - 1} \quad & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{4x - \pi} \text{ (reconnaître un nombre dérivé)} \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x \cos x) \text{ (minorer).} \end{aligned}$$

Exercice 19 Dérivées en série ★

corrigé p. 54

Pour chaque fonction, donner l'ensemble où elle est dérivable et calculer sa dérivée (forme factorisée).

$$\text{a) } f_1(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{2}{x} \quad \text{b) } f_2(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}, \text{ puis } f_2''(x) \quad \text{c) } f_3(x) = (x^2 + 4x + 7)^3 \quad \text{d) } f_4(x) = (x - 1)\sqrt{x}$$

$$\text{e) } f_5(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 20} \quad \text{f) } f_6(x) = \sin^2 x \cos x \quad \text{g) } f_7(x) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Écrire enfin l'équation de la tangente à C_{f_4} au point d'abscisse 1 ; f_4 est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 20 Nombre dérivé, tangentes, approximation affine ★

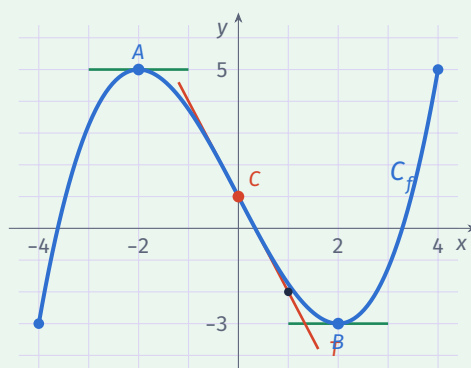
corrigé p. 55

- Soit $f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$. En revenant à la définition, montrer que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$. Équation de la tangente en ce point ?
- Déterminer les points de la courbe de $g(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ où la tangente est parallèle à la droite $y = 9x$; écrire ces tangentes.
- Déterminer les réels a, b pour que la courbe de $h(x) = ax^2 + bx$ passe par $A(1, 3)$ avec une tangente en A de coefficient directeur 1.
- Donner l'approximation affine de $\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right)$ pour t proche de 0. En déduire une valeur approchée de $\sin 29^\circ$ et la comparer à celle de la calculatrice.

Exercice 21 Lire une courbe ★

corrigé p. 55

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f dérivable sur $[-4, 4]$; les tangentes en A et en B sont horizontales et la tangente T en C(0, 1) passe par le point (1, -2).



1. Lire $f(-2)$, $f(2)$, $f'(-2)$, $f'(2)$ et $f'(0)$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $[-4, 4]$. Quels sont ses extremums, et où sont-ils atteints ?
3. Lire le nombre de solutions dans $[-4, 4]$ des équations $f(x) = 0$, $f(x) = 5$, $f(x) = -4$.
4. On admet que $f(x) = ax^3 + bx + c$. Trouver a , b , c à l'aide de $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(2)$; vérifier $f(-2)$.
5. Montrer que C est un centre de symétrie et un point d'inflexion de C_f .
6. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \leq 1$ sur $[-4, 4]$; contrôler sur la figure.

Exercice 22 Branches infinies et demi-tangentes ★

corrigé p. 55

1. Étudier les limites aux bornes du domaine et la nature des branches infinies des courbes de :
 a) $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 4}$; b) $g(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ (écrire $g(x) = x + p + \frac{q}{x-2}$; position de la courbe et de l'asymptote) ;
 c) $h(x) = 2x - \sqrt{x+1}$ en $+\infty$; d) $k(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$; e) $p(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 1}$.
 2. a) $u(x) = x^2\sqrt{4-x}$ est-elle dérivable à gauche en 4 ? b) Étudier la dérivabilité en 1 de $v(x) = |x^3 - x|$; donner les équations des demi-tangentes. Interpréter.

14.2 Niveau 2 · Bac**Exercice 23 Type devoir surveillé (1) : une rationnelle à asymptote oblique** ★★

corrigé p. 56

Soit $f(x) = x + \frac{4}{(x-1)^2}$ sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Calculer les limites aux bornes de D_f . Montrer que $\Delta : y = x$ est asymptote à C_f en $\pm\infty$ et préciser leur position.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{(x-3)(x^2+3)}{(x-1)^3}$ (factoriser $a^3 - 8$ avec $a = x - 1$). Dresser le tableau de variations de f .
3. Calculer $f''(x)$ et en déduire la concavité de C_f .
4. Vérifier que $x^3 - 2x^2 + x + 4 = (x+1)(x^2 - 3x + 4)$; en déduire les points d'intersection de C_f avec les axes, puis la tangente en A(-1, 0).
5. Résoudre l'équation $f(x) = 4$. Que représente la droite $y = 4$ pour C_f ?
6. Tracer Δ , la tangente en A et C_f , puis discuter graphiquement, suivant m , le nombre de solutions de $f(x) = m$.

Exercice 24 Type devoir surveillé (2) : une irrationnelle avec demi-tangente ★★ corrigé p. 56

Soit $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$ sur $[0, +\infty[$.

1. Vérifier que $f(x) = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)$; résoudre $f(x) = 0$ et étudier le signe de $f(x)$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$. Nature de la branche infinie ?
3. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement.
4. Montrer que $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de f .
5. Retrouver ces variations en écrivant $f = g \circ u$, avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $g(t) = t^2 - 4t + 3$.
6. Étudier la concavité de C_f . Écrire les tangentes T_1 et T_9 aux points d'abscisses 1 et 9 ; montrer qu'elles se coupent en $(3, -2)$. Tracer C_f .
7. Discuter suivant m le nombre de solutions de $f(x) = m$ (poser $t = \sqrt{x}$).

Exercice 25 Type devoir surveillé (3) : une fonction trigonométrique ★★ corrigé p. 57

Soit $f(x) = \tan x - 8 \sin x$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. Étudier la parité de f ; on étudie f sur $J = [0, \frac{\pi}{2}[$. Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ et interpréter.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{1 - 8 \cos^3 x}{\cos^2 x}$ et que $1 - 8 \cos^3 x = (1 - 2 \cos x)(1 + 2 \cos x + 4 \cos^2 x)$. Dresser le tableau de variations de f sur J .
3. Montrer que $f''(x) = \frac{2 \sin x (1 + 4 \cos^3 x)}{\cos^3 x}$; en déduire que O est un point d'inflexion et donner la tangente T en O .
4. Soit $\varphi(x) = f(x) + 7x$. Montrer que $\varphi'(x) = \frac{(1 - \cos x)(8 \cos^2 x + \cos x + 1)}{\cos^2 x}$; en déduire la position de C_f et de T sur I .
5. Résoudre $f(x) = 0$ dans I (on note α le réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos \alpha = \frac{1}{8}$), puis tracer C_f .

Exercice 26 Composer $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \sqrt{x+1}$ ★★ corrigé p. 58

On pose $u(x) = x^3$, $v(x) = \sqrt{x+1}$, $h = v \circ u$ et $k = u \circ v$.

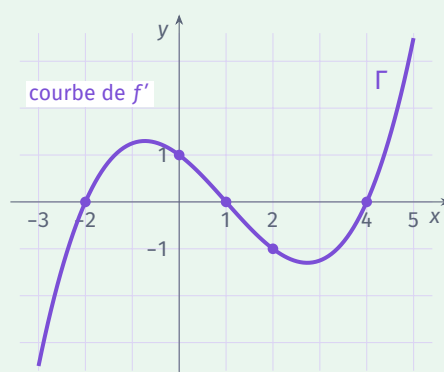
1. Expliciter $h(x)$ et $k(x)$; montrer que $D_h = D_k = [-1, +\infty[$. Sans dériver, montrer que h et k sont croissantes.
2. Étudier la dérivabilité de h et de k à droite en -1 ; interpréter graphiquement.
3. Calculer $h'(x)$, puis vérifier que $h''(x) = \frac{3x(x^3 + 4)}{4(x^3 + 1)\sqrt{x^3 + 1}}$ sur $] -1, +\infty[$. Que dire du point $(0, 1)$?
4. Résoudre l'inéquation $h(x) \leq x + 1$; en déduire la position de C_h et de la droite $D : y = x + 1$.
5. Comparer $h(x)$ et $k(x)$ (calculer $h(x)^2 - k(x)^2$), puis tracer D , C_h et C_k dans un même repère.

Exercice 27 Lire la courbe de f' ★★

corrigé p. 58

Une fonction f est deux fois dérivable sur $[-3, 5]$. On donne ci-contre la courbe Γ de sa **dérivée** f' : elle passe par les points $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, -1)$ et $(4, 0)$.

1. Lire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f (sans les valeurs). Extremums ?
2. Les tangentes à C_f aux points d'abscisses 0 et 2 sont-elles perpendiculaires ?
3. Sur quels intervalles f' est-elle croissante ? En déduire la concavité de C_f et le nombre de points d'inflexion (abscisses $\alpha < \beta$ lues approximativement).
4. Vrai ou faux ? a) $f(0) < f(1)$; b) C_f a une tangente horizontale en un point d'inflexion ; c) on peut comparer $f(-2)$ et $f(4)$ avec la seule figure.
5. On admet que $f(x) = \frac{1}{32}(x^2 - 2x - 8)^2$. a) Retrouver $f'(x)$; calculer $f(-2)$, $f(1)$, $f(4)$ et montrer que la droite $x = 1$ est un axe de symétrie de C_f . b) Calculer les abscisses exactes α , β des points d'inflexion et montrer que les tangentes en ces points se coupent sur l'axe de symétrie.



Exercice 28 Un tableau de variations, des composées ★★

corrigé p. 59

Une fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$, a le tableau de variations ci-contre (avec $f(0) = \frac{1}{3}$).

1. Montrer que f est bornée ; donner son maximum et son minimum.
2. Comparer, si possible, $f(\sqrt{2})$ et $f(\sqrt{3})$, puis $f(-3)$ et $f(5)$.
3. Soit $g(x) = f(x^2)$. Étudier la parité de g , ses variations sur $[0, +\infty[$ (composée), puis montrer que $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq \frac{4}{3}$.
4. Soit $k(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$. Dresser son tableau de variations (limites comprises).
5. On admet que $f(x) = \frac{(x+a)^2}{x^2+b}$ ($b > 0$). Trouver a et b , vérifier $f(0) = \frac{1}{3}$, résoudre $f(x) = 1$ et étudier la position de C_f par rapport à la droite $y = 1$.
6. Soit $\varphi(x) = \sqrt{f(x)}$. Justifier que φ est définie sur $\mathbb{R}$, écrire $\varphi(x) = \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+3}}$ et étudier la dérivabilité de φ en -1 .

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	1		0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1

■ **14.3 Niveau 3 · Approfondissement**

Exercice 29 Un demi-cercle et une hyperbole ★★★

corrigé p. 59

Soit $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4x|}$.

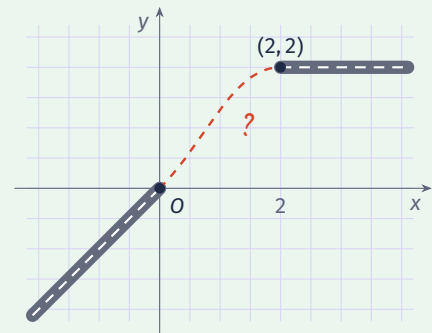
1. Montrer que $D_f = \mathbb{R}$ et que $f(4-x) = f(x)$; interpréter.
2. a) Pour $x \in [0, 4]$, montrer que le point $M(x, f(x))$ est sur le cercle de rayon 2 et de centre $\Omega(2, 0)$.
b) Pour $x \notin]0, 4[$, montrer que $(x-2)^2 - f(x)^2 = 4$.
3. Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0 ; interpréter (que se passe-t-il en $(4, 0)$?).

- Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 4[$, $]4, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de f .
- Montrer que les droites $y = x - 2$ et $y = -x + 2$ sont asymptotes à C_f (en $+\infty$ et en $-\infty$) et que C_f est au-dessous.
- Tracer C_f . Discuter suivant m le nombre de solutions de $f(x) = m$, graphiquement puis par le calcul.

Exercice 30 Raccorder deux routes ★★★

corrigé p. 60

Une route suit la droite $y = x$ pour $x \leq 0$, une autre la droite $y = 2$ pour $x \geq 2$ (unité : l'hectomètre). On les raccorde, pour $0 \leq x \leq 2$, par la courbe d'un polynôme P , et l'on note f la fonction égale à x sur $]-\infty, 0]$, à $P(x)$ sur $[0, 2]$ et à 2 sur $[2, +\infty[$.

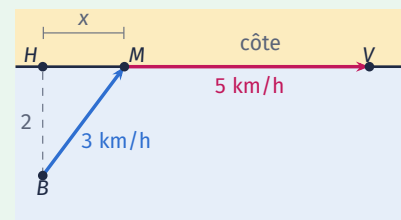


- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (raccord « sans cassure ») si et seulement si $P(0) = 0$, $P'(0) = 1$, $P(2) = 2$ et $P'(2) = 0$.
- Montrer qu'aucun polynôme de degré au plus 2 ne convient, puis déterminer l'unique polynôme P de degré 3 qui convient.
- Étudier les variations de f et la concavité de l'arc de raccord. En quel point la pente de la route est-elle maximale ?
- Montrer que $x \leq P(x) \leq 2$ pour $x \in [0, 2]$: le raccord reste dans l'angle formé par les deux routes prolongées.
- La fonction f' est-elle dérivable en 0 ? en 2 ? (Un conducteur ressent-il un « à-coup » de volant ?)

Exercice 31 Ramer puis marcher ★★★

corrigé p. 60

Une barque est en B , à 2 km d'une côte rectiligne ; H est le projeté orthogonal de B sur la côte et le village V est sur la côte, à 6 km de H . Le pêcheur rame à 3 km/h jusqu'à un point M de $[HV]$, avec $HM = x$, puis marche à 5 km/h jusqu'à V .



- Montrer que la durée du trajet est $T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{3} + \frac{6 - x}{5}$, $x \in [0, 6]$.
- Montrer que $T'(x)$ a le signe de $5x - 3\sqrt{x^2 + 4}$; en déduire que T est minimale pour $x_0 = \frac{3}{2}$. Durée minimale en heures et minutes ? Comparer avec les trajets $B \rightarrow V$ et $B \rightarrow H \rightarrow V$.
- Montrer qu'au point optimal, $\sin \widehat{HBM} = \frac{3}{5}$ (le rapport des deux vitesses).
- Le village est maintenant à d km de H ($d > 0$). Suivant d , où le pêcheur doit-il accoster ?
- On revient à $d = 6$, mais le pêcheur marche à v km/h. Montrer que, si $v > 3$, T' s'annule en $x_v = \frac{6}{\sqrt{v^2 - 9}}$, puis qu'il doit ramer directement vers V si et seulement si $v \leq \sqrt{10}$.

Exercice 32 Le produit $\tan x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ ★★★

corrigé p. 61

Soit $f(x) = \tan x \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

- Déterminer D_f ; montrer que f est périodique de période π et que $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = f(x)$. Interpréter.
- On étudie f sur $E = \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que $f(x) = g(\tan x)$, où $g(t) = \frac{t(1-t)}{1+t}$.
- Étudier g (limites, variations) sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.
- a) À l'aide de $\tan \frac{\pi}{4} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}$, montrer que $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$; en déduire $\tan\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$.
b) Dresser le tableau de variations de f sur E ; préciser les extremums et les asymptotes.
- Autre méthode : montrer que $f(x) = \frac{c - \frac{\sqrt{2}}{2}}{c + \frac{\sqrt{2}}{2}}$ avec $c = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, et retrouver le maximum de f sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Application : si $a, b \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $a + b = \frac{\pi}{4}$, montrer que $\tan a \tan b \leq 3 - 2\sqrt{2}$. Cas d'égalité ?

■ 14.4 Niveau 4 • Concours

Exercice 33 Nombre de solutions selon un paramètre ★★★

corrigé p. 61

Pour m réel, on considère l'équation (E_m) : $\cos 2x = m(1 + \sin x)$, d'inconnue $x \in [0, 2\pi[$.

- Montrer que $\frac{3\pi}{2}$ n'est jamais solution, puis que, pour $x \neq \frac{3\pi}{2}$, $(E_m) \iff g(\sin x) = m$, où $g(t) = \frac{1 - 2t^2}{1 + t}$.
- Étudier g sur $]-1, 1]$. Pour $t \in]-1, 1]$, combien l'équation $\sin x = t$ a-t-elle de solutions dans $[0, 2\pi[$?
- En déduire, suivant m , le nombre de solutions de (E_m) ; résoudre complètement $(E_{-\frac{1}{2}})$.
- Retrouver le seuil $4 - 2\sqrt{2}$ à l'aide du discriminant de $2t^2 + mt + m - 1 = 0$ et expliquer le rôle de la valeur $4 + 2\sqrt{2}$.

Exercice 34 Une famille de courbes ★★★

corrigé p. 62

Pour m réel, soit $f_m(x) = \frac{x^2 - mx + m}{x - 2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et C_m sa courbe.

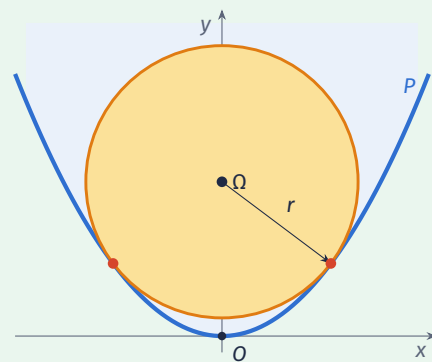
- Montrer que toutes les courbes C_m passent par un même point A. Que vaut f_4 ?
- On suppose $m \neq 4$. Écrire $f_m(x) = x + p + \frac{q}{x-2}$, donner les asymptotes et montrer que leur point commun Ω_m est centre de symétrie de C_m .
- Montrer que $f'_m(x) = \frac{x^2 - 4x + m}{(x - 2)^2}$ et discuter, suivant m , l'existence d'extremums.
- Si $f'_m(x_0) = 0$, montrer que $f_m(x_0) = 2x_0 - m = x_0^2 - 2x_0$. En déduire l'ensemble L des points où une courbe C_m admet un extremum (où sont les maximums ? les minimums ?). Quel rôle joue A ?
- Quelle courbe C_m est tangente à l'axe des abscisses ?
- Montrer que deux courbes distinctes C_m, C_p n'ont que A en commun, préciser leur position relative, puis montrer que par tout point $M(x_0, y_0)$ tel que $x_0 \notin \{1, 2\}$ passe une et une seule courbe C_m .

Exercice 35 La bille dans le verre ★★★★★

corrigé p. 63

Le profil d'un verre est la parabole $P : y = \frac{x^2}{6}$ (unité : le cm). On y pose une bille de rayon r ; par symétrie, son centre est un point $\Omega(0, a)$ de l'axe, $a > 0$.

1. Pour $M(x, \frac{x^2}{6}) \in P$, montrer que $\Omega M^2 = \varphi(x^2)$, avec $\varphi(X) = \frac{X^2}{36} + (1 - \frac{a}{3})X + a^2$.
2. En déduire la distance minimale $d(a)$ de Ω à P : $d(a) = a$ si $a \leq 3$, et $d(a) = \sqrt{6a - 9}$ si $a > 3$.
3. La bille repose sur le verre lorsque $d(a) = r$. Montrer qu'elle touche le fond si et seulement si $r \leq 3$; sinon, qu'elle touche le verre en deux points d'abscisses $\pm\sqrt{r^2 - 9}$, que $a = \frac{r^2 + 9}{6}$ et que le vide sous la bille a pour hauteur $\frac{(r-3)^2}{6}$.
4. Cas $r = 5$ (figure) : calculer a , les points de contact et la hauteur du vide ; vérifier qu'en un point de contact M , la droite (ΩM) est perpendiculaire à la tangente à P . Quelle hauteur minimale le verre doit-il avoir pour contenir entièrement cette bille ?

**Exercice 36 Tangentes issues d'un point ★★★★★**

corrigé p. 63

Soit $f(x) = x + \frac{3}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$; sa courbe C a pour asymptotes les droites $x = 0$ et $y = x$.

1. Pour $t \neq 0$, montrer que la tangente T_t à C au point d'abscisse t a pour équation $y = (1 - \frac{3}{t^2})x + \frac{6}{t}$, et que deux tangentes T_t, T_s ($t \neq s$) sont distinctes.
2. Soit $P(\alpha, \beta)$ un point du plan. Montrer que T_t passe par P si et seulement si $(\beta - \alpha)t^2 - 6t + 3\alpha = 0$ ($t \neq 0$).
3. Combien de tangentes à C passent par P lorsque : a) $P = O$; b) $P \neq O$ est sur une asymptote ; c) $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq \alpha$? Dans le cas c), montrer qu'il y en a 2, 1 ou 0 selon que $\alpha(\beta - \alpha)$ est < 3 , $= 3$ ou > 3 , et interpréter avec la position de P par rapport à C .
4. On suppose $\alpha \neq 0$, $\beta \neq \alpha$ et $\alpha(\beta - \alpha) < 3$. En posant $u = \frac{1}{t}$, montrer que les deux tangentes issues de P sont perpendiculaires si et seulement si $\alpha^2 + \beta^2 = 12$.
5. Montrer que tout point du cercle $\Gamma : x^2 + y^2 = 12$ vérifie $\alpha(\beta - \alpha) < 3$. Quel est l'ensemble des points d'où l'on peut mener à C deux tangentes perpendiculaires ? Vérifier sur les tangentes T_1 et $T_{\sqrt{6}}$.

15

Corrigés de la partie 2

■ Corrigé de l'exercice 17

a) **F.I.** $\frac{\infty}{\infty}$: on factorise les termes de plus haut degré : $\frac{x^3 \left(1 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(-5 + \frac{2}{x^2}\right)} \rightarrow \boxed{-\frac{1}{5}}$. b) **F.I.** $\infty - \infty$:

$3x^2 - x^5 + 1 = -x^5 \left(1 - \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^5}\right)$ et $-x^5 \rightarrow +\infty$ en $-\infty$: $\boxed{+\infty}$.

c) **F.I.** $\frac{0}{0}$: $\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+3}{x-2} \rightarrow \boxed{-\frac{1}{4}}$. d) **F.I.** $\frac{0}{0}$: $x^3+x-2 = (x-1)(x^2+x+2)$ et $x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$,

d'où $\frac{x^2+x+2}{x+4} \rightarrow \boxed{\frac{4}{5}}$.

e) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ est positif hors de $[1, 2]$, négatif sur $]1, 2[$, et $x^2 + 1 \geq 1$: $\lim_{1^-} f = +\infty$, $\lim_{1^+} f = -\infty$, $\lim_{2^-} f = -\infty$, $\lim_{2^+} f = +\infty$: **deux asymptotes verticales $x = 1$ et $x = 2$** .

f) $\frac{ax^2+bx+1}{x-1} - 2x = \frac{(a-2)x^2 + (b+2)x + 1}{x-1}$. Si $a \neq 2$, cette expression se comporte comme $(a-2)x$: limite infinie. Donc $a = 2$, puis $\frac{(b+2)x+1}{x-1} \rightarrow b+2 = 3$: $\boxed{a = 2, b = 1}$.

■ Corrigé de l'exercice 18

a) Conjugué ($x > 0$) : $\frac{6x}{\sqrt{x^2+6x}+x} = \frac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1} \rightarrow \boxed{3}$. b) Pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$: $\sqrt{4x^2-x+3}+2x =$

$\frac{-x+3}{\sqrt{4x^2-x+3}-2x} = \frac{1-\frac{3}{x}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+2} \rightarrow \boxed{\frac{1}{4}}$ (on a divisé par $-x > 0$).

c) $\frac{(x+21)-25}{(x-4)(\sqrt{x+21}+5)} = \frac{1}{\sqrt{x+21}+5} \rightarrow \boxed{\frac{1}{10}}$. d) $\frac{1-\cos x}{\sin^2 2x} = \frac{1-\cos x}{x^2} \left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2 \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{8}}$.

e) $\frac{\sin 6x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{\sin 6x(\sqrt{x+1}+1)}{x} = 6 \frac{\sin 6x}{6x} (\sqrt{x+1}+1) \rightarrow 6 \times 1 \times 2 = \boxed{12}$. f) $\frac{\tan x - 1}{4x - \pi} = \frac{1}{4}$.
 $\frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} \rightarrow \frac{1}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$.

g) Pour $x > 0$: $-3x \cos x \geq -3x$, donc $x^2 - 3x \cos x \geq x^2 - 3x = x(x-3) \rightarrow +\infty$: par comparaison, $\boxed{+\infty}$.

■ Corrigé de l'exercice 19

a) Sur $\mathbb{R}^*$: $f'_1(x) = \frac{4x^3 - 6x - \frac{2}{x^2}}{x^2}$. b) Sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$: $f'_2(x) = \frac{2(x+3) - (2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}$ et, avec $\left(\frac{1}{u^2}\right)' = -\frac{2u'}{u^3}$: $f''_2(x) = -\frac{14}{(x+3)^3}$.

c) Sur $\mathbb{R}$: $3(2x+4)(x^2+4x+7)^2 = \boxed{6(x+2)(x^2+4x+7)^2}$. d) Sur $]0, +\infty[$: $f'_4(x) = \sqrt{x} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}}$

; $f_4(1) = 0$, $f'_4(1) = 1$: tangente $\boxed{y = x - 1}$. En 0 : $\frac{f_4(x)-f_4(0)}{x} = \frac{x-1}{\sqrt{x}} \rightarrow -\infty$: **pas dérivable** à droite (demi-tangente verticale).

e) $x^2 + 8x + 20 = (x+4)^2 + 4 > 0$: dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'_5(x) = \frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x+20}} = \boxed{\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x+20}}}$. f) Sur $\mathbb{R}$:

$$2 \sin x \cos x \cdot \cos x - \sin^2 x \cdot \sin x = \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) = \boxed{\sin x (3 \cos^2 x - 1)}.$$

g) Dérivable si $2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, soit $x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) : $f'_7(x) = \boxed{2 \left(1 + \tan^2 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \right)}$ (règle $f(ax+b)$).

■ Corrigé de l'exercice 20

1. $f(1) = \frac{1}{2}$ et $\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x-1} = \frac{2(3x-2) - (x+1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{5}{2(x+1)} \rightarrow \frac{5}{4}$: f est dérivable en 1, $f'(1) = \frac{5}{4}$,
tangente $y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}$.

2. $g'(x) = 3x^2 + 6x = 9 \iff x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -3$. $g(1) = -1$: $y = 9x - 10$;
 $g(-3) = -5$: $y = 9x + 22$.

3. $h(1) = a + b = 3$ et $h'(1) = 2a + b = 1$: $a = -2, b = 5$, $h(x) = -2x^2 + 5x$.

4. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right) \approx \sin \frac{\pi}{6} + t \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}t$. Avec $29^\circ = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}$: $\sin 29^\circ \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{360} \approx \boxed{0,48488}$; la calculatrice donne 0,48481 : erreur inférieure à 10^{-4} .

■ Corrigé de l'exercice 21

1. $f(-2) = 5, f(2) = -3, f'(-2) = f'(2) = 0$ (tangentes horizontales) ; $f'(0)$ est la pente de T : $\frac{-2-1}{1-0} = \boxed{-3}$.

2. Maximum 5, atteint en -2 et en 4 ; minimum -3, atteint en -4 et en 2 (tableau ci-contre).

3. $f(x) = 0$: 3 solutions (une dans chacun des intervalles $]-4, -2[,]-2, 2[,]2, 4[$) ; $f(x) = 5$: 2 ($x = -2$ et $x = 4$) ;
 $f(x) = -4$: aucune.

x	-4	-2	2	4
f'(x)	+	0	-	0
f(x)	-3	5	-3	5

4. $f(0) = c = 1$; $f'(x) = 3ax^2 + b, f'(0) = b = -3$; $f'(2) = 12a - 3 = 0$: $a = \frac{1}{4}, b = -3, c = 1$. Contrôle : $f(-2) = -2 + 6 + 1 = 5$ ✓.

5. $f(-x) + f(x) = 2 = 2 \times 1$: $C(0, 1)$ est centre de symétrie. $f''(x) = \frac{3}{2}x$ change de signe en 0 : C est un point d'inflexion.

6. $f(x) \leq 1 \iff \frac{x^3}{4} - 3x \leq 0 \iff \frac{x(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{4} \leq 0$: $S = \boxed{[-4, -2\sqrt{3}] \cup [0, 2\sqrt{3}]}$ ($2\sqrt{3} \approx 3,46$, conforme à la figure).

■ Corrigé de l'exercice 22

1. a) En $\pm\infty, f(x) \rightarrow 3$ (rapport des termes dominants) : AH $y = 3$. Le numérateur est ≥ 1 et $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f = +\infty, \lim_{x \rightarrow -2^-} f = +\infty, \lim_{x \rightarrow -2^+} f = -\infty$: AV $x = 2$ et $x = -2$.

b) $x^2 - x - 1 = (x-2)(x+1) + 1$, donc $g(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2}$: AO $y = x + 1$ en $\pm\infty$; $g(x) - (x+1) = \frac{1}{x-2}$:
courbe au-dessous de l'asymptote sur $]-\infty, 2[$, au-dessus sur $]2, +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow 2^-} g = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} g = +\infty$: AV $x = 2$.

c) $\frac{\sqrt{x+1}}{x} \rightarrow 0$, donc $h(x) = x \left(2 - \frac{\sqrt{x+1}}{x} \right) \rightarrow +\infty, \frac{h(x)}{x} \rightarrow 2$ et $h(x) - 2x = -\sqrt{x+1} \rightarrow -\infty$: BP de direction la droite $y = 2x$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} k = +\infty$: AV $x = 0$. $k(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$ et $\frac{k(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \rightarrow 0$: BP de direction (Ox).

e) $p(x)$ se comporte comme x^2 : $\rightarrow +\infty$ en $\pm\infty$, et $\frac{p(x)}{x} = \frac{x^3+1}{x^2-x} \rightarrow \pm\infty$: **BP de direction** (Oy).
 Numérateur $\rightarrow 2$ en 1 : $\lim_{1^+} p = +\infty$, $\lim_{1^-} p = -\infty$: AV $x = 1$.

2. a) $\frac{u(x) - u(4)}{x - 4} = \frac{x^2\sqrt{4-x}}{x-4} = -\frac{x^2}{\sqrt{4-x}} \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 4^-$: u n'est pas dérivable à gauche en 4 ;
demi-tangente verticale en $(4, 0)$.

b) $v(1) = 0$. Sur $]0, 1[$, $x^3 - x < 0$: $\frac{v(x)}{x-1} = \frac{x-x^3}{x-1} = -x(x+1) \rightarrow -2$; sur $]1, +\infty[$: $\frac{v(x)}{x-1} = x(x+1) \rightarrow 2$.
 $v'_g(1) = -2 \neq v'_d(1) = 2$: v n'est pas dérivable en 1 ; demi-tangentes $y = -2(x-1)$ ($x \leq 1$) et
 $y = 2(x-1)$ ($x \geq 1$) : **point anguleux** $(1, 0)$.

■ Corrigé de l'exercice 23

1. En $\pm\infty$: $\frac{4}{(x-1)^2} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow \pm\infty$; en 1 : $\frac{4}{(x-1)^2} \rightarrow +\infty$, $\lim_1 f = +\infty$ (des deux côtés) : AV $x = 1$.
 $f(x) - x = \frac{4}{(x-1)^2} \rightarrow 0$ et > 0 : **Δ : $y = x$ asymptote**, C_f toujours au-dessus.

2. $f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{a^3-8}{a^3}$ avec $a = x-1$; $a^3 - 8 = (a-2)(a^2+2a+4)$ et $a^2+2a+4 = x^2+3$:

$$f'(x) = \frac{(x-3)(x^2+3)}{(x-1)^3}, \text{ du signe de } \frac{x-3}{x-1}. \quad f(3) = 4.$$

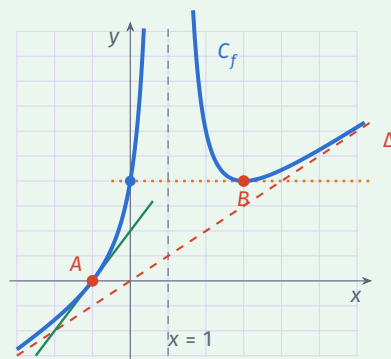
3. $f''(x) = \frac{24}{(x-1)^4} > 0$: C_f est **convexe** sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

4. $f(x) = \frac{x(x-1)^2+4}{(x-1)^2} = \frac{x^3-2x^2+x+4}{(x-1)^2}$, et $(x+1)(x^2-3x+4)$ redonne ce numérateur ; x^2-3x+4 a pour discriminant -7 : seul point sur (Ox) : $A(-1, 0)$; sur (Oy) : $(0, 4)$. $f'(-1) = \frac{(-4) \times 4}{-8} = 2$: tangente **$y = 2x + 2$** .

5. $f(x) = 4 \iff x^3 - 2x^2 + x + 4 = 4(x-1)^2 \iff x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \iff x(x-3)^2 = 0$: $x \in \{0, 3\}$. La droite $y = 4$ est **tangente** à C_f en son minimum $B(3, 4)$ (racine double) et la recoupe en $(0, 4)$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$

6. Graphiquement, $f(x) = m$ a 1 solution si $m < 4$, 2 si $m = 4$, 3 si $m > 4$ (une sur $]-\infty, 1[$, où f croît de $-\infty$ à $+\infty$, et 0, 1 ou 2 sur $]1, +\infty[$).



■ Corrigé de l'exercice 24

1. $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3) = x - 4\sqrt{x} + 3$ ✓. $f(x) = 0 \iff \sqrt{x} \in \{1, 3\} \iff x \in \{1, 9\}$; $f < 0$ sur $]1, 9[$, $f > 0$ sur $[0, 1[\cup]9, +\infty[$.

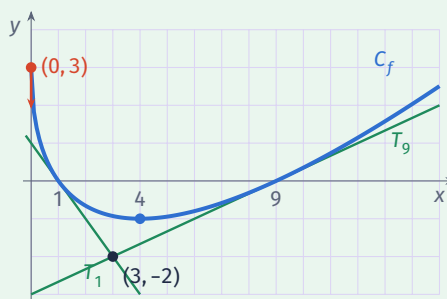
2. $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x}-4) + 3 \rightarrow +\infty$; $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} \rightarrow 1$; $f(x) - x = -4\sqrt{x} + 3 \rightarrow -\infty$: **BP de direction la droite** $y = x$.

3. $\frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 - \frac{4}{\sqrt{x}} \rightarrow -\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 0 ; **demi-tangente verticale** en $(0, 3)$, la courbe « plonge ».

4. $f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$: négative sur $]0, 4[$, positive sur $]4, +\infty[$; minimum **$f(4) = -1$** .

5. u croît et $u([0, 4]) = [0, 2]$, où g (sommet $t = 2$) décroît : $f = g \circ u$ décroît sur $[0, 4]$; $u([4, +\infty[) = [2, +\infty[$, où g croît : f croît.
6. $f''(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} > 0$: C_f convexe. $f'(1) = -1$: $T_1 : y = -x + 1$; $f'(9) = \frac{1}{3}$: $T_9 : y = \frac{x-9}{3}$. $-x + 1 = \frac{x-9}{3} \iff x = 3, y = -2$ ✓.

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	3		$+\infty$
		-1	

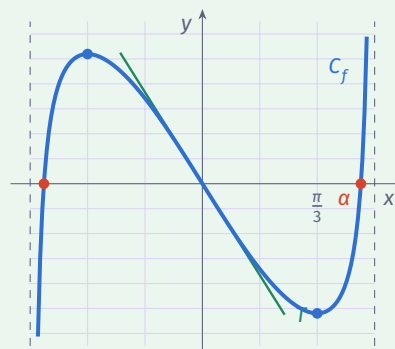


7. Avec $t = \sqrt{x} \geq 0$ (une valeur de $t \iff$ une valeur de x) : $(t - 2)^2 = m + 1$. $m < -1$: 0 ; $m = -1$: 1 ($x = 4$) ; si $m > -1$, $t = 2 \pm \sqrt{m+1}$ et $2 - \sqrt{m+1} \geq 0 \iff m \leq 3$: 2 solutions si $-1 < m \leq 3$, 1 si $m > 3$.

■ Corrigé de l'exercice 25

1. I est symétrique par rapport à 0, tan et sin sont impaires : f est **impaire** (O centre de symétrie). En $\frac{\pi^-}{2}$: $\tan x \rightarrow +\infty$, $8 \sin x \rightarrow 8$: $f \rightarrow +\infty$; AV $x = \frac{\pi}{2}$ (et $x = -\frac{\pi}{2}$, où $f \rightarrow -\infty$).
2. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 8 \cos x = \frac{1-8 \cos^3 x}{\cos^2 x}$, et $1-8c^3 = (1-2c)(1+2c+4c^2)$ (identité a^3-b^3), où $4c^2+2c+1 > 0$ (discriminant -12). Sur I , $1-2 \cos x < 0 \iff \cos x > \frac{1}{2} \iff x < \frac{\pi}{3}$: f décroît sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, croît sur $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$; $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} - 4\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$.
3. $(\frac{1}{\cos^2 x})' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$, d'où $f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} + 8 \sin x = \frac{2 \sin x(1+4 \cos^3 x)}{\cos^3 x}$, du signe de $\sin x$ sur I : concave sur $]-\frac{\pi}{2}, 0]$, convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$: O est un **point d'inflexion**, $T : y = -7x$ ($f'(0) = 1-8$).
4. $\varphi'(x) = f'(x) + 7 = \frac{1+7c^2-8c^3}{c^2}$ et $(1-c)(8c^2+c+1) = 1+7c^2-8c^3$ ✓, avec $8c^2+c+1 > 0$ et $1-c \geq 0$: $\varphi' \geq 0$ (nul seulement en 0), φ croît et $\varphi(0) = 0$. Donc C_f **est au-dessus de T sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, au-dessous sur $]-\frac{\pi}{2}, 0[$** : elle traverse sa tangente en O.
5. $f(x) = \frac{\sin x(1-8 \cos x)}{\cos x} = 0 \iff \sin x = 0$ ou $\cos x = \frac{1}{8}$: $S = \{-\alpha, 0, \alpha\}$, avec $\alpha \approx 1,445$ ($\alpha \in]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$ car $0 < \frac{1}{8} < \frac{1}{2}$).

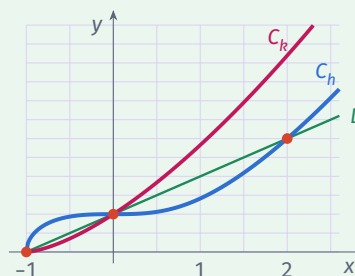
x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0		$+\infty$
		$-3\sqrt{3}$	



■ Corrigé de l'exercice 26

- $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ existe $\Leftrightarrow x^3 \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -1$ ($x \mapsto x^3$ croissante) ; $k(x) = (\sqrt{x+1})^3 = (x+1)\sqrt{x+1}$ existe $\Leftrightarrow x \geq -1$. u croît, $u([-1, +\infty[) = [-1, +\infty[$ où v croît : h croît ; v croît, à valeurs dans $[0, +\infty[$ où u croît : k croît.
- $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$: $\frac{h(x)}{x+1} = \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x+1}} \rightarrow +\infty$: **demi-tangente verticale** pour C_h en $(-1, 0)$.
 $\frac{k(x)}{x+1} = \sqrt{x+1} \rightarrow 0$: $k'_d(-1) = 0$, **demi-tangente horizontale** pour C_k .
- $h'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} \geq 0$; avec $w = x^3 + 1$: $h''(x) = \frac{6x \cdot 2\sqrt{w} - 3x^2 \cdot \frac{3x^2}{\sqrt{w}}}{4w} = \frac{12xw - 9x^4}{4w\sqrt{w}} = \frac{3x(x^3+4)}{4w\sqrt{w}}$ ✓. Sur $]-1, 0[$, $x < 0 < x^3 + 4$: $h'' < 0$; sur $]0, +\infty[$: $h'' > 0$. $(0, 1)$ est un **point d'inflexion à tangente horizontale** ($h'(0) = 0$).
- Les deux membres sont positifs : $h(x) \leq x+1 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) \leq (x+1)^2 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2x) \leq 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-2) \leq 0$: $S = \{-1\} \cup [0, 2]$. C_h est au-dessous de D sur $[0, 2]$, au-dessus sur $]-1, 0[$ et sur $]2, +\infty[$; points communs $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$.

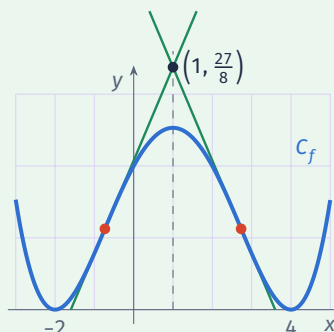
- $h^2 - k^2 = x^3 + 1 - (x+1)^3 = -3x(x+1)$: comme $h, k \geq 0$, $h \geq k$ sur $[-1, 0]$ et $h \leq k$ sur $[0, +\infty[$; égalité en -1 et 0 . Repères : $k'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$ (donc $k'(0) = \frac{3}{2}$), k convexe ; $h(1) = \sqrt{2}$, $k(1) = 2\sqrt{2}$, $h'(2) = 2$.



■ Corrigé de l'exercice 27

- $f' < 0$ sur $[-3, -2[\cup]1, 4[$, $f' > 0$ sur $]-2, 1[\cup]4, 5]$: f décroît sur $[-3, -2]$, croît sur $[-2, 1]$, décroît sur $[1, 4]$, croît sur $[4, 5]$: minimums locaux en -2 et 4 , maximum local en 1 .
- $f'(0) = 1$ et $f'(2) = -1$: produit des pentes -1 , les tangentes sont **perpendiculaires**.
- f' croît sur $[-3, \alpha]$, décroît sur $[\alpha, \beta]$, croît sur $[\beta, 5]$ ($\alpha \approx -0,7$, $\beta \approx 2,7$) : C_f convexe, concave, puis convexe : **deux points d'inflexion**.

x	-3	-2	1	4	5	
$f'(x)$		-	0	+	0	+
$f(x)$	$\frac{49}{32}$		$\frac{81}{32}$		$\frac{49}{32}$	
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		0		0		



- a) Vrai : f croît sur $[-2, 1]$. b) Faux : en α et β , f' a un extremum local non nul ($f'(\alpha) > 0 > f'(\beta)$). c) Faux : la figure donne le sens des variations, pas leur ampleur ; il faut l'expression de f (question 5) pour trouver $f(-2) = f(4)$.
- a) $f'(x) = \frac{2}{32}(x^2 - 2x - 8)(2x - 2) = \frac{(x+2)(x-4)(x-1)}{8}$ ✓. $f(-2) = f(4) = 0$, $f(1) = \frac{81}{32}$. $(2-x)^2 - 2(2-x) - 8 = x^2 - 2x - 8$: $f(2-x) = f(x)$, **axe** $x = 1$.
 b) $f''(x) = \frac{3}{8}(x^2 - 2x - 2)$ s'annule en changeant de signe en $\alpha = 1 - \sqrt{3}$, $\beta = 1 + \sqrt{3}$; $x^2 - 2x - 8 = (x-1)^2 - 9 = -6$ en ces points : $f(\alpha) = f(\beta) = \frac{36}{32} = \frac{9}{8}$. $f'(\beta) = \frac{(3+\sqrt{3})\sqrt{3}(\sqrt{3}-3)}{8} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$; en $x = 1$, la

tangente en β vaut $\frac{9}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{3} = \boxed{\frac{27}{8}}$; par symétrie, celle en α aussi : elles se coupent en $(1, \frac{27}{8})$.

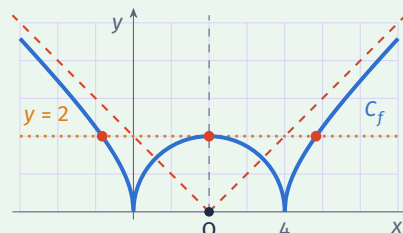
■ Corrigé de l'exercice 28

1. Sur $]-\infty, -1]$, f décroît de 1 (non atteint) à 0 ; sur $[-1, 3]$, croît de 0 à $\frac{4}{3}$; sur $[3, +\infty[$, décroît de $\frac{4}{3}$ vers 1. Donc $0 \leq f(x) \leq \frac{4}{3}$: f est bornée, **maximum** $\frac{4}{3} = f(3)$, **minimum** $0 = f(-1)$.
2. $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ dans $[-1, 3]$ où f croît : $f(\sqrt{2}) < f(\sqrt{3})$. $f(-3) \in]0, 1[$ et $f(5) \in]1, \frac{4}{3}[$: $f(-3) < 1 < f(5)$ (intervalles différents : on passe par la valeur 1).
3. $g(-x) = g(x)$: g est **paire**. Sur $[0, \sqrt{3}]$, $x \mapsto x^2$ croît à valeurs dans $[0, 3]$ où f croît : g croît ; sur $[\sqrt{3}, +\infty[$, $x^2 \in [3, +\infty[$ où f décroît : g décroît vers 1. $g(0) = \frac{1}{3}$, $g(\sqrt{3}) = \frac{4}{3}$: $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq \frac{4}{3}$.
4. $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît sur $]0, +\infty[$. Si $0 < x \leq \frac{1}{3}$: $\frac{1}{x} \in [3, +\infty[$ où f décroît, donc k **croît** ; si $x \geq \frac{1}{3}$: $\frac{1}{x} \in]0, 3]$ où f croît, donc k **décroît**. $\lim_{0^+} k = \lim_{+\infty} f = 1$, $\lim_{+\infty} k = f(0) = \frac{1}{3}$ (f est dérivable en 0, donc $f(u) \rightarrow f(0)$ quand $u \rightarrow 0$) ; maximum $k(\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$.
5. $f(-1) = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0$, $a = 1$; $f(3) = \frac{16}{9+b} = \frac{4}{3} \Rightarrow b = 3$: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+3}$, $f(0) = \frac{1}{3}$ ✓.
 $f(x) = 1 \iff 2x+1 = 3 \iff x = 1$, et $f(x) - 1 = \frac{2x-2}{x^2+3}$: C_f au-dessous de $y = 1$ si $x < 1$, au-dessus si $x > 1$.
6. $f \geq 0$: φ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(x) = \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+3}}$. $\frac{\varphi(x)-\varphi(-1)}{x+1} = \frac{|x+1|}{x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \rightarrow \pm \frac{1}{2}$: $\varphi'_d(-1) = \frac{1}{2} \neq \varphi'_g(-1) = -\frac{1}{2}$: **point anguleux** $(-1, 0)$.

■ Corrigé de l'exercice 29

1. $|x^2 - 4x| \geq 0$: $D_f = \mathbb{R}$. $(4-x)^2 - 4(4-x) = x^2 - 4x$: $f(4-x) = f(x)$, la droite $x = 2$ est **axe de symétrie**.
2. a) Sur $[0, 4]$, $x^2 - 4x \leq 0$: $f(x)^2 = 4x - x^2 = 4 - (x-2)^2$, soit $(x-2)^2 + f(x)^2 = 4$: M est sur le cercle (et $f \geq 0$: demi-cercle supérieur). b) Hors de $]0, 4[$: $f(x)^2 = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$ (arcs d'hyperbole).
3. Pour $0 < x < 4$: $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{4-x}{x}} \rightarrow +\infty$; pour $x < 0$: $\frac{f(x)}{x} = -\sqrt{\frac{x^2-4x}{x^2}} = -\sqrt{1-\frac{4}{x}} \rightarrow -\infty$. Deux **demi-tangentes verticales** dirigées vers le haut : la courbe forme une **pointe en O**, et de même en $(4, 0)$ par symétrie.
4. Sur $]0, 4[$: $f'(x) = \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$; sur $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$: $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$. Maximum local $f(2) = 2$.
5. Pour $x > 4$: $f(x) - (x-2) = \frac{x^2-4x-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x+x-2}} = \frac{-4}{\sqrt{x^2-4x+x-2}} \rightarrow 0^-$; pour $x < 0$: $f(x) - (2-x) = \frac{-4}{\sqrt{x^2-4x+2-x}} \rightarrow 0^-$. Asymptotes $y = x - 2$ ($+\infty$) et $y = -x + 2$ ($-\infty$), **courbe au-dessous**.

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$		
$f'(x)$	-		+	0	-		+
$f(x)$	$+\infty$			2			$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		
		0		0			

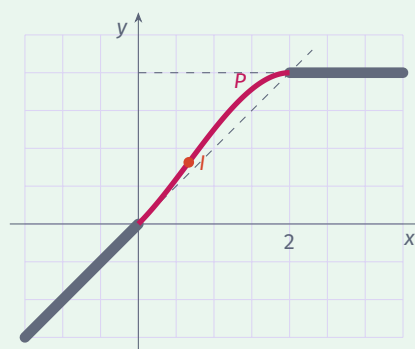


6. $f(x) = m$: aucune solution si $m < 0$. Si $m \geq 0$: $|x^2 - 4x| = m^2 \iff (x-2)^2 = 4 + m^2$ (deux solutions) ou $(x-2)^2 = 4 - m^2$ (deux si $m < 2$, une si $m = 2$, aucune si $m > 2$) ; pour $m = 0$ les deux équations coïncident. Bilan : **0** ($m < 0$), **2** ($m = 0$), **4** ($0 < m < 2$), **3** ($m = 2 : x = 2, 2 \pm 2\sqrt{2}$), **2** ($m > 2$).

■ Corrigé de l'exercice 30

- Pour que f soit bien définie en 0 et en 2 (les deux formules y donnent la même valeur), il faut $P(0) = 0$ et $P(2) = 2$. Alors $f'_g(0) = 1$ (route $y = x$), $f'_d(0) = P'(0)$, $f'_g(2) = P'(2)$, $f'_d(2) = 0$: f est dérivable en 0 et en 2 $\iff P'(0) = 1$ et $P'(2) = 0$; ailleurs, f est dérivable (affine ou polynôme).
- Si $P(x) = ax^2 + bx + c$: $c = 0$, $b = 1$, $P'(2) = 4a + 1 = 0$ donne $a = -\frac{1}{4}$, mais alors $P(2) = -1 + 2 = 1 \neq 2$: **impossible**. Avec $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$: $d = 0$, $c = 1$, $8a + 4b + 2 = 2$ et $12a + 4b + 1 = 0$, d'où $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$: $P(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4}$.
- $P'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + x + 1 = -\frac{(3x+2)(x-2)}{4} \geq 0$ sur $[0, 2]$: f est **croissante** sur $\mathbb{R}$. $P''(x) = 1 - \frac{3}{2}x$: arc convexe sur $[0, \frac{2}{3}]$, concave sur $[\frac{2}{3}, 2]$, inflexion $I(\frac{2}{3}, \frac{22}{27})$. La pente P' est maximale là où P'' change de signe : $P'(\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$, plus raide que la première route !

- $P(x) - x = \frac{x^2(2-x)}{4} \geq 0$ et $P(x) - 2 = -\frac{(x-2)^2(x+2)}{4} \leq 0$ sur $[0, 2]$: le raccord est entre les droites $y = x$ et $y = 2$ (dans l'angle des routes prolongées).
- $f'(x) = 1$ sur $]-\infty, 0]$, $P'(x)$ sur $[0, 2]$, 0 sur $[2, +\infty[$. En 0 : taux de f' nul à gauche, $\frac{P'(x)-1}{x} = 1 - \frac{3}{4}x \rightarrow 1$ à droite ; en 2 : $P''(2) = -2$ à gauche, 0 à droite. f' **n'est dérivable ni en 0 ni en 2** : la « courbure » change brutalement, le conducteur doit donner un petit coup de volant à chaque jonction.



■ Corrigé de l'exercice 31

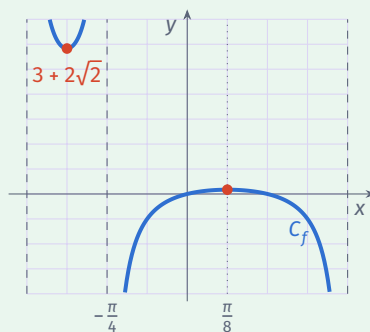
- $BM = \sqrt{BH^2 + HM^2} = \sqrt{x^2 + 4}$ (Pythagore), parcouru à 3 km/h ; $MV = 6 - x$ à 5 km/h : d'où $T(x)$.
- $T'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5} = \frac{5x-3\sqrt{x^2+4}}{15\sqrt{x^2+4}}$. Pour $x \geq 0$: $5x \geq 3\sqrt{x^2+4} \iff 25x^2 \geq 9x^2 + 36 \iff x \geq \frac{3}{2}$. T décroît sur $[0, \frac{3}{2}]$, croît sur $[\frac{3}{2}, 6]$: $T(\frac{3}{2}) = \frac{5/2}{3} + \frac{9/2}{5} = \frac{26}{15} \text{ h} = 1 \text{ h } 44 \text{ min}$, contre $T(0) = \frac{28}{15} \text{ h} = 1 \text{ h } 52 \text{ min}$ ($B \rightarrow H \rightarrow V$) et $T(6) = \frac{\sqrt{40}}{3} \approx 2 \text{ h } 06 \text{ min}$ ($B \rightarrow V$).
- $\sin \widehat{HBM} = \frac{HM}{BM} = \frac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5}$, rapport des deux vitesses (3 km/h et 5 km/h) : c'est la loi de la réfraction de la lumière !

4. Même dérivée sur $[0, d]$: si $d \geq \frac{3}{2}$, accoster à $\frac{3}{2}$ km de H ; si $d < \frac{3}{2}$, T décroît sur $[0, d]$: **ramer droit vers V**.
5. $T'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{v}$; $T'(x) = 0 \iff vx = 3\sqrt{x^2+4} \iff (v^2-9)x^2 = 36$: $x_v = \frac{6}{\sqrt{v^2-9}}$ ($v > 3$). Comme $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ est croissante (dérivée $\frac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$), T' croît : T décroît puis croît, de minimum en x_v . Si $x_v \geq 6$ (ou si $v \leq 3$, où $T' < 0$ car $\frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} < \frac{1}{3}$), T décroît sur $[0, 6]$: on rame droit vers V. Or $x_v \geq 6 \iff v^2 - 9 \leq 1$: on rame droit vers V $\iff v \leq \sqrt{10} \approx 3,16$ km/h.

■ Corrigé de l'exercice 32

1. $\tan x$ existe si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ existe si $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$. $\tan$ est π -périodique, donc $f(x + \pi) = f(x)$; et $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \tan x = f(x)$: **axe de symétrie** $x = \frac{\pi}{8}$.
2. Pour $x \in E$, $\tan x \neq -1$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$: $f(x) = g(\tan x)$.
3. $g'(t) = \frac{(1-2t)(1+t) - (t-t^2)}{(1+t)^2} = \frac{2-(t+1)^2}{(1+t)^2}$, nul en $t = -1 \pm \sqrt{2}$. Sur $] -1, +\infty[$: g croît puis décroît, maximum $g(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 1) \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$; limites $-\infty$ en -1^+ (numérateur $\rightarrow -2$) et en $+\infty$ ($g(t)$ se comporte comme $-t$). Sur $] -\infty, -1[$: décroît puis croît, minimum $g(-1 - \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, limites $+\infty$ aux deux bornes.
4. a) $T = \tan \frac{\pi}{8} > 0$ vérifie $1 = \frac{2T}{1-T^2}$, soit $T^2 + 2T - 1 = 0$: $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$; $\tan\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = -\frac{1}{\tan \frac{\pi}{8}} = -1 - \sqrt{2}$.
- b) $\tan$ croît de $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}[$ sur $] -\infty, -1[$ et de $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ sur $] -1, +\infty[$; par composition :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$	$3-2\sqrt{2}$	$-\infty$	$-\infty$
		$3+2\sqrt{2}$				



AV : $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$ (et leurs translatées de $k\pi$).

5. $\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$ et $\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$ avec $a = x$, $b = \frac{\pi}{4} - x$: $a - b = 2x - \frac{\pi}{4}$, $a + b = \frac{\pi}{4}$, d'où la formule. Pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, $c \in]-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ et $c \mapsto 1 - \frac{\sqrt{2}}{c + \frac{\sqrt{2}}{2}}$ est croissante : maximum pour $c = 1$, soit $x = \frac{\pi}{8}$: $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$ ✓.
6. $b = \frac{\pi}{4} - a$ et $a \in]0, \frac{\pi}{4}[$: $\tan a \tan b = f(a) \leq f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3 - 2\sqrt{2}$, égalité si et seulement si $a = b = \frac{\pi}{8}$.

■ Corrigé de l'exercice 33

1. Pour $x = \frac{3\pi}{2}$: $\cos 3\pi = -1$ et $m(1 + \sin x) = 0$: jamais solution. Pour $x \neq \frac{3\pi}{2}$, $1 + \sin x > 0$ et $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$: $(E_m) \iff \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin x} = m \iff g(\sin x) = m$.
2. $g'(t) = \frac{-4t(1+t) - (1-2t^2)}{(1+t)^2} = -\frac{2t^2+4t+1}{(1+t)^2}$, nul en $t_0 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0,29$ (l'autre racine est < -1). g croît sur

$]-1, t_0]$ (de $-\infty$ à $g(t_0) = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1,17$), puis décroît jusqu'à $g(1) = -\frac{1}{2}$. L'équation $\sin x = t$ a **deux** solutions dans $[0, 2\pi[$ si $t \in]-1, 1[$, **une** si $t = 1$ ($x = \frac{\pi}{2}$).

3. On compte les $t \in]-1, 1]$ tels que $g(t) = m$, puis les x associés :

$m < -\frac{1}{2}$ un $t \in]-1, t_0[$: 2 solutions ;

$m = -\frac{1}{2}$ $t = 1$ et un $t \in]-1, t_0[$: 3 ;

$-\frac{1}{2} < m < 4 - 2\sqrt{2}$ deux $t \in]-1, 1[$: 4 ;

$m = 4 - 2\sqrt{2}$ $t = t_0$: 2 ;

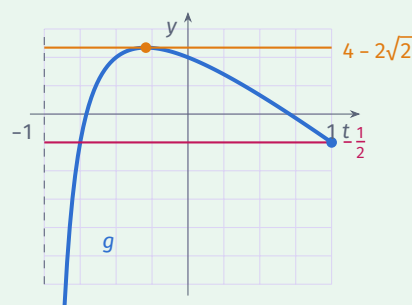
$m > 4 - 2\sqrt{2}$ aucun t : 0.

$(E_{-\frac{1}{2}})$: $4t^2 - t - 3 = (t-1)(4t+3) = 0$; $t = 1$ donne $x = \frac{\pi}{2}$,

$t = -\frac{3}{4}$ donne $x = \pi + \theta$ et $x = 2\pi - \theta$, où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$\sin \theta = \frac{3}{4}$: **trois solutions**.

4. $(E_m) \iff 2t^2 + mt + m - 1 = 0$ ($t = \sin x \neq -1$), de discriminant $m^2 - 8m + 8$, nul pour $m = 4 \pm 2\sqrt{2}$. Pour $m = 4 - 2\sqrt{2}$, la racine double $-\frac{m}{4} = t_0$ est le sinus cherché. Pour $m = 4 + 2\sqrt{2}$, la racine double $-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < -1$ n'est pas un sinus : c'est le minimum de g sur $]-\infty, -1[$; et pour $m > 4 + 2\sqrt{2}$, les deux racines sont réelles mais hors de $[-1, 1]$ (puisque $g \leq 4 - 2\sqrt{2} < m$ sur $[-1, 1]$) : pas de solution, comme annoncé.



■ Corrigé de l'exercice 34

1. $f_m(1) = \frac{1-m+m}{-1} = -1$ pour tout m : **A(1, -1) point commun** (c'est le seul : $m(1-x) = y(x-2) - x^2$ pour tout m impose $x = 1, y = -1$). $f_4(x) = \frac{(x-2)^2}{x-2} = x - 2$: C_4 est la droite $y = x - 2$ **privée du point (2, 0)**.

2. $x^2 - mx + m = (x-2)(x+2-m) + 4 - m$: $f_m(x) = x + 2 - m + \frac{4-m}{x-2}$; AV $x = 2$, AO $y = x + 2 - m$, $\Omega_m(2, 4 - m)$; $f_m(4-x) + f_m(x) = 8 - 2m = 2(4 - m)$: Ω_m est centre de symétrie.

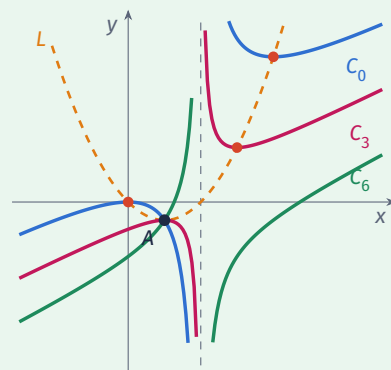
3. $f'_m(x) = \frac{(2x-m)(x-2) - (x^2 - mx + m)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + m}{(x-2)^2}$, $\Delta' = 4 - m$. Si $m > 4$: $f'_m > 0$, **aucun extremum**. Si $m < 4$: f'_m s'annule en changeant de signe en $2 \mp \sqrt{4 - m}$: un **maximum** à gauche de 2, un **minimum** à droite.

4. Si $f'_m(x_0) = 0$: $(2x_0 - m)(x_0 - 2) = x_0^2 - mx_0 + m$, donc $f_m(x_0) = 2x_0 - m$; et $m = 4x_0 - x_0^2$ donne $f_m(x_0) = x_0^2 - 2x_0$. Réciproquement, tout $x_0 \neq 2$ est l'abscisse d'un extremum de C_m pour $m = 4 - (x_0 - 2)^2 < 4$. **L : $y = x^2 - 2x$** (parabole privée de (2, 0)) ; maximums sur l'arc $x < 2$, minimums sur l'arc $x > 2$. Son sommet est A : pour $m = 3$, C_3 a un maximum en A.

5. Une tangente horizontale sur (Ox) est un extremum de valeur 0 : $x_0^2 - 2x_0 = 0$, $x_0 \neq 2$, donc $x_0 = 0$, $m = 0$:

$C_0 : y = \frac{x^2}{x-2}$ **est tangente à (Ox) en O**.

6. $f_m(x) - f_p(x) = \frac{(p-m)(x-1)}{x-2}$: nul seulement en $x = 1$ (point A). Si $m < p$, C_m est au-dessus de C_p sur $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, au-dessous sur $]1, 2[$. Enfin $y_0 = f_m(x_0) \iff m(1-x_0) = y_0(x_0-2) - x_0^2$: si $x_0 \notin \{1, 2\}$, **une seule valeur de m**.



■ Corrigé de l'exercice 35

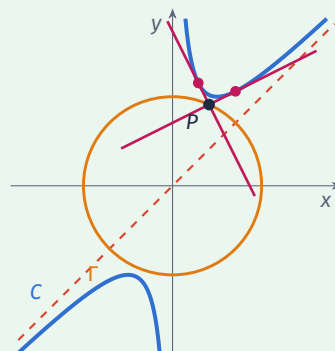
- $\Omega M^2 = x^2 + \left(\frac{x^2}{6} - a\right)^2 = \frac{(x^2)^2}{36} - \frac{a}{3}x^2 + a^2 + x^2 = \varphi(x^2)$.
- φ est un trinôme en $X \geq 0$, de sommet $X_0 = 18\left(\frac{a}{3} - 1\right) = 6a - 18$. Si $a \leq 3$: $X_0 \leq 0$, φ croît sur $[0, +\infty[$, minimum $\varphi(0) = a^2$: $d(a) = a$ (le point le plus proche est O). Si $a > 3$: minimum $\varphi(X_0) = (a-3)^2 - 2(a-3)^2 + a^2 = 6a - 9$: $d(a) = \sqrt{6a-9}$.
- Si $r \leq 3$: $a = r$ convient ($d(r) = r$) et c'est la seule solution ($a > 3$ donnerait $a = \frac{r^2+9}{6} \leq 3$) : la bille **touche le fond**. Si $r > 3$: $a \leq 3$ donnerait $d(a) = a \leq 3 < r$ (la bille traverserait le verre), donc $a > 3$ et $\sqrt{6a-9} = r$: $a = \frac{r^2+9}{6}$; contact pour $x^2 = X_0 = 6a - 18 = r^2 - 9$, soit $x = \pm\sqrt{r^2-9}$; vide : $a - r = \frac{r^2-6r+9}{6} = \frac{(r-3)^2}{6}$.
- $r = 5$: $a = \frac{34}{6} = \frac{17}{3}$, contacts $M\left(\pm 4, \frac{8}{3}\right)$, vide $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ cm. En $M\left(4, \frac{8}{3}\right)$: pente de la tangente $\frac{x}{3} = \frac{4}{3}$, pente de (ΩM) : $\frac{8/3-17/3}{4} = -\frac{3}{4}$; produit -1 : **perpendiculaires** (le rayon est normal au verre). Hauteur minimale : $a + r = \frac{17}{3} + 5 = \frac{32}{3} \approx 10,7$ cm. (Le nombre 3 est le « rayon de courbure » de P en O : c'est le rayon du plus grand cercle qui touche le fond.)

■ Corrigé de l'exercice 36

- $f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2}$; $T_t : y = \left(1 - \frac{3}{t^2}\right)(x-t) + t + \frac{3}{t} = \left(1 - \frac{3}{t^2}\right)x + \frac{6}{t}$. Les ordonnées à l'origine $\frac{6}{t} \neq \frac{6}{s}$: $T_t \neq T_s$.
- $P \in T_t \iff \beta = \left(1 - \frac{3}{t^2}\right)\alpha + \frac{6}{t} \iff \beta t^2 = \alpha t^2 - 3\alpha + 6t \iff (\beta - \alpha)t^2 - 6t + 3\alpha = 0$.
- a) $P = O$: $-6t = 0$, $t = 0$ exclu : **aucune** tangente. b) Sur $y = x$ ($\alpha = \beta \neq 0$) : $t = \frac{\alpha}{2}$; sur $x = 0$ ($\beta \neq 0$) : $\beta t^2 - 6t = 0$, $t = \frac{6}{\beta}$: **une** tangente. c) Trinôme de discriminant réduit $9 - 3\alpha(\beta - \alpha)$, sans racine nulle : **2** tangentes si $\alpha(\beta - \alpha) < 3$, **1** si $\alpha(\beta - \alpha) = 3$, **0** si $\alpha(\beta - \alpha) > 3$. Or $\alpha(\beta - \alpha) = 3 \iff \beta = \alpha + \frac{3}{\alpha} = f(\alpha)$: $P \in C$ (tangente en P). Pour $\alpha > 0$, deux tangentes $\iff \beta < f(\alpha)$ (P sous la branche de droite) ; pour $\alpha < 0$, $\iff \beta > f(\alpha)$ (P au-dessus de la branche de gauche).
- En divisant par t^2 : $3\alpha u^2 - 6u + (\beta - \alpha) = 0$, $u_1 + u_2 = \frac{2}{\alpha}$, $u_1 u_2 = \frac{\beta - \alpha}{3\alpha}$. Les pentes sont $s_i = 1 - 3u_i^2$ et $s_1 s_2 = 1 - 3[(u_1 + u_2)^2 - 2u_1 u_2] + 9(u_1 u_2)^2 = 1 - \frac{12}{\alpha^2} + \frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha} + \frac{(\beta - \alpha)^2}{\alpha^2}$.
 $s_1 s_2 = -1 \iff 2\alpha^2 - 12 + 2\alpha(\beta - \alpha) + (\beta - \alpha)^2 = 0 \iff \alpha^2 + \beta^2 = 12$, car $\alpha^2 + 2\alpha(\beta - \alpha) + (\beta - \alpha)^2 = \beta^2$.
- Sur Γ , $\alpha = 2\sqrt{3} \cos \theta$, $\beta = 2\sqrt{3} \sin \theta$: $\alpha(\beta - \alpha) = 6 \sin 2\theta - 6(1 + \cos 2\theta) = 6\sqrt{2} \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 6 \leq 6\sqrt{2} - 6 < 3$ ($72 < 81$). L'ensemble cherché est le **cercle Γ de centre O et de rayon $2\sqrt{3}$, privé des 4 points $(0, \pm 2\sqrt{3})$ et $(\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{6})$ situés sur les asymptotes** : c'est le **cercle « orthoptique »** de C .

Exemple : $T_1 : y = -2x + 6$ et $T_{\sqrt{6}} : y = \frac{x}{2} + \sqrt{6}$;
 $(-2) \times \frac{1}{2} = -1$, elles se coupent en $\left(\frac{12-2\sqrt{6}}{5}, \frac{6+4\sqrt{6}}{5}\right)$ et
 $\frac{(12-2\sqrt{6})^2 + (6+4\sqrt{6})^2}{25} = \frac{168+132}{25} = 12$ ✓ : le point P est bien sur Γ .

En $(0, 2\sqrt{3})$, la seule tangente $y = 2\sqrt{3}$ et l'asymptote $x = 0$ sont perpendiculaires.



Partie 3 · L'étude complète

2^e Bac PC : continuité, réciproques, logarithme, exponentielle et suites

1

Continuité et TVI

2^e Bac PC Le premier chapitre de l'année : tout le reste de la partie 3 repose sur lui.

Définition : continuité en un point, sur un intervalle

- f est **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; **continue à droite en a** si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, **à gauche** si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$. f est continue en a **si et seulement si** elle est continue à droite et à gauche en a .
- f est continue sur $]a, b[$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$; sur $[a, b]$ si, de plus, elle est continue à droite en a et à gauche en b .
- Polynômes, fonctions rationnelles, $\sqrt{x}$, $|x|$, sin, cos sont continues sur tout intervalle de leur domaine ; sommes, produits, quotients et **composées** de fonctions continues aussi. **Dérivable en $a \Rightarrow$ continue en a** (réciproque fausse : $|x|$ en 0).

Définition : prolongement par continuité

Si f n'est pas définie en a mais $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \neq a$ et $\tilde{f}(a) = \ell$ est continue en a : c'est le **prolongement par continuité** de f en a .

Exemple : $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x+2} - 2}$, $D_f = [-2, 2[\cup]2, +\infty[$

En 2, on obtient la forme $\frac{0}{0}$. On factorise le numérateur, $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$, et on utilise la **quantité conjuguée** au dénominateur : $\sqrt{x+2} - 2 = \frac{(x+2) - 4}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{x-2}{\sqrt{x+2} + 2}$. Donc, pour $x \neq 2$:

$$f(x) = (x+3) \left(\sqrt{x+2} + 2 \right) \xrightarrow{x \rightarrow 2} 5 \times 4 = 20.$$

La fonction $\tilde{f}$ égale à f sur D_f et telle que **$\tilde{f}(2) = 20$** est le prolongement par continuité de f en 2 : elle est continue sur $[-2, +\infty[$.

Image d'un intervalle

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un **intervalle** ; l'image d'un segment $[a, b]$ est un **segment** $[m, M]$ (m et M : minimum et maximum de f sur $[a, b]$). Si de plus f est

strictement monotone, on lit l'image sur les bornes (a et b pouvant être infinis) :

intervalle I	$[a, b]$	$[a, b[$	$]a, b]$	$]a, b[$
f strictement croissante	$[f(a), f(b)]$	$[f(a), \lim_{b^-} f[$	$] \lim_{a^+} f, f(b)]$	$] \lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f[$
f strictement décroissante	$[f(b), f(a)]$	$] \lim_{b^-} f, f(a)]$	$[f(b), \lim_{a^+} f[$	$] \lim_{b^-} f, \lim_{a^+} f[$

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

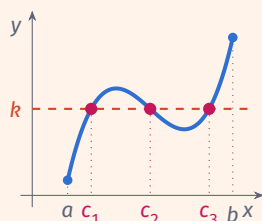
Si f est **continue** sur $[a, b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a, b]$.

Corollaire 1. Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$; si de plus f est **strictement monotone** sur $[a, b]$, cette solution est **unique**.

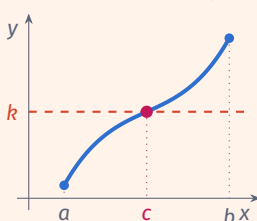
Corollaire 2 (bijection). Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f réalise une **bijection** de I sur $J = f(I)$: pour tout $k \in J$, l'équation $f(x) = k$ a une **unique** solution dans I .

Démonstration. $f([a, b])$ est un intervalle contenant $f(a)$ et $f(b)$, donc tout réel k compris entre eux : $k = f(c)$ pour un $c \in [a, b]$. Unicité : si f est strictement croissante et $c < c'$, alors $f(c) < f(c')$: deux solutions distinctes sont impossibles.

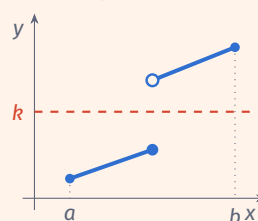
continue : au moins une solution



strictement monotone : une seule



un saut : aucune solution



Méthode : la dichotomie (encadrer la solution α de $f(x) = 0$)

On part de $[a, b]$ avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires. On calcule $f(m)$ au milieu $m = \frac{a+b}{2}$ et on garde la **moitié** où le signe change. Après n étapes, α est dans un intervalle d'amplitude $\frac{b-a}{2^n}$: pour une précision 10^{-3} en partant d'une amplitude 1, il faut $2^n > 1000$, soit $n = 10$ étapes.

Exemple : $\varphi(x) = x^3 + 4x - 3$

φ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = 3x^2 + 4 > 0$: φ est strictement croissante, de limites $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. D'après le corollaire 2, φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: l'équation $\varphi(x) = 0$ a une **unique** solution α . Comme $\varphi(0) = -3 < 0$ et $\varphi(1) = 2 > 0$: $\alpha \in]0, 1[$.

Conclusion : $0,656\,25 < \alpha < 0,687\,5$, donc $0,6 < \alpha < 0,7$.

intervalle	milieu m	$\varphi(m)$	on garde
$[0; 1]$	0,5	$-0,875 < 0$	$[0,5; 1]$
$[0,5; 1]$	0,75	$\approx 0,422 > 0$	$[0,5; 0,75]$
$[0,5; 0,75]$	0,625	$\approx -0,256 < 0$	$[0,625; 0,75]$
$[0,625; 0,75]$	0,687 5	$\approx 0,075 > 0$	$[0,625; 0,687 5]$
$[0,625; 0,687 5]$	0,656 25	$\approx -0,092 < 0$	$[0,656 25; 0,687 5]$

2

Réciproque et racine n -ième

Théorème de la bijection réciproque

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I , et $J = f(I)$. Alors f admet une **fonction réciproque** $f^{-1} : J \rightarrow I$:

$$\text{pour } x \in I \text{ et } y \in J : \quad \boxed{f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)} \quad f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

f^{-1} est **continue** sur J et strictement monotone, **de même sens** que f . Dans un repère **orthonormé**, $C_{f^{-1}}$ est la symétrique de C_f par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

Démonstration de la symétrie. $M(a, b) \in C_f \iff b = f(a) \iff a = f^{-1}(b) \iff M'(b, a) \in C_{f^{-1}}$, et $M'(b, a)$ est la symétrique de $M(a, b)$ par rapport à Δ .

Dérivée de la fonction réciproque

Si f est dérivable en $x_0 \in I$ avec $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$$

Si $f'(x_0) = 0$, la tangente horizontale en (x_0, y_0) devient une tangente **verticale** de $C_{f^{-1}}$ en (y_0, x_0) .

Démonstration. Pour $y \neq y_0$ dans J , on pose $x = f^{-1}(y)$: $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$. Quand $y \rightarrow y_0$, $x \rightarrow x_0$ (continuité de f^{-1}) et ce quotient tend vers $\frac{1}{f'(x_0)}$. **Lecture :** la symétrie échange les axes, donc une pente m devient une pente $\frac{1}{m}$.

Exemple : sans connaître la réciproque

$\varphi(x) = x^3 + 4x - 3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (section 1). $\varphi(1) = 2$ et $\varphi'(1) = 7 \neq 0$, donc φ^{-1} est dérivable en 2 et $(\varphi^{-1})'(2) = \frac{1}{7}$: la tangente à $C_{\varphi^{-1}}$ en $(2, 1)$ a pour équation $y = \frac{1}{7}(x-2)+1$.

Exemple : $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $I = [1, +\infty[$

1. Bijection. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} \geq 0$, nul seulement en 1 : f est continue et strictement croissante sur I , $f(1) = 2$ et $f(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$: bijection de I sur $J = [2, +\infty[$.

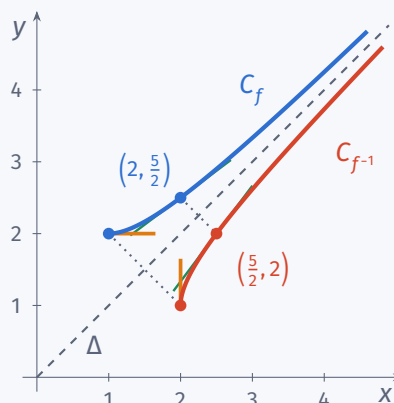
2. Expression de f^{-1} . Pour $y \geq 2$ et $x \geq 1$: $x + \frac{1}{x} = y \iff x^2 - yx + 1 = 0$, $\Delta = y^2 - 4 \geq 0$.

Les deux racines ont pour produit 1 : la plus grande est ≥ 1 , d'où $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}}$ sur $[2, +\infty[$.

3. Tangentes. $f'(1) = 0$: tangente horizontale en $(1, 2)$, donc **demi-tangente verticale** de $C_{f^{-1}}$ en $(2, 1)$. $f(2) = \frac{5}{2}$ et $f'(2) = \frac{3}{4}$, donc $(f^{-1})'(\frac{5}{2}) = \frac{4}{3}$: les pentes des tangentes symétriques sont inverses.

4. Asymptote. $f(x) - x = \frac{1}{x} \rightarrow 0$: $y = x$ est asymptote à C_f , au-dessus de Δ ; par symétrie, Δ est aussi asymptote à $C_{f^{-1}}$, au-dessous.

Vérification : $f^{-1}(x) - x = \frac{\sqrt{x^2-4}-x}{2} = \frac{-2}{x+\sqrt{x^2-4}} \rightarrow 0$.

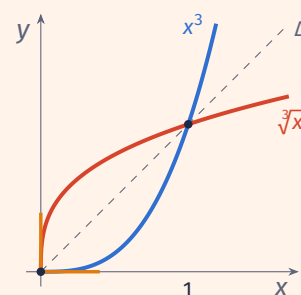


Définition : racine n -ième ($n \in \mathbb{N}^*$)

$x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, de 0 à $+\infty$: c'est une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui-même. Sa réciproque est la **racine n -ième**, notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$:

pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$: $\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x$.

$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$; $\sqrt[3]{x}$ est la racine cubique ; $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[5]{32} = 2$.



demi-tangente verticale de $\sqrt[3]{x}$ en O

Calculs ($a, b \geq 0$; $n, p \in \mathbb{N}^*$)

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b > 0) \quad \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a} \quad \sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$$

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \iff a = b$; $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \iff a < b$. **Équation** $x^n = a$ ($a > 0$) : n impair : $x = \sqrt[n]{a}$; n pair : $x = \pm \sqrt[n]{a}$.

Puissances rationnelles. Pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$) : $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, avec les règles habituelles : $x^r x^{r'} = x^{r+r'}$, $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$, $(xy)^r = x^r y^r$.

Dérivée. $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$; $(x^r)' = r x^{r-1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Démonstration de la dérivée. Avec $f(x) = x^n$: $(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{f'(\sqrt[n]{y})} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}}$ pour $y > 0$. En 0, $f'(0) = 0$ ($n \geq 2$) : demi-tangente verticale.

Exemple : comparer, simplifier, lever une indétermination

- **Comparer $\sqrt[3]{4}$ et $\sqrt[4]{6}$** : on élève à la puissance 12 (croissante sur $[0, +\infty[$) : $(\sqrt[3]{4})^{12} = 4^4 = 256$ et $(\sqrt[4]{6})^{12} = 6^3 = 216$, donc $\sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{6}$ (alors que $4 < 6$!).
- $A = \sqrt[4]{8} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{9+8+1}{12}} = 2^{\frac{3}{2}} = \boxed{2\sqrt{2}}$.
- **Limite en $+\infty$ de $\sqrt[3]{8x^3 - x^2 + 1} - 2x$ ($\infty - \infty$).** On pose $a = \sqrt[3]{8x^3 - x^2 + 1}$ et $b = 2x$, et on

utilise $a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$ (le « conjugué » des racines cubiques) :

$$a - b = \frac{-x^2 + 1}{a^2 + ab + b^2} = \frac{-1 + \frac{1}{x^2}}{\left(\frac{a}{x}\right)^2 + 2\frac{a}{x} + 4} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{4 + 4 + 4} = \boxed{-\frac{1}{12}}, \quad \text{car } \frac{a}{x} = \sqrt[3]{8 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} \rightarrow 2.$$

3

Dérivabilité et composées

Définition : dérivabilité à droite, à gauche

f est **dérivable à droite** en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a) \in \mathbb{R}$, **à gauche** si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a) \in \mathbb{R}$. f est dérivable en $a \iff f$ est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Lecture graphique du taux d'accroissement en a

limite à droite (ou à gauche)

réel ℓ

$f'_d(a) \neq f'_g(a)$, deux réels

$+\infty$ ou $-\infty$

ce que l'on voit en $A(a, f(a))$

demi-tangente de pente ℓ : $y = \ell(x - a) + f(a)$

point anguleux : deux demi-tangentes distinctes

demi-tangente verticale (non dérivable)

Sens de la demi-tangente verticale : à droite, $+\infty$ la dirige vers le haut et $-\infty$ vers le bas ; à gauche, c'est l'inverse (le dénominateur $x - a$ est négatif).

Exemple : $f(x) = (x + 2)\sqrt{1 - x}$ sur $D_f =]-\infty, 1]$

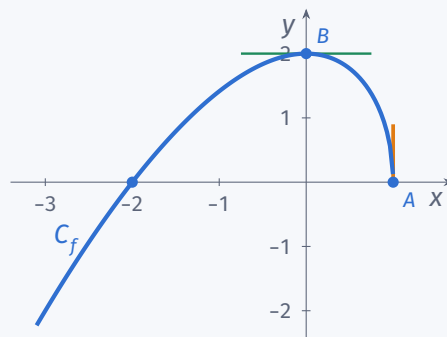
1. En 1. Pour $x < 1$: $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x + 2)\sqrt{1 - x}}{-(1 - x)} = -\frac{x + 2}{\sqrt{1 - x}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\infty$. f n'est pas dérivable (à gauche) en 1 : C_f a une **demi-tangente verticale** en $A(1, 0)$, dirigée vers le **haut** (limite $-\infty$ à gauche).

2. **Dérivée.** Sur $]-\infty, 1[$: $f'(x) = \sqrt{1 - x} - \frac{x + 2}{2\sqrt{1 - x}} =$

$$\frac{2(1 - x) - (x + 2)}{2\sqrt{1 - x}} = \frac{-3x}{2\sqrt{1 - x}}.$$

3. **Variations.** f' a le signe de $-x$: f croît sur $]-\infty, 0]$, décroît sur $[0, 1]$; maximum $\boxed{f(0) = 2}$, avec une tangente horizontale en $B(0, 2)$.

4. En $-\infty$. $f(x) \rightarrow -\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \left(1 + \frac{2}{x}\right)\sqrt{1 - x} \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction (Oy) . C_f coupe (Ox) en $(-2, 0)$ et en A .



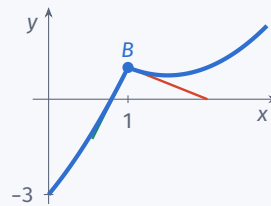
Exemple : un point anguleux : $h(x) = x^2 - 3|x - 1|$

Pour $x \geq 1$: $h(x) = x^2 - 3x + 3$; pour $x \leq 1$: $h(x) = x^2 + 3x - 3$;
 $h(1) = 1$.

À droite : $\frac{h(x) - 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = x - 2 \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} -1$; **à gauche :**

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = x + 4 \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 5.$$

$h'_d(1) = -1 \neq h'_g(1) = 5$: h n'est pas dérivable en 1 et $B(1, 1)$ est un **point anguleux**, de demi-tangentes $y = -x + 2$ ($x \geq 1$) et $y = 5x - 4$ ($x \leq 1$).

**Dérivée de la composée**

Si u est dérivable sur I , v dérivable sur J et $u(I) \subset J$, alors $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x)).$$

Idée de la preuve. Lorsque $u(x) \neq u(a)$: $\frac{v(u(x)) - v(u(a))}{x - a} = \frac{v(u(x)) - v(u(a))}{u(x) - u(a)} \times \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} v'(u(a)) \times u'(a)$ (avec $u(x) \rightarrow u(a)$).

Exemple : dériver une composée

règle $(u^n)' = n u' u^{n-1}$

$$[(x^2 - x)^5]' = 5(2x - 1)(x^2 - x)^4$$

règle $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$ ($u > 0$)

$$(\sqrt[3]{x^2 + 1})' = \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$$

règle $(\sin u)' = u' \cos u$

$$(\sin(3x^2))' = 6x \cos(3x^2)$$

règle $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ($u > 0$)

$$(\sqrt{x^2 + 2x + 5})' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$$

règle $(u^r)' = r u' u^{r-1}$ ($u > 0, r \in \mathbb{Q}$)

$$[(x^2 + 3)^{\frac{2}{3}}]' = \frac{4x}{3 \sqrt[3]{x^2 + 3}}$$

règle $(f(ax + b))' = a f'(ax + b)$

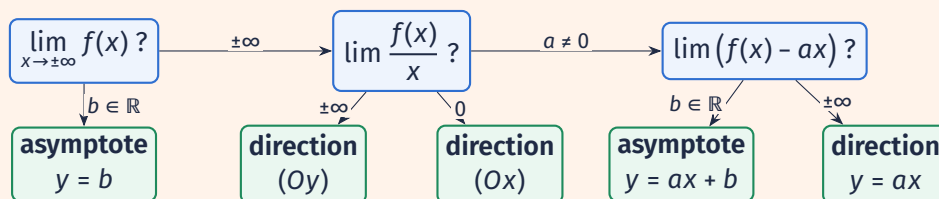
$$(f(2x - 1))' = 2f'(2x - 1)$$

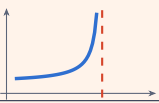
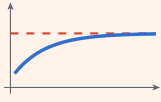
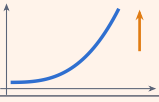
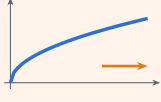
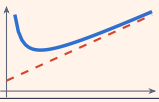
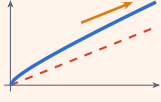
Remarque. Composée de deux fonctions de **même** sens : croissante ; de sens **contraires** : décroissante. $\sqrt{u}$ n'est en général **pas dérivable** là où u s'annule : on étudie alors le taux d'accroissement.

4

Branches infinies : le bilan1^{re} Bac2^e Bac PC

Dès que x ou $f(x)$ tend vers l'infini, C_f a une **branche infinie**. Il n'y a que six cas.



allure	si... alors C_f admet...	allure	si... alors C_f admet...
	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ (à droite ou à gauche) ⇒ asymptote verticale $x = a$ ex. : $\ln x$ en 0^+ ($x = 0$)		$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ ⇒ asymptote horizontale $y = b$ ex. : $\frac{2x+1}{x-1} \rightarrow 2$ en $\pm\infty$ ($y = 2$)
	$f(x) \rightarrow \pm\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \rightarrow \pm\infty$ (en $\pm\infty$) ⇒ branche parabolique de direction (Oy) ex. : x^2 , e^x en $+\infty$		$f(x) \rightarrow \pm\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$ (en $\pm\infty$) ⇒ branche parabolique de direction (Ox) ex. : $\sqrt{x}$, $\ln x$ en $+\infty$
	$\frac{f(x)}{x} \rightarrow a \neq 0$ et $f(x) - ax \rightarrow b \in \mathbb{R}$ ⇒ asymptote oblique $y = ax + b$ ex. : $2x - 1 + \frac{1}{x}$ ($y = 2x - 1$)		$\frac{f(x)}{x} \rightarrow a \neq 0$ et $f(x) - ax \rightarrow \pm\infty$ ⇒ branche parabolique de direction $y = ax$ ex. : $x - \ln x$ en $+\infty$ (direction $y = x$)

Remarque. Pour **montrer** que $y = ax + b$ est asymptote, il suffit d'établir $\lim (f(x) - (ax + b)) = 0$; la **position** de C_f par rapport à l'asymptote est donnée par le **signe** de $f(x) - (ax + b)$.

Concavité et points d'inflexion (f deux fois dérivable sur un intervalle I)

- Si $f'' \geq 0$ sur I (f' croissante), C_f est **convexe** sur I : elle est **au-dessus** de chacune de ses tangentes. Si $f'' \leq 0$, elle est **concave** : au-dessous de ses tangentes.
- Si f'' **s'annule en changeant de signe** en x_0 , le point $I(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** : C_f y traverse sa tangente. (De même si f' s'annule en x_0 sans changer de signe.)

Exemple : $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$: deux inflexions, dont une à tangente horizontale

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3) \text{ et}$$

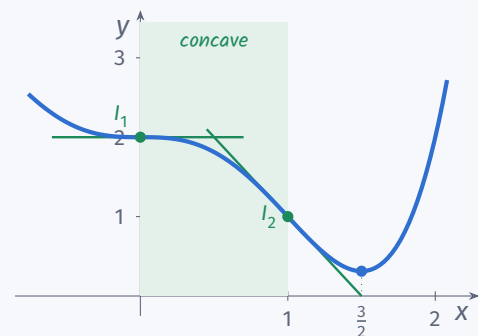
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1).$$

Variations : $f' \leq 0$ sur $]-\infty, \frac{3}{2}]$ (nulle en 0 **sans** changer de signe), $f' \geq 0$ ensuite : un seul extremum, le minimum $f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{16}$.

Concavité : $f'' > 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$ (convexe), $f'' < 0$ sur $]0, 1[$ (concave).

Inflexions : f'' change de signe en 0 et en 1 :

- $I_1(0, 2)$, de tangente **horizontale** $y = 2$ que la courbe traverse : ce n'est **pas** un extremum ;
- $I_2(1, 1)$, de tangente $y = -2x + 3$ ($f'(1) = -2$).



5

Le logarithme népérien

Définition : la fonction $\ln$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$: elle y admet des primitives. La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est la **primitive** de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 :

$$\ln 1 = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Comme $\frac{1}{x} > 0$, $\ln$ est **strictement croissante** : $\ln a = \ln b \iff a = b$, $\ln a < \ln b \iff a < b$;
 $\ln x < 0$ sur $]0, 1[$ et $\ln x > 0$ sur $]1, +\infty[$.

Propriété fondamentale et conséquences ($a, b > 0, r \in \mathbb{Q}$)

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b} \quad \ln \frac{1}{b} = -\ln b \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \ln(a^r) = r \ln a \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Démonstration. Pour $a > 0$ fixé, $\psi(x) = \ln(ax) - \ln x$ est dérivable sur l'**intervalle** $]0, +\infty[$ et $\psi'(x) = \frac{a}{ax} - \frac{1}{x} = 0$: ψ est constante, égale à $\psi(1) = \ln a$. Ensuite $\ln b + \ln \frac{1}{b} = \ln 1 = 0$, et $\ln(a^n) = n \ln a$ par récurrence.

Le nombre e et les limites

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$: $\ln$ est une **bijection** de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Le réel e est l'unique antécédent de 1 : $\boxed{\ln e = 1}$, $e \approx 2,718$, et $\ln(e^r) = r$.

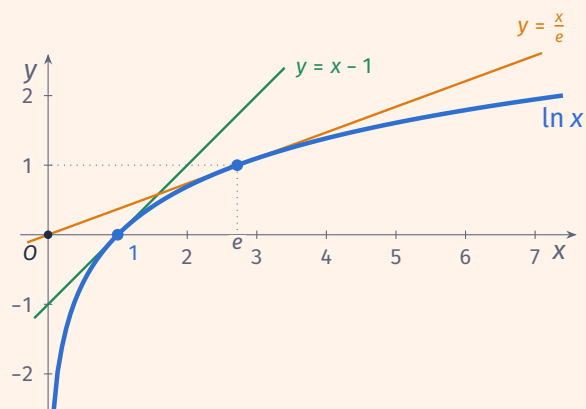
Limites de référence (section 8) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Démonstration des bornes. $\ln(2^n) = n \ln 2 \rightarrow +\infty$ ($\ln 2 > 0$) : $\ln$ n'est pas majorée, et comme elle est croissante, $\ln x \rightarrow +\infty$. En 0^+ , on pose $t = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$: $\ln x = -\ln t \rightarrow -\infty$. La limite en 1 est le nombre dérivé $\ln'(1) = 1$.

- $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$: $C_{\ln}$ est **concave**, donc sous ses tangentes. En 1 :

$$\boxed{\ln x \leq x - 1}.$$

- La tangente en e ,
 $y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{x}{e}$, passe par l'origine.
- $x = 0$ est asymptote verticale ; en $+\infty$, branche parabolique de direction (Ox) ($\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$).
- **Domaine** : $\ln(u(x))$ existe
 $\iff u(x) > 0$.



Méthode : résoudre une équation ou une inéquation avec ln

1. Domaine : chaque $\ln(\dots)$ exige $(\dots) > 0$. **2.** Se ramener à $\ln A = \ln B$ (ou $\ln A < \ln B$) avec $\ln a + \ln b = \ln(ab)$, puis **comparer** A et B. **3.** $(\ln x)^2$: poser $X = \ln x$. **4.** Garder les solutions du domaine.

Exemple : une équation, une inéquation

- $\ln(x+1) + \ln(x-3) = \ln(2x-3)$. **Domaine** : $x > -1$, $x > 3$ et $x > \frac{3}{2}$, soit $D =]3, +\infty[$. Sur D , l'équation s'écrit $\ln[(x+1)(x-3)] = \ln(2x-3)$, soit $x^2 - 2x - 3 = 2x - 3$, c'est-à-dire $x(x-4) = 0$. Seul 4 est dans D : $S = \{4\}$.
- $(\ln x)^2 - \ln x - 6 \leq 0$ ($x > 0$). Avec $X = \ln x$: $X^2 - X - 6 = (X-3)(X+2) \leq 0 \iff -2 \leq X \leq 3$, donc $\ln(e^{-2}) \leq \ln x \leq \ln(e^3)$ et $S = [e^{-2}, e^3]$.

Définition : logarithme de base a ($a > 0, a \neq 1$)

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ pour $x > 0$. Il vérifie les mêmes règles que $\ln$ ($\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \dots$), avec $\log_a a = 1$, $\log_a(a^r) = r$ et $(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ (croissant si $a > 1$, décroissant si $0 < a < 1$). Le **logarithme décimal** est $\log = \log_{10}$: $\log(10^n) = n$.

Exemple : combien de chiffres pour 3^{50} ?

Un entier $N \geq 1$ s'écrit avec k chiffres $\iff 10^{k-1} \leq N < 10^k \iff k-1 \leq \log N < k$. Or $\log(3^{50}) = 50 \log 3 \approx 23,86$, donc $10^{23} \leq 3^{50} < 10^{24}$: 3^{50} s'écrit avec **24 chiffres**.

6

L'exponentielle**Définition : la fonction exponentielle**

$\ln$ est continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$: sa réciproque est la fonction **exponentielle**, $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$. Comme $\exp(r) = e^r$ pour tout rationnel r (car $\ln(e^r) = r$), on note $\exp(x) = e^x$ pour tout réel x :

pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$: $e^x = y \iff x = \ln y$ $\ln(e^x) = x$, $e^{\ln y} = y$.

Propriétés (a, b réels, $r \in \mathbb{Q}$)

$$e^x > 0 ; e^0 = 1 ; e^1 = e \quad e^{a+b} = e^a e^b \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad (e^a)^r = e^{ra}$$

$$e^a = e^b \iff a = b ; e^a < e^b \iff a < b \quad \exp \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } (e^x)' = e^x$$

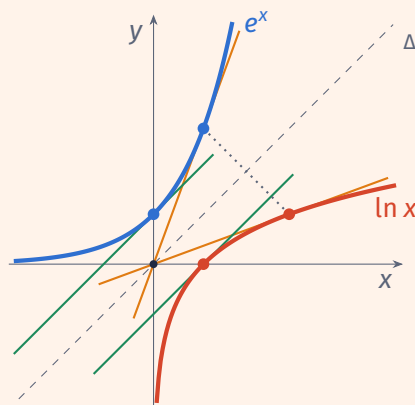
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstrations.

$\ln(e^a e^b) = \ln e^a + \ln e^b = a + b = \ln(e^{a+b})$ et $\ln$ est injective. **Dérivée** : $\ln$ est dérivable de dérivée non nulle, donc (section 2) $\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{1/e^x} = e^x$.

Les limites aux bornes viennent de la réciproque ; $\frac{e^x-1}{x}$ est le taux d'accroissement de $\exp$ en 0 ; les deux autres sont démontrées en section 8.

Courbe : $(e^x)'' = e^x > 0$: $C_{\exp}$ est **convexe**, au-dessus de sa tangente en 0 : $e^x \geq 1+x$. $y=0$ est asymptote en $-\infty$; en $+\infty$, branche parabolique de direction (Oy) . La tangente en 1, $y = e(x-1) + e = ex$, passe par O : c'est la symétrique de la tangente $y = \frac{x}{e}$ à $C_{\ln}$ en $(e, 1)$.



symétrie par rapport à Δ : tangentes $y = x \pm 1$ et tangentes $y = ex$, $y = \frac{x}{e}$ issues de O

Méthode : équations et inéquations : poser $X = e^x > 0$

$e^{2x} = X^2$, $e^{x+1} = eX$, $e^{-x} = \frac{1}{X}$; multiplier par $e^x > 0$ ne change pas le sens d'une inégalité. On résout en X , on **rejette** les valeurs $X \leq 0$, puis on revient à $x = \ln X$.

Exemple : deux résolutions

- $e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^2 = 0 \iff X^2 - 3eX + 2e^2 = 0 \iff (X - e)(X - 2e) = 0$. Donc $e^x = e$ ou $e^x = 2e$: $S = \{1; 1 + \ln 2\}$ (car $\ln(2e) = \ln 2 + 1$).
- $2e^x - 7 + 3e^{-x} \leq 0$: on multiplie par $e^x > 0$: $2X^2 - 7X + 3 \leq 0 \iff (2X - 1)(X - 3) \leq 0 \iff \frac{1}{2} \leq e^x \leq 3$, donc $S = [-\ln 2, \ln 3]$.

7 $\ln u$, e^u , a^x et x^a

Définition : exponentielle de base a et puissance réelle

Pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$: $a^x = e^{x \ln a}$; pour $x > 0$ et $a \in \mathbb{R}$: $x^a = e^{a \ln x}$. Pour x rationnel, on retrouve les puissances déjà connues ($\ln(a^r) = r \ln a$). Les règles restent vraies : $a^{x+y} = a^x a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $(ab)^x = a^x b^x$, $\ln(a^x) = x \ln a$; et si $a \neq 1$: $a^x = y \iff x = \log_a y$ ($y > 0$).

Le tableau des dérivées et des domaines

fonction	existe si...	dérivée	à retenir
$\ln(u(x))$	$u(x) > 0$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	mêmes variations que u
$\ln u(x) $	$u(x) \neq 0$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	primitives de $\frac{u'}{u}$: $\ln u + C$
$e^{u(x)}$	$x \in D_u$	$u'(x) e^{u(x)}$	mêmes variations que u ; primitives de $u' e^u$: $e^u + C$
a^x ($a > 0$)	$x \in \mathbb{R}$	$\ln a \times a^x$	croissante si $a > 1$, décroissante si $0 < a < 1$
x^a ($a \in \mathbb{R}$)	$x > 0$	$a x^{a-1}$	croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$

Démonstrations. $\ln u$ et e^u : dérivée de la composée (section 3) ; $\ln|u|$: si $u < 0$, $\ln(-u)$ a pour

dérivée $\frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u}$; $a^x = e^{x \ln a}$ et $x^a = e^{a \ln x}$: $(e^{x \ln a})' = \ln a e^{x \ln a}$ et $(e^{a \ln x})' = \frac{a}{x} e^{a \ln x} = a x^{a-1}$.

Exemple : étude type 1 : $f(x) = \ln(2e^x + 1)$ sur $\mathbb{R}$

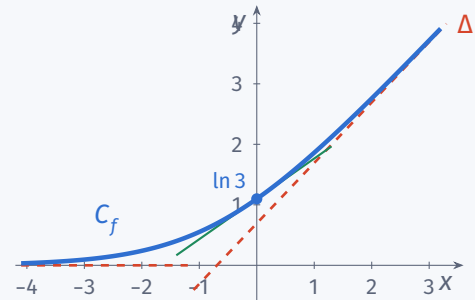
Domaine : $2e^x + 1 > 0$ pour tout x , donc $D_f = \mathbb{R}$. En $-\infty$: $2e^x + 1 \rightarrow 1$, donc $f(x) \rightarrow \ln 1 = 0$: asymptote horizontale $y = 0$, et $f(x) > 0$ (car $2e^x + 1 > 1$).

En $+\infty$: on factorise dans le ln : $f(x) = \ln[e^x(2 + e^{-x})] = x + \ln(2 + e^{-x})$, donc $f(x) - (x + \ln 2) = \ln(1 + \frac{1}{2}e^{-x}) \rightarrow 0$: **asymptote oblique** Δ : $y = x + \ln 2$, et C_f est **au-dessus** de Δ (c'est le ln d'un nombre > 1).

Variations, concavité : $f'(x) = \frac{2e^x}{2e^x + 1} > 0$ et $f''(x) = \frac{2e^x}{(2e^x + 1)^2} > 0$: f croît strictement, C_f est convexe ; $f(0) = \ln 3$, $f'(0) = \frac{2}{3}$.

Réciproque : f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$ et, pour $y > 0$, $\ln(2e^x + 1) = y \iff e^x = \frac{e^y - 1}{2}$:

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{e^x - 1}{2}.$$



Exemple : étude type 2 : $u(x) = x 2^{-x} = x e^{-x \ln 2}$ sur $\mathbb{R}$

Dérivée : $u'(x) = 2^{-x} - x \ln 2 \times 2^{-x} = 2^{-x}(1 - x \ln 2)$, du signe de $1 - x \ln 2$: u croît sur $]-\infty, \frac{1}{\ln 2}]$ et décroît ensuite.

Maximum : comme $2^{-\frac{1}{\ln 2}} = e^{-\frac{\ln 2}{\ln 2}} = e^{-1}$:

$$u\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{e \ln 2} \approx 0,53,$$

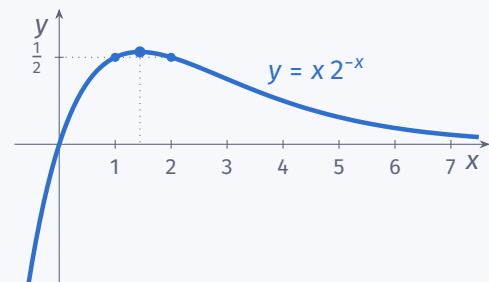
atteint en $\frac{1}{\ln 2} = \log_2 e \approx 1,44$.

Limites : en $+\infty$, avec $X = x \ln 2$:

$u(x) = \frac{1}{\ln 2} X e^{-X} \rightarrow 0$ (asymptote $y = 0$) ; en $-\infty$:

$u(x) \rightarrow -\infty$ et $\frac{u(x)}{x} = 2^{-x} \rightarrow +\infty$ (direction (Oy)).

Clin d'œil : $u(1) = u(2) = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.



8

Croissances comparées

Croissances comparées ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$$

$\ln x$

$\ll$

$\sqrt{x}$

$\ll$

x

$\ll$

x^n

$\ll$

e^x

en $+\infty$, chacune est « écrasée » par la suivante : le quotient « petite / grande » tend vers 0

Démonstrations. (a) Pour $t > 0$, $\ln t \leq t-1 < t$ (section 5); avec $t = \sqrt{x}$: $\frac{1}{2} \ln x < \sqrt{x}$, donc $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$ pour $x > 1$: on conclut par les gendarmes. (b) En 0^+ , avec $t = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$: $x \ln x = -\frac{\ln t}{t} \rightarrow 0$. (c) Avec $X = e^x$: $\frac{e^x}{x} = \frac{X}{\ln X} \rightarrow +\infty$ en $+\infty$, et $x e^x = X \ln X \rightarrow 0$ en $-\infty$ ($X \rightarrow 0^+$). (d) Puissances: $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}$, $\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n$, $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2 \ln X}{X}$ ($X = \sqrt{x}$). (e) $\frac{\ln(1+x)}{x}$ et $\frac{e^x-1}{x}$ sont des taux d'accroissement: leurs limites sont $\ln'(1) = 1$ et $\exp'(0) = 1$.

Méthode : lever une forme indéterminée avec $\ln$ ou $\exp$

- Factoriser par le terme dominant** (celui qui « gagne » d'après la hiérarchie).
- Changer de variable** pour retrouver une limite de référence ($X = \sqrt{x}$, $X = \frac{1}{x}$, $X = -x$, $X = kx \dots$).
- Factoriser à l'intérieur du $\ln$** : $\ln(A+B) = \ln A + \ln\left(1 + \frac{B}{A}\right)$.
- Reconnaître un nombre dérivé** ($\frac{\ln(1+X)}{X}$, $\frac{e^X-1}{X}$ avec $X \rightarrow 0$).

Exemple : six limites entièrement rédigées

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^4}{x^2}$: avec $X = \sqrt{x}$, $\ln x = 2 \ln X$ et $\frac{(\ln x)^4}{x^2} = \frac{(2 \ln X)^4}{X^4} = 16 \left(\frac{\ln X}{X}\right)^4 \rightarrow \boxed{0}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (\ln x)^3$: avec $X = x^{\frac{2}{3}} \rightarrow 0^+$, $x^2 = X^3$ et $\ln x = \frac{3}{2} \ln X$, donc $x^2 (\ln x)^3 = \frac{27}{8} (X \ln X)^3 \rightarrow \boxed{0}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2e^{\frac{x}{2}})$ (forme $\infty - \infty$): $x^3 - 2e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \left(x^3 e^{-\frac{x}{2}} - 2\right)$, et avec $X = \frac{x}{2}$, $x^3 e^{-\frac{x}{2}} = 8X^3 e^{-X} \rightarrow 0$: la limite vaut $\boxed{-\infty}$. L'exponentielle l'emporte.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^5}$: avec $X = \sqrt{x}$, $\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^5} = \frac{e^X}{X^{10}} \rightarrow \boxed{+\infty}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x + e^x) - x)$: $\ln(x + e^x) = \ln[e^x(1 + x e^{-x})] = x + \ln(1 + x e^{-x})$, donc la limite vaut $\ln 1 = \boxed{0}$: la droite $y = x$ est asymptote à la courbe de $x \mapsto \ln(x + e^x)$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{e^{3x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{3x}{e^{3x}-1} \times \frac{2}{3} = 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

9

Fonction auxiliaire et signe

Méthode : la « méthode g » de l'examen national

Quand le signe de $f'(x)$ ne se lit pas directement : **1. Factoriser**: $f'(x) = \frac{g(x)}{(\text{positif})}$ ou $f'(x) = (\text{positif}) \times g(x)$. **2. Étudier g** (la « partie I » du sujet): g' , variations, limites ou valeurs. **3.** Si g change de signe: montrer que $g(x) = 0$ a une **unique** solution α (corollaire du TVI) et l'**encadrer**. **4.** En déduire le **signe de g** , donc de f' , puis le tableau de f . **5. Exploiter** $g(\alpha) = 0$ pour simplifier $f(\alpha)$: on remplace la quantité « transcendante » ($\ln \alpha$, $e^\alpha \dots$) par une expression rationnelle en α .

Exemple : partie I : $g(x) = 2 - x e^x$ sur $\mathbb{R}$

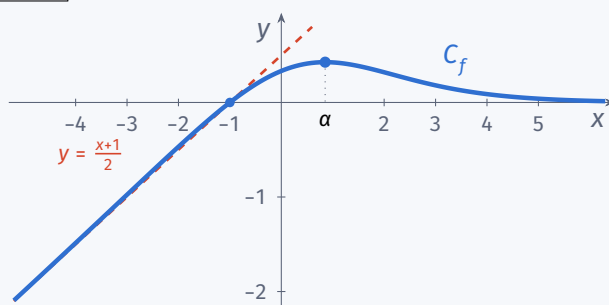
- 1. Variations.** $g'(x) = -(e^x + x e^x) = -(x+1)e^x$: g croît sur $]-\infty, -1]$ et décroît sur $[-1, +\infty[$.
- 2. Limites.** En $-\infty$: $x e^x \rightarrow 0$ (croissances comparées), donc $g(x) \rightarrow 2$. En $+\infty$: $x e^x \rightarrow +\infty$, donc $g(x) \rightarrow -\infty$.
- 3. Unique zéro.** Sur $]-\infty, 0]$: $x e^x \leq 0$, donc $g(x) \geq 2 > 0$. Sur $[0, +\infty[$, g est continue et strictement décroissante, de $g(0) = 2$ à $-\infty$: l'équation $g(x) = 0$ a une **unique** solution α , et $\alpha > 0$. $g(0,85) \approx 0,011 > 0$ et $g(0,86) \approx -0,032 < 0$: **$0,85 < \alpha < 0,86$** .
- 4. Signe.** $g(x) > 0$ sur $]-\infty, \alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha, +\infty[$; de plus $\alpha e^\alpha = 2$.

Exemple : partie II : $f(x) = \frac{x+1}{e^x+2}$ sur $\mathbb{R}$

- 1. Limites et asymptotes.** En $+\infty$: $f(x) = \frac{x e^{-x} + e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} \rightarrow \frac{0+0}{1} = 0$: asymptote horizontale $y = 0$. En $-\infty$: $x+1 \rightarrow -\infty$ et $e^x+2 \rightarrow 2$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$; et $f(x) - \frac{x+1}{2} = -\frac{(x+1)e^x}{2(e^x+2)} \rightarrow 0$: asymptote oblique $y = \frac{x+1}{2}$ en $-\infty$.

- 2. Dérivée.** $f'(x) = \frac{(e^x+2) - (x+1)e^x}{(e^x+2)^2} = \frac{g(x)}{(e^x+2)^2}$: $f'(x)$ a le **signe de $g(x)$** , d'où le tableau.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{\alpha}{2}$	0



- 3. La valeur de $f(\alpha)$.** $g(\alpha) = 0$ donne $e^\alpha = \frac{2}{\alpha}$, donc $f(\alpha) = \frac{\alpha+1}{\frac{2}{\alpha}+2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2(\alpha+1)} = \frac{\alpha}{2}$: le sommet $(\alpha, \frac{\alpha}{2})$ est sur la droite $y = \frac{x}{2}$, et **$0,425 < f(\alpha) < 0,43$** .
- 4. Signe de f :** celui de $x+1$; C_f coupe (Ox) en $(-1, 0)$.

Remarque. Réflexe : dès qu'un sujet introduit α tel que $g(\alpha) = 0$, la question suivante demande presque toujours de **remplacer e^α** (ou $\ln \alpha$) grâce à cette égalité : ici $e^\alpha = \frac{2}{\alpha}$.

10

Une étude complète type examen

Le sujet (inventé, au format de l'examen national)

Partie I. Soit $g(x) = e^x - 2x$ sur $\mathbb{R}$. **1)** Étudier les variations de g . **2)** En déduire que $g(x) > 0$ pour tout réel x .

Partie II. Soit $f(x) = (x+1)(1+2e^{-x})$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

- 1) a)** Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. **b)** Montrer que $\Delta : y = x+1$ est asymptote à C_f en $+\infty$ et étudier leur position relative. **c)** Étudier la branche infinie de C_f en $-\infty$.
- 2) a)** Montrer que $f'(x) = e^{-x}g(x)$ et dresser le tableau de variations de f . **b)** Montrer que f réalise

une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(3)$.

3) a) Montrer que la tangente T à C_f en 0 est parallèle à Δ . b) Montrer que C_f est au-dessous de T (on admettra que $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x).

4) Calculer $f''(x)$, étudier la concavité de C_f et préciser son point d'inflexion I . Tracer Δ , T et C_f .

5) a) Calculer, en cm^2 , l'aire A du domaine limité par C_f , Δ et les droites $x = -1$ et $x = 0$. b) Pour $\lambda > -1$, calculer $A(\lambda) = \int_{-1}^{\lambda} (f(x) - x - 1) dx$ puis $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

10.1 Partie I, limites et branches infinies

1) $g'(x) = e^x - 2$: $g'(x) < 0$ sur $]-\infty, \ln 2[$ et $g'(x) > 0$ sur $]\ln 2, +\infty[$. g admet donc un **minimum** en $\ln 2$: $g(\ln 2) = 2 - 2 \ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$ (car $\ln 2 < 1$). Donc pour tout réel x : $g(x) > 0$, c'est-à-dire $e^x > 2x$.

1a) En $+\infty$: $x+1 \rightarrow +\infty$ et $1+2e^{-x} \rightarrow 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. En $-\infty$: $x+1 \rightarrow -\infty$ et $1+2e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

1b) $f(x) - (x+1) = 2(x+1)e^{-x} = 2xe^{-x} + 2e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 + 0 = 0$ (croissances comparées) : Δ est **asymptote oblique** à C_f en $+\infty$. Comme $e^{-x} > 0$, $f(x) - (x+1)$ a le signe de $x+1$: C_f est **au-dessus** de Δ sur $]-1, +\infty[$, **au-dessous** sur $]-\infty, -1[$; elles se coupent en $A(-1, 0)$, qui est aussi le seul point de C_f sur (Ox) (car $1 + 2e^{-x} > 0$).

1c) $\frac{f(x)}{x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)(1 + 2e^{-x}) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$: **branche parabolique** de direction (Oy) en $-\infty$.

10.2 Variations, bijection, tangente

2a) $f'(x) = 1 \times (1 + 2e^{-x}) + (x+1)(-2e^{-x}) = 1 - 2xe^{-x}$, soit $f'(x) = e^{-x}(e^x - 2x) = e^{-x}g(x)$. Comme $e^{-x} > 0$ et $g(x) > 0$ (partie I) : $f'(x) > 0$: f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

2b) f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, de limites $-\infty$ et $+\infty$: c'est une **bijection** de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. $f(0) = 3$ et $f'(0) = 1 \neq 0$, donc $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(0)} = \boxed{1}$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$	$-\infty$	0	3	$+\infty$

$f(-1) = 0$ et $f(0) = 3$: valeurs « de passage »

3a) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit $T : y = x + 3$. T et Δ ont le même coefficient directeur 1 : elles sont **parallèles**.

3b) $f(x) - (x+3) = 2(x+1)e^{-x} - 2 = 2e^{-x}[(x+1) - e^x] \leq 0$, car $e^x \geq 1 + x$; l'égalité n'a lieu qu'en 0. Donc C_f est **au-dessous** de T , et ne la touche qu'au point $B(0, 3)$.

10.3 Concavité, courbe et aire

4) $f'(x) = 1 - 2xe^{-x}$, donc $f''(x) = -2(e^{-x} - xe^{-x}) = 2(x-1)e^{-x}$, du signe de $x-1$: C_f est **concave** sur $]-\infty, 1[$ et **convexe** sur $[1, +\infty[$; f'' s'annule en changeant de signe en 1 : $I\left(1, 2 + \frac{4}{e}\right)$ est le point d'inflexion ($2 + \frac{4}{e} \approx 3,47$), de tangente $y = \left(1 - \frac{2}{e}\right)x + 1 + \frac{6}{e}$ (pente $f'(1) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0,26$).

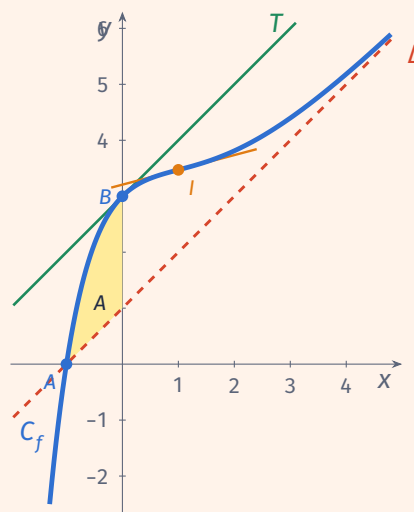
Tracé : on place A, B, I , puis Δ et T (parallèles) ;
 $f(-1,25) \approx -2,00$, $f(2) \approx 3,81$, $f(4) \approx 5,18$.

5a) Sur $[-1, 0]$, C_f est au-dessus de Δ ; une unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$: $A = 4 \times 2I \text{ cm}^2$, avec
 $I = \int_{-1}^0 (x+1)e^{-x} dx$.

Intégration par parties : $u(x) = x+1$, $v'(x) = e^{-x}$,
 $u'(x) = 1$, $v(x) = -e^{-x}$:

$$\begin{aligned} I &= \left[-(x+1)e^{-x} \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^{-x} dx \\ &= -1 + \left[-e^{-x} \right]_{-1}^0 = -1 + (e-1) = e-2. \end{aligned}$$

Donc $A = 8(e-2) \text{ cm}^2 \approx 5,75 \text{ cm}^2$.



Δ et T parallèles ; aire A en jaune

5b) Le même calcul donne la primitive $F(x) = -(x+2)e^{-x}$ de $(x+1)e^{-x}$ (contrôle : $F'(x) = -e^{-x} + (x+2)e^{-x} = (x+1)e^{-x}$), d'où

$$A(\lambda) = 2(F(\lambda) - F(-1)) = 2e - 2(\lambda+2)e^{-\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \boxed{2e} \quad (\text{car } \lambda e^{-\lambda} \rightarrow 0 \text{ et } e^{-\lambda} \rightarrow 0).$$

Remarque. Joli résultat : la région **infinie** comprise entre C_f et Δ , à droite de A , a une aire **finie**, égale à $2e$ unités d'aire.

11 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Les quatre outils

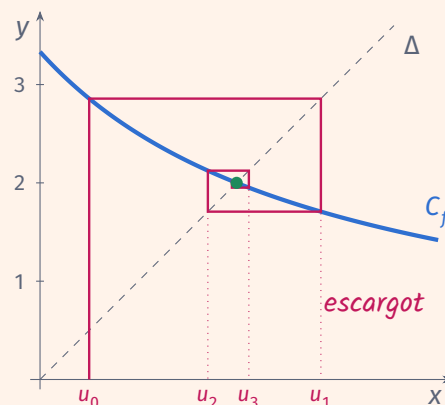
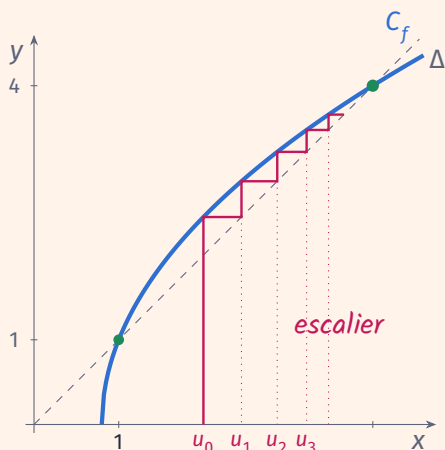
Soit f définie sur un intervalle I , $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Intervalle stable :** si $f(I) \subset I$, alors $u_n \in I$ pour tout n (récurrence).
- Monotonie :** si f est **croissante** sur I , la suite est **monotone** : croissante si $u_1 \geq u_0$, décroissante si $u_1 \leq u_0$. Plus directement : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ a le signe de $f(x) - x$ sur I .
- Convergence :** toute suite croissante et majorée (ou décroissante et minorée) est convergente.
- Limite = point fixe :** si (u_n) converge vers $\ell \in I$ et si f est **continue** en ℓ , alors $\boxed{f(\ell) = \ell}$.

Démonstrations. (2) Si $u_1 \geq u_0$ et $u_{n+1} \geq u_n$, alors $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, soit $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. (4) $u_{n+1} \rightarrow \ell$, et $u_{n+1} = f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ par continuité : l'unicité de la limite donne $f(\ell) = \ell$.

Méthode : lire la suite sur la courbe

On trace C_f et $\Delta : y = x$. Depuis u_0 (sur l'axe des abscisses), on monte **verticalement** jusqu'à C_f (ordonnée u_1), puis on rejoint Δ **horizontalement** pour reporter u_1 en abscisse, et on recommence. f croissante : **escalier** (suite monotone) ; f décroissante : **escargot** (termes alternativement de part et d'autre de ℓ). Les limites possibles sont les abscisses des points communs à C_f et Δ .



Exemple : escalier : $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \sqrt{5u_n - 4}$

$f(x) = \sqrt{5x - 4}$ est continue et croissante sur $\left[\frac{4}{5}, +\infty\right[$.

- **Stabilité :** $f(2) = \sqrt{6} \approx 2,45$ et $f(4) = 4$, donc $f([2, 4]) = [\sqrt{6}, 4] \subset [2, 4]$: $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout n .
- **Monotonie :** pour $x \in [1, 4]$, $f(x) - x = \frac{(5x - 4) - x^2}{\sqrt{5x - 4} + x} = \frac{-(x - 1)(x - 4)}{\sqrt{5x - 4} + x} \geq 0$: $u_{n+1} \geq u_n$, la suite est **croissante**.
- **Limite :** croissante et majorée par 4, elle converge vers $\ell \in [2, 4]$, et f est continue en ℓ : $\sqrt{5\ell - 4} = \ell \iff \ell^2 - 5\ell + 4 = 0 \iff \ell \in \{1, 4\}$. Comme $\ell \geq 2$: $\lim u_n = 4$. (Le point fixe 1 est « répulsif » : la suite s'en éloigne.)

Exemple : escargot : $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = \frac{10}{u_n + 3}$

$f(x) = \frac{10}{x+3}$ est **décroissante** sur $[0, +\infty[$: la suite n'est pas monotone.

- **Point fixe :** $\frac{10}{\ell+3} = \ell \iff \ell^2 + 3\ell - 10 = 0 \iff (\ell - 2)(\ell + 5) = 0$: le seul point fixe positif est 2. Et $u_n > 0$ pour tout n (récurrence).
- **Contraction :** $u_{n+1} - 2 = \frac{10 - 2u_n - 6}{u_n + 3} = \frac{-2(u_n - 2)}{u_n + 3}$, donc $|u_{n+1} - 2| = \frac{2|u_n - 2|}{u_n + 3} \leq \frac{2}{3}|u_n - 2|$ (car $u_n + 3 \geq 3$).
- Par récurrence, $|u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - 2| = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$: $\lim u_n = 2$. Le signe **change** à chaque étape ($u_{n+1} - 2$ et $u_n - 2$ sont de signes contraires) : c'est l'escargot.

12

Les pièges classiques

✗ Faux	✓ Vrai
f continue sur $[a, b]$ et $f(a)f(b) < 0$, donc $f(x) = 0$ a une unique solution	au moins une ; l'unicité exige la stricte monotonie
la réciproque de f est $\frac{1}{f}$	non : pour $f(x) = x^3$ sur $[0, +\infty[$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ et non $\frac{1}{x^3}$

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(y)}$	$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$: on dérive f en l' antécédent
$(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$	$x^{\frac{p}{q}}$ n'est défini que pour $x > 0$ (et $\sqrt[q]{x}$ pour $x \geq 0$) ; on écrit plutôt : $(-2)^3 = -8$
$\lim \frac{f(x)}{x} = a$, donc $y = ax$ est asymptote	il faut encore $\lim (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$; si cette limite est infinie : branche parabolique
$f''(a) = 0$, donc C_f a un point d'inflexion en a	il faut que f'' change de signe : x^4 a $f''(0) = 0$, sans inflexion
$\ln(a + b) = \ln a + \ln b$	$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; le $\ln$ d'une somme ne se sépare pas
$\ln(x^2) = 2 \ln x$ pour tout $x \neq 0$	$\ln(x^2) = 2 \ln x $; $2 \ln x$ n'existe que pour $x > 0$
$\ln(u(x))$ existe si $u(x) \geq 0$	il faut $u(x) > 0$ strictement : $\ln 0$ n'existe pas
$u_n \rightarrow \ell$, donc $f(\ell) = \ell$, sans rien vérifier	il faut f continue en ℓ ; et parmi les points fixes, on choisit grâce aux bornes de la suite

13

Les astuces des concours

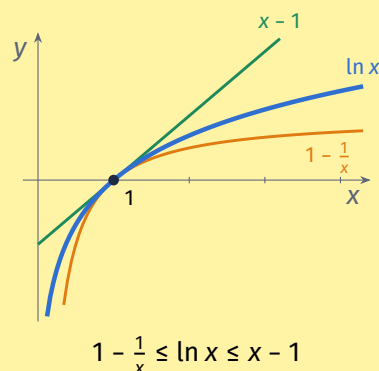
★ Astuce de concours : les deux inégalités-reines

$$\ln x \leq x - 1 \quad (x > 0)$$

$$e^x \geq 1 + x \quad (x \in \mathbb{R})$$

avec égalité **seulement** en $x = 1$ (resp. $x = 0$) : ce sont les tangentes en $(1, 0)$ et en $(0, 1)$ de deux courbes symétriques, l'une concave, l'autre convexe. **Preuve express** : $\varphi(x) = x - 1 - \ln x$ a pour dérivée $\frac{x-1}{x}$, donc un minimum $\varphi(1) = 0$.

1. Encadrer. En remplaçant x par $\frac{1}{x}$: $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$, d'où $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ (figure). Avec $x = \frac{a}{b}$ ($0 < b < a$) : $\frac{a-b}{a} \leq \ln a - \ln b \leq \frac{a-b}{b}$; par exemple $\frac{1}{101} \leq \ln(1,01) \leq \frac{1}{100}$.



2. Une limite par encadrement. Pour $x > 1$, on divise par $x - 1 > 0$: $\frac{1}{x} \leq \frac{\ln x}{x-1} \leq 1$; les gendarmes donnent $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ (de même à gauche, où les inégalités se renversent).
3. Compter les solutions. « $e^x = 1 + x$ » et « $\ln x = x - 1$ » ont chacune une **seule** solution (0 et 1) : c'est le cas d'égalité, inutile de faire une étude !

★ Astuce de concours : changer de variable dans une limite

On cherche à faire apparaître une limite de référence :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) : \text{avec } t = \frac{3}{x} \rightarrow 0, \quad x \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) = 3 \times \frac{\ln(1+t)}{t} \rightarrow \boxed{3}.$$

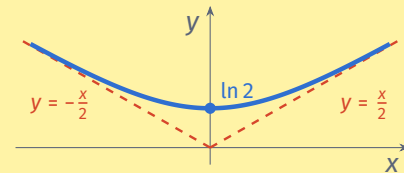
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^4}{\sqrt{x}}$: on choisit $t = x^{\frac{1}{8}}$, pour que les puissances « collent » : $\ln x = 8 \ln t$, $\sqrt{x} = t^4$
et $\frac{(\ln x)^4}{\sqrt{x}} = 8^4 \left(\frac{\ln t}{t}\right)^4 \rightarrow \boxed{0}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-\sqrt{x}}$: avec $t = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$, $x^3 e^{-\sqrt{x}} = t^6 e^{-t} = \frac{t^6}{e^t} \rightarrow \boxed{0}$ (l'exponentielle écrase la puissance).

★ **Astuce de concours : la parité cachée**

$f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{x}{2}$ ne « ressemble » à rien... mais en factorisant $e^{\frac{x}{2}}$ dans le $\ln$:

$$f(x) = \ln \left[e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) \right] - \frac{x}{2} = \ln \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right),$$

expression inchangée quand on remplace x par $-x$: f est **paire**, C_f est symétrique par rapport à (Oy) : on l'étudie sur $[0, +\infty[$ seulement. Minimum $f(0) = \ln 2$; en $+\infty$: $f(x) - \frac{x}{2} = \ln(1 + e^{-x}) \rightarrow 0$, asymptote $y = \frac{x}{2}$; et, par parité, $y = -\frac{x}{2}$ en $-\infty$.



★ **Astuce de concours : la symétrie qui divise le travail par deux : $f(2a - x)$**

Centre $\Omega(a, b)$: pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$. **Axe** $x = a$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.

- $f(x) = 2x - 1 + \ln \frac{x}{2-x}$ sur $]0, 2[$ (domaine symétrique par rapport à 1) : $f(2-x) = 3 - 2x + \ln \frac{2-x}{x} = 3 - 2x - \ln \frac{x}{2-x}$, donc $f(2-x) + f(x) = 2$: $\Omega(1, 1)$ est **centre de symétrie** de C_f . On étudie f sur $[1, 2[$ et on complète par symétrie ; Ω est même un point d'inflexion ($f''(x) = \frac{4(x-1)}{x^2(2-x)^2}$ change de signe en 1).
- $h(x) = \ln(x^2 - 6x + 10)$ (définie sur $\mathbb{R}$, car $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 > 0$) : $(6-x)^2 - 6(6-x) + 10 = x^2 - 6x + 10$, donc $h(6-x) = h(x)$: la droite $x = 3$ est **axe de symétrie** ; et $h(3) = \ln 1 = 0$ est le minimum.

★ **Astuce de concours : racine évidente + stricte monotonie**

Résoudre $(\sqrt{3})^x + 1 = 2^x$. On divise par $2^x > 0$: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$. Le membre de gauche est une somme de deux fonctions **strictement décroissantes** (bases dans $]0, 1[$), donc il prend au plus une fois la valeur 1. Or pour $x = 2$: $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$. Donc $S = \{2\}$. **Réflexe** : chercher une solution « évidente » (souvent 0, 1, 2), puis prouver l'**unicité** par la stricte monotonie.

14

Exercices de la partie 3

Notations du cours : D_f , C_f (courbe dans un repère orthonormé), $\tilde{f}$ (prolongement par continuité), f^{-1} (réciproque), $\sqrt[n]{x}$ pour $x \geq 0$, $\log_a = \frac{\ln}{\ln a}$, $\log = \log_{10}$, $E(x)$ partie entière. Les valeurs approchées données servent seulement aux figures.

■ 14.1 Niveau 1 • Automatismes

Exercice 37 Continuité : prolonger et recoller ★

corrigé p. 89

- Montrer que $f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\ln(1+x)}$ sont prolongeables par continuité en 0 ; préciser $\tilde{f}(0)$ et $\tilde{g}(0)$.
- Déterminer les réels a et $b > 0$ pour que h soit continue en 0 : $h(x) = e^x + a$ si $x < 0$, $h(0) = 2$, $h(x) = \frac{\ln(1+bx)}{x}$ si $x > 0$.
- Soit $k(x) = (x-1)E(x)$. La fonction k est-elle continue en 1 ? en 2 ?
- Déterminer l'image de $[-1, 2]$ par $u(x) = 3^{x^2-2x}$. Pourquoi n'est-ce pas l'intervalle d'extrémités $u(-1)$ et $u(2)$?

Exercice 38 TVI et dichotomie ★

corrigé p. 89

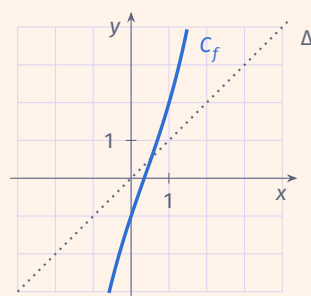
- Montrer que l'équation $e^x + x^3 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in]-1, 0[$. Par trois étapes de dichotomie, encadrer α par un intervalle d'amplitude 0,125.
- En partant d'un intervalle de longueur 1, combien d'étapes de dichotomie faut-il au minimum pour encadrer une racine à 10^{-6} près ? (On donne $\frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 3,32$.)
- Montrer que l'équation $2^x = 3x$ admet exactement deux solutions réelles, l'une dans $]0, 1[$, l'autre dans $]3, 4[$.

Exercice 39 Une réciproque explicite ★

corrigé p. 89

Soit $f(x) = e^x - 2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$; sa courbe C_f est tracée ci-contre, avec la droite $\Delta : y = x$.

- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
- Calculer $f(\ln 2)$, puis $(f^{-1})'(1)$ sans expliciter f^{-1} .
- Pour $y \in \mathbb{R}$, résoudre $f(x) = y$ en posant $X = e^x$; en déduire $f^{-1}(y)$ et retrouver $(f^{-1})'(1)$.
- Lire $f^{-1}(-1)$ sur la figure, puis recopier la figure et y tracer $C_{f^{-1}}$.

Exercice 40 Racines n -ièmes ★

corrigé p. 90

- Simplifier $A = \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2}$ et $B = \frac{(\sqrt[6]{27})^2}{\sqrt{3}}$.
- Résoudre : a) $\sqrt[3]{x-1} = x-1$; b) $\sqrt[3]{2x+1} \leq 3$; c) $x^5 = -243$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[5]{x^5+x^4} - x)$ (poser $t = \frac{1}{x}$).

4. Dériver $u(x) = \sqrt[4]{1+x^4}$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $v(x) = \sqrt[3]{1-x}$ est-elle dérivable à gauche en 1 ? Interpréter.

Exercice 41 Limites : ln, exp et croissances comparées ★

corrigé p. 90

Calculer les limites suivantes.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2 \ln x}{x + \ln x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) e^{3x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + \ln x} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{e^x - e} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^2 + 1) - 2 \ln x) & \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x - 4^x}{5^x + 3^x} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x^5} \end{array}$$

Exercice 42 Dérivées et primitives ★

corrigé p. 90

- Calculer la dérivée de : $f_1(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$; $f_2(x) = e^{x^2-3x}$; $f_3(x) = x 5^x$; $f_4(x) = \log_3(2x + 1)$ sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$; $f_5(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ sur $] \frac{1}{e}, +\infty[$; $f_6(x) = \sqrt[3]{e^x + 1}$.
- Déterminer une primitive sur l'intervalle I : a) $\frac{2x+1}{x^2+x+3}$, $I = \mathbb{R}$; b) $\frac{e^x}{(e^x+4)^2}$, $I = \mathbb{R}$; c) $\frac{(\ln x)^3}{x}$, $I =]0, +\infty[$; d) $x 2^{x^2}$, $I = \mathbb{R}$; e) 3^{2x+1} , $I = \mathbb{R}$; f) $\frac{x}{(x^2+1)^2}$, $I = \mathbb{R}$.

14.2 Niveau 2 · Bac

Exercice 43 Problème type examen (1) : logarithme ★★

corrigé p. 91

Partie I. Soit $g(x) = x^2 + (\ln x)^2 - 2 \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

- Montrer que $h(x) = x^2 + \ln x - 1$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$; calculer $h(1)$ et en déduire le signe de h .
- Montrer que $g'(x) = \frac{2h(x)}{x}$, puis que $g(x) \geq 1$ pour tout $x > 0$.

Partie II. Soit $f(x) = x - 1 - \frac{(\ln x)^2}{x}$ sur $]0, +\infty[$ et D la droite d'équation $y = x - 1$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, montrer que D est asymptote à C_f en $+\infty$ et étudier leur position relative.
- Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variations de f . Vérifier que D est tangente à C_f en $A(1, 0)$.
- Montrer que $f''(x) = \frac{-2[(\ln x)^2 - 3 \ln x + 1]}{x^3}$ et en déduire que C_f admet deux points d'inflexion (abscisses exactes).
- Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $(f^{-1})'(0)$ et $(f^{-1})'(f(e))$.
- Tracer D , C_f et $C_{f^{-1}}$ (on donne $f(e) \approx 1,35$ et $f(\frac{1}{e}) \approx -3,35$).

Partie III. Calculer l'aire du domaine limité par C_f , D et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.

Exercice 44 Problème type examen (2) : exponentielle ★★

corrigé p. 91

Partie I. Soit $g(x) = e^{2x} - 4e^x + 1$ et $a = \ln(2 + \sqrt{3})$. Vérifier que $\ln(2 - \sqrt{3}) = -a$, résoudre $g(x) = 0$ et étudier le signe de $g(x)$.

Partie II. Soit $f(x) = x - 3 + \frac{6}{1 + e^x}$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que f est impaire.

- Calculer les limites de f en $\pm\infty$. Montrer que $D_1 : y = x - 3$ est asymptote à C_f en $+\infty$, que $D_2 : y = x + 3$ l'est en $-\infty$, et préciser les positions relatives.
- Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+e^x)^2}$, dresser le tableau de variations de f et montrer que $f(a) = a - \sqrt{3}$.
- On admet que $f''(x) = \frac{6e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3}$. Montrer que O est un point d'inflexion et donner la tangente T en O .
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a exactement trois solutions : 0 , γ et $-\gamma$, avec $2 < \gamma < 3$.
- Tracer D_1 , D_2 , T et C_f (on donne $a \approx 1,32$ et $f(a) \approx -0,42$).
- Soit h la restriction de f à $I = [a, +\infty[$. Montrer que h est une bijection de I sur un intervalle J ; calculer $h(\ln 5)$ et $(h^{-1})'(\ln 5 - 2)$.

Partie III. Vérifier que $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$; calculer l'aire du domaine limité par C_f , D_1 et les droites $x = 0$, $x = \ln 3$.

Exercice 45 Problème type examen (3) : prolongement en 0 ★★

corrigé p. 92

Partie I. Étudier les variations de $\varphi(x) = x - 1 - x \ln x$ sur $]0, +\infty[$; montrer que $\varphi(x) \leq 0$, avec égalité seulement pour $x = 1$.

Partie II. Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2(1 - \ln x)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

- Montrer que f est continue à droite en 0 , puis dérivable à droite en 0 ; interpréter.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; interpréter.
- Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et dresser le tableau de variations de f .
- Déterminer les points d'intersection de C_f avec (Ox) , et la tangente T au point $B(e, 0)$.
- Montrer que C_f admet un point d'inflexion I dont on donnera les coordonnées.
- Vérifier que $f(x) - x = x \varphi(x)$. En déduire la position de C_f par rapport à $\Delta : y = x$ et montrer que Δ est tangente à C_f en $A(1, 1)$. Tracer Δ , T et C_f .

Partie III. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Montrer que $0 < u_n < 1$ pour tout n (utiliser les variations de f sur $[0, 1]$).
- Montrer que (u_n) est décroissante, puis qu'elle converge ; déterminer sa limite.

Partie IV. Vérifier que $F(x) = \frac{x^3}{9}(4 - 3 \ln x)$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$. En déduire l'aire du domaine limité par C_f et l'axe (Ox) .

Exercice 46 Problème type examen (4) : une sigmoïde ★★

corrigé p. 93

Partie I. Soit $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$ sur $[0, +\infty[$. Calculer $g'(t)$; en déduire que $g(t) < 0$ si $t > 0$.

Partie II. Soit $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ sur $\mathbb{R}$.

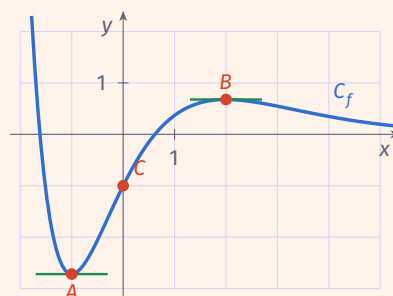
- En posant $t = e^x$, calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Montrer que $f(x) = xe^{-x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter.
- Montrer que $f'(x) = e^{-x}g(e^x)$ et dresser le tableau de variations de f . En déduire que $0 < f(x) < 1$ pour tout réel x .
- Donner la tangente T à C_f au point A d'abscisse 0 .
- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$; calculer $(f^{-1})'(\ln 2)$.
- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ et que $0,5 < \ell < 0,6$.
- Tracer T et C_f (on donne $f(-2) \approx 0,94$ et $f(2) \approx 0,29$).

Partie III. Vérifier que $F(x) = x - (1 + e^{-x}) \ln(1 + e^x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$; calculer l'aire du domaine limité par C_f , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 3$.

Exercice 47 Lire une courbe, puis l'étudier ★★

corrigé p. 94

La courbe ci-contre est celle de $f(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}$ (a, b réels). Elle passe par $C(0, -1)$, admet des tangentes horizontales aux points A et B d'abscisses -1 et 2 , et l'axe (Ox) est asymptote en $+\infty$.



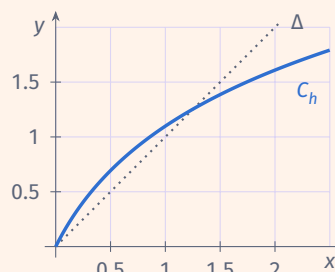
1. Lire $f(0)$, $f'(-1)$, $f'(2)$ et le signe de $f'(x)$.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b ; montrer que $a = 1$ et $b = -1$.
3. Retrouver par le calcul les variations de f , les coordonnées de A et B , et les solutions de $f(x) = 0$.
4. Donner l'équation de la tangente en C .
5. Discuter, suivant le réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
6. Vérifier que $F(x) = -(x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ est une primitive de f ; calculer l'aire du domaine limité par C_f , (Ox) et les droites $x = 1$, $x = 3$.

Exercice 48 Deux suites récurrentes ★★

corrigé p. 94

A. Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt[3]{e^2 u_n}$. 1. Montrer que $u_n > 0$ et que $v_n = \ln u_n - 1$ définit une suite géométrique. 2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n ; limite de (u_n) ? 3. Calculer $S_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \dots + \ln u_{n-1}$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0 u_1 \dots u_{n-1}}{e^n}$.

B. Soit $h(x) = \ln(2x + 1)$ sur $[0, +\infty[$; la figure montre C_h et $\Delta : y = x$.



1. Étudier $\psi(x) = h(x) - x$; montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution ℓ dans $]0, +\infty[$, et que $1 < \ell < 2$.
2. Soit $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = h(w_n)$. Placer w_0, w_1, w_2 sur l'axe (Ox) à l'aide de la figure. Conjecture ?
3. Montrer que $1 \leq w_n < \ell$ et que (w_n) est croissante ; en déduire qu'elle converge vers ℓ .

Exercice 49 Logarithmes de base a et puissances ★★

corrigé p. 94

1. Résoudre : a) $\log_3(x - 1) + \log_3(x + 1) = 1$; b) $2^{x+1} + 2^{-x} = 3$; c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9^{x-3}$.
2. Montrer, sans calculatrice, que $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$.
3. **Radioactivité.** L'activité d'un échantillon d'iode 131 est $A(t) = A_0 2^{-\frac{t}{8}}$ (t en jours). a) Au bout de combien de jours l'activité est-elle divisée par 10 ? b) Quel pourcentage de l'activité initiale reste-t-il après 30 jours ? c) Calculer $A'(t)$ et montrer que $A'(t) = -\frac{\ln 2}{8} A(t)$.
4. **Acoustique.** Le niveau sonore est $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ (en dB), où I est l'intensité sonore. a) De combien augmente L quand I double ? b) Une machine produit 70 dB ; les intensités de machines identiques s'ajoutent. Combien de machines faut-il au minimum pour dépasser 85 dB ?

Exercice 50 Problème type examen (5) : une racine cubique ★★

corrigé p. 95

Soit $f(x) = (x - 1)\sqrt[3]{x}$ sur $[0, +\infty[$, et C_f sa courbe.

1. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 ; interpréter. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; interpréter.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{4x-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pour $x > 0$; dresser le tableau de variations de f (minimum exact).
3. Donner la tangente T en $A(1, 0)$. Montrer que $f''(x) = \frac{2(2x+1)}{9x\sqrt[3]{x^2}}$; en déduire la position de C_f et T . Tracer T et C_f .
4. Soit g la restriction de f à $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$. Montrer que g est une bijection sur un intervalle J à préciser ; calculer $g(8)$ et $(g^{-1})'(14)$.
5. Calculer l'aire du domaine limité par C_f et l'axe (Ox) (écrire $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$).

■ 14.3 Niveau 3 · Approfondissement**Exercice 51 L'inégalité des accroissements finis au travail ★★★**

corrigé p. 95

Rappel (IAF). Si f est dérivable sur un intervalle I et $|f'| \leq k$ sur I , alors $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour $x, y \in I$.

Soit $f(x) = 2 + e^{-x}$, $I = [2, 3]$, et la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $f(I) \subset I$ et que $|f'(x)| \leq \frac{1}{7}$ pour tout $x \in I$ (on admet que $e^2 > 7$).
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution réelle ℓ , et que $2 + e^{-3} \leq \ell \leq 2 + e^{-2}$.
3. Montrer que $u_n \in I$, que $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{7}|u_n - \ell|$, puis que $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$. Limite de (u_n) ? À partir de quel rang n ce résultat garantit-il $|u_n - \ell| \leq 10^{-3}$?
4. Montrer que $u_{n+1} - \ell$ et $u_n - \ell$ sont de signes contraires. Avec $u_4 \approx 2,120\,002$ et $u_5 \approx 2,120\,031$, en déduire un encadrement de ℓ d'amplitude inférieure à 10^{-4} .

Exercice 52 Une inégalité entre puissances ★★★

corrigé p. 96

Soit $b > 0$ fixé et $\varphi(x) = x \ln x + b \ln b - (x + b) \ln \frac{x+b}{2}$ sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que $\varphi'(x) = \ln \frac{2x}{x+b}$; en déduire les variations et le signe de φ .
2. En déduire que, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $a^a b^b \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$, avec égalité si et seulement si $a = b$.
3. Sans calculatrice, comparer $99^{99} \times 101^{101}$ et 100^{200} . Montrer que $n^n(n+2)^{n+2} > (n+1)^{2n+2}$ pour tout entier $n \geq 1$.
4. Interpréter l'inégalité de la question 2 à l'aide de la convexité de la fonction $t \mapsto t \ln t$.

Exercice 53 Partie entière et logarithme de base 2 ★★★

corrigé p. 96

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = E(x) + \log_2(1 + x - E(x))$.

1. Exprimer $f(x)$ pour $x \in [n, n+1[$ ($n \in \mathbb{Z}$) ; calculer $f(n)$ et montrer que $f(x+1) = f(x) + 1$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'en tout entier n , f est dérivable à droite et à gauche, avec $f'_d(n) = \frac{1}{\ln 2}$ et $f'_g(n) = \frac{1}{2 \ln 2}$. Interpréter.
4. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{-1}(y) = E(y) + 2^{y-E(y)} - 1$.

5. Soit $d(x) = f(x) - x$. Montrer que d est périodique de période 1 et que $0 \leq d(x) \leq \log_2 \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + 1 \approx 0,086$. Que peut-on dire de C_f et de la droite $y = x$?

Exercice 54 L'équation de Kepler ★★★

corrigé p. 96

En astronomie, la position d'une planète sur son orbite d'excentricité $\varepsilon \in]0, 1[$ s'obtient en résolvant l'équation de Kepler $\theta - \varepsilon \sin \theta = M$, d'inconnue θ , le réel M étant donné.

1. Soit $\varphi(x) = x - \varepsilon \sin x$. Montrer que φ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; on note ψ sa réciproque.
2. Montrer que φ est impaire et que $\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x) + 2\pi$; en déduire que ψ est impaire, que $\psi(M + 2\pi) = \psi(M) + 2\pi$, et calculer $\psi(0)$ et $\psi(\pi)$.
3. Montrer que $|\psi(M) - M| \leq \varepsilon$ pour tout réel M , que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\psi'(M) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos \psi(M)}$.
4. Cas $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $M = 1$: on pose $\theta^* = \psi(1)$, $\theta_0 = 1$ et $\theta_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \sin \theta_n$. À l'aide de l'IAF (rappelée à l'exercice 51), montrer que $|\theta_n - \theta^*| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Quel rang garantit 10^{-3} près ?

Exercice 55 Une convergence fulgurante ★★★

corrigé p. 97

Soit $f(x) = x - \ln x$ sur $[1, +\infty[$, et la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

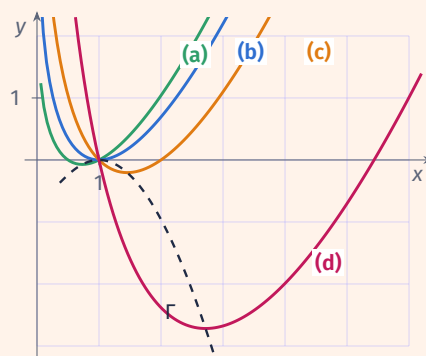
1. Montrer que f est croissante sur $[1, +\infty[$ et que $1 \leq f(x) \leq x$ pour tout $x \geq 1$. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 1$: $x - 1 - \ln x \leq \frac{(x-1)^2}{2}$.
3. On pose $d_n = u_n - 1$. Montrer que $0 \leq d_{n+1} \leq \frac{1}{2}d_n^2$, puis que $d_n \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$ pour tout n . À partir de quel rang a-t-on $d_n \leq 10^{-9}$?
4. Que se passe-t-il si l'on part de $u_0 \in]0, 1[$ (avec $u_{n+1} = u_n - \ln u_n$) ?

14.4 Niveau 4 • Concours

Exercice 56 Une famille de courbes ★★★★★

corrigé p. 97

Pour tout réel $m > 0$, on pose $f_m(x) = (x - m) \ln x$ sur $]0, +\infty[$; C_m est sa courbe. La figure représente quatre courbes C_m , notées (a), (b), (c), (d), et la courbe Γ (en pointillés).



1. Montrer que toutes les courbes C_m passent par un même point A et que deux courbes distinctes n'ont que ce point en commun. Tangente à C_m en A ? Pour quel m est-elle horizontale ?
2. Calculer f'_m et f''_m . Montrer que f'_m s'annule en un unique réel x_m , que $x_m(1 + \ln x_m) = m$ et que $x_m > \frac{1}{e}$; variations de f_m ?
3. Montrer que le minimum de f_m vaut $-x_m(\ln x_m)^2$. En déduire que le point le plus bas de C_m est sur la courbe $\Gamma : y = -x(\ln x)^2$ ($x > \frac{1}{e}$) et que, réciproquement, tout point de Γ est le point le plus bas d'une courbe C_m .
4. Les courbes tracées sont $C_{1/2}$, C_1 , C_2 et C_{2e} : les identifier. Pour quel m le point le plus bas de C_m a-t-il pour abscisse e ?

5. Vérifier que $G(x) = \left(ex - \frac{x^2}{2} \right) \ln x - ex + \frac{x^2}{4}$ est une primitive de $(e - x) \ln x$, puis calculer l'aire du domaine limité par C_e et l'axe (Ox) .

Exercice 57 La suite $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ ★★★★★

corrigé p. 97

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est strictement croissante et que $\lim u_n = +\infty$.
2. Montrer que $e^t \geq 1 + t$ pour tout réel t , et que $e^t \leq 1 + t + t^2$ pour tout $t \in [0, 1]$.
3. On pose $w_n = e^{u_n}$. Montrer que $w_{n+1} = w_n e^{1/w_n}$, puis que $w_n + 1 \leq w_{n+1} \leq w_n + 1 + \frac{1}{w_n}$.
4. En déduire que $w_n \geq n + 1$, puis que $w_n \leq n + 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
5. Montrer que $\frac{1}{k} \leq \ln k - \ln(k-1)$ ($k \geq 2$); en déduire $n + 1 \leq w_n \leq n + 2 + \ln n$ ($n \geq 1$).
6. Conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ln n) = 0$. Interpréter.

Exercice 58 Comparer $a^{\sqrt{b}}$ et $b^{\sqrt{a}}$ ★★★★★

corrigé p. 98

Soit $\varphi(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

1. Étudier φ (limites, variations); montrer que son maximum est $\frac{2}{e}$, atteint en e^2 .
2. Soient $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que $a^{\sqrt{b}} < b^{\sqrt{a}} \iff \varphi(a) < \varphi(b)$.
3. Comparer $3^{\sqrt{5}}$ et $5^{\sqrt{3}}$; puis $9^{\sqrt{16}}$ et $16^{\sqrt{9}}$ (contrôler par le calcul); puis $10^{\sqrt{11}}$ et $11^{\sqrt{10}}$.
4. Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $4^{\sqrt{x}} = x^2$ (remarquer que $x^2 = x^{\sqrt{4}}$).
5. Soit $a > 0$. Montrer que l'équation $a^{\sqrt{x}} = x^{\sqrt{a}}$, d'inconnue $x > 0$, admet une seule solution si et seulement si $a \in]0, 1] \cup \{e^2\}$.

Exercice 59 Le maximum déguisé ★★★★★

corrigé p. 98

1. Soient $a \geq b \geq c \geq 0$, $a > 0$. Montrer que $a \leq \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq \sqrt[n]{3} a$; en déduire la limite de $\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$.
2. Pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$. Montrer que $f(x) = \max\left(1, x, \frac{x^2}{2}\right)$ et expliciter f sur $[0, 1]$, $[1, 2]$ et $[2, +\infty[$.
3. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$; étudier sa dérivabilité en 1 et en 2. Tracer C_f .
4. Pour $n \geq 1$, soit $h_n(x) = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{nx})$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que h_n est dérivable et strictement croissante, et que $0 < h_n(x) - \max(0, x) \leq \frac{\ln 2}{n}$. Quelle est la limite $h(x)$ de $h_n(x)$? h est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Que retenir?

Exercice 60 L'équation $e^x - e^{-x} = mx$ ★★★★★

corrigé p. 99

Pour $m \in \mathbb{R}$, on note (E_m) l'équation $e^x - e^{-x} = mx$.

1. Soit $\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ pour $x \neq 0$. Montrer que φ est paire, de limite 2 en 0 et $+\infty$ en $+\infty$.
2. Soit $\psi(x) = x(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})$. Montrer que $\psi(x) > 0$ pour $x > 0$; en déduire que φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
3. Discuter suivant m le nombre de solutions de (E_m) dans $\mathbb{R}$. Interpréter à l'aide de la courbe de $x \mapsto e^x - e^{-x}$ et des droites passant par O .
4. Même question pour les solutions de (E_m) appartenant à $[-1, 1]$.
5. Pour $m > 2$, soit x_m la solution > 0 de (E_m) . Montrer que $m \mapsto x_m$ est continue et strictement croissante sur $]2, +\infty[$; limites en 2^+ et en $+\infty$?

15

Corrigés de la partie 3

15.1 Corrigés du niveau 1

■ Corrigé de l'exercice 37

1. Pour $x \neq 0$: $f(x) = 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x} \rightarrow 2 \times 1 + 1 = 3$ (nombres dérivés de exp en 0) : $\tilde{f}(0) = 3$. Avec la quantité conjuguée, $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$, et $\frac{x}{\ln(1+x)} \rightarrow 1$; donc $g(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \times \frac{x}{\ln(1+x)} \rightarrow \frac{1}{2}$: $\tilde{g}(0) = \frac{1}{2}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 1 + a$ et, pour $x > 0$, $h(x) = b \times \frac{\ln(1+bx)}{bx} \rightarrow b$. Continuité en 0 : $1 + a = 2 = b$, soit $a = 1, b = 2$.
3. Sur $[0, 1[$, $E(x) = 0$ et $k(x) = 0$; sur $[1, 2[$, $k(x) = x - 1$. Les deux limites en 1 valent $0 = k(1)$: k est **continue en 1**. En 2 : $\lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = 1$ mais $k(2) = 1 \times 2 = 2$ (sur $[2, 3[$, $k(x) = 2(x - 1)$) : k n'est **pas continue en 2** (seulement à droite).
4. $t(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ décroît de 3 à -1 sur $[-1, 1]$ puis croît de -1 à 0 sur $[1, 2]$: $t([-1, 2]) = [-1, 3]$. Comme $s \mapsto 3^s$ est croissante, $u([-1, 2]) = [3^{-1}, 3^3] = [\frac{1}{3}, 27]$. **Piège** : u n'est pas monotone sur $[-1, 2]$ (minimum en 1) ; l'intervalle $[u(2), u(-1)] = [1, 27]$ oublie les valeurs de $[\frac{1}{3}, 1]$.

■ Corrigé de l'exercice 38

1. $\varphi(x) = e^x + x^3$: $\varphi'(x) = e^x + 3x^2 > 0$, φ est continue, strictement croissante, de limites $-\infty$ et $+\infty$: c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, d'où une **unique** solution α . Et $\varphi(-1) = e^{-1} - 1 < 0 < 1 = \varphi(0)$: $\alpha \in]-1, 0[$.

milieu c	-0,5	-0,75	-0,875
$\varphi(c) \approx$	0,48 > 0	0,05 > 0	-0,25 < 0
encadrement	$] -1; -0,5[$	$] -1; -0,75[$	$] -0,875; -0,75[$

(En fait $\alpha \approx -0,773$.)

2. Après n étapes, l'intervalle a pour longueur $\frac{1}{2^n}$. $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-6} \iff n \ln 2 \geq 6 \ln 10 \iff n \geq 6 \times \frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 19,9$: **20 étapes**.
3. $\psi(x) = 2^x - 3x$, $\psi'(x) = 2^x \ln 2 - 3 > 0 \iff x > x_0 = \log_2 \frac{3}{\ln 2}$, avec $1 < x_0 < 3$ ($2 < \frac{3}{\ln 2} \approx 4,3 < 8$). ψ décroît strictement sur $]-\infty, x_0]$, croît strictement sur $[x_0, +\infty[$. Sur $]-\infty, x_0]$: $\psi(0) = 1 > 0 > -1 = \psi(1)$, une seule racine, dans $]0, 1[$. Sur $[x_0, +\infty[$: $\psi(3) = -1 < 0 < 4 = \psi(4)$, une seule racine, dans $]3, 4[$. **Exactement deux solutions** ($\approx 0,458$ et $\approx 3,313$).

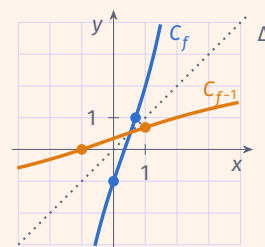
■ Corrigé de l'exercice 39

1. $f'(x) = e^x + 2e^{-x} > 0$; f est continue, strictement croissante ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ (car $-2e^{-x} \rightarrow -\infty$), $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$: bijection de $\mathbb{R}$ sur $\boxed{J = \mathbb{R}}$.
2. $f(\ln 2) = 2 - 2 \times \frac{1}{2} = 1$ et $f'(\ln 2) = 2 + 1 = 3 \neq 0$: $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(\ln 2)} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

3. $X - \frac{2}{X} = y \iff X^2 - yX - 2 = 0$ ($X > 0$) ; $\Delta = y^2 + 8 > 0$ et le produit des racines vaut $-2 < 0$: une seule racine positive,

$$X = \frac{y + \sqrt{y^2 + 8}}{2}. \text{ Donc } f^{-1}(y) = \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + 8}}{2}. \text{ En dérivant :}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 8}}}{y + \sqrt{y^2 + 8}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 8}}, \text{ qui vaut bien } \frac{1}{3} \text{ en } 1.$$



4. C_f passe par $(0, -1)$: $f^{-1}(-1) = 0$. $C_{f^{-1}}$ est la symétrique de C_f par rapport à Δ (en orange).

■ Corrigé de l'exercice 40

1. $A = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 2^1 = \boxed{2}$; $(\sqrt[6]{27})^2 = 27^{\frac{1}{3}} = 3$, donc $B = \frac{3}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3}}$.
2. a) $D = [1, +\infty[$; avec $t = \sqrt[3]{x-1} \geq 0$: $t = t^3 \iff t(t-1)(t+1) = 0 \iff t \in \{0, 1\}$, d'où $S = \{1, 2\}$.
b) $D = [-\frac{1}{2}, +\infty[$; $\sqrt[3]{2x+1} \leq \sqrt[3]{27} \iff 2x+1 \leq 27$: $S = [-\frac{1}{2}, 13]$. c) $x^5 < 0$ impose $x < 0$, et $(-x)^5 = 243 = 3^5$: $x = \boxed{-3}$.
3. $\varphi(x) = \sqrt[3]{1+3x}$ est dérivable en 0 avec $\varphi'(x) = \frac{3}{3\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$: la limite est $\varphi'(0) = \boxed{1}$. Pour $x > 0$,
 $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+ : \sqrt[5]{x^5 + x^4} - x = x(\sqrt[5]{1+t} - 1) = \frac{\sqrt[5]{1+t} - 1}{t} \rightarrow (\sqrt[5]{1+t})'_{t=0} = \boxed{\frac{1}{5}}$.
4. $u'(x) = \frac{4x^3}{4\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$. Pour $x < 1$: $\frac{v(x) - v(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt[3]{1-x}}{x - 1} = \frac{-1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} \rightarrow -\infty$: v n'est pas dérivable à gauche en 1 ; sa courbe a une **demi-tangente verticale** en $(1, 0)$.

■ Corrigé de l'exercice 41

- a) $\frac{1 - 2\frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{\ln x}{x}} \rightarrow \boxed{1}$. b) $t = \frac{1}{x} \rightarrow -\infty : t^4 e^t \rightarrow \boxed{0}$. c) $X = 3x \rightarrow -\infty : (x^2 - x)e^{3x} = \frac{1}{9}x^2 e^x - \frac{1}{3}xe^x \rightarrow \boxed{0}$.
- d) $\frac{e^x/x^2}{1 + \ln x/x^2} \rightarrow \frac{+\infty}{1} = \boxed{+\infty}$. e) $\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \times \frac{x - 1}{e^x - e^1} \rightarrow 1 \times \frac{1}{e} = \boxed{\frac{1}{e}}$ (nombres dérivés de $\ln$ et de $\exp$ en 1). f) $\ln \frac{x^2 + 1}{x^2} = \ln(1 + \frac{1}{x^2}) \rightarrow \boxed{0}$. g) On divise par 5^x : $\frac{1 - (\frac{4}{5})^x}{1 + (\frac{3}{5})^x} \rightarrow \boxed{1}$ ($q^x \rightarrow 0$ si $0 < q < 1$). h) $X = x \ln 3 : \frac{3^x}{x^5} = (\ln 3)^5 \frac{e^x}{x^5} \rightarrow \boxed{+\infty}$.

■ Corrigé de l'exercice 42

1. $f_1'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+3}$ ($x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 > 0$) ; $f_2'(x) = (2x-3)e^{x^2-3x}$; $f_3'(x) = 5^x(1+x \ln 5)$;
 $f_4'(x) = \frac{2}{(2x+1) \ln 3}$; $f_5'(x) = \frac{-\frac{1}{x}(1+\ln x) - \frac{1}{x}(1-\ln x)}{(1+\ln x)^2} = \frac{-2}{x(1+\ln x)^2}$; $f_6'(x) = \frac{e^x}{3\sqrt[3]{(e^x+1)^2}}$.
2. a) $\ln(x^2+x+3)$ ($\frac{u'}{u}$, $u > 0$ car $\Delta = -11$) ; b) $-\frac{1}{e^x+4}$ ($\frac{u'}{u^2}$) ; c) $\frac{(\ln x)^4}{4}$ ($u'u^3$) ; d) $\frac{2^{x^2}}{2 \ln 2}$ (car $(2^u)' = u' 2^u \ln 2$) ; e) $\frac{3^{2x+1}}{2 \ln 3}$; f) $-\frac{1}{2(x^2+1)}$.

■ 15.2 Corrigés du niveau 2

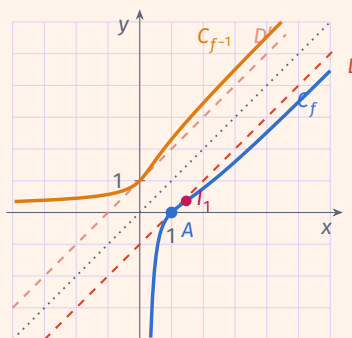
■ Corrigé de l'exercice 43

Partie I. 1. $h'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$: h est strictement croissante et $h(1) = 0$, donc $h < 0$ sur $]0, 1[$ et $h > 0$ sur $]1, +\infty[$. **2.** $g'(x) = 2x + \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 + \ln x - 1)}{x} = \frac{2h(x)}{x}$: g décroît sur $]0, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$, de minimum $g(1) = 1$: $\boxed{g(x) \geq 1 > 0}$.

Partie II.

- En 0^+ : $\frac{(\ln x)^2}{x} \rightarrow +\infty$, donc $\boxed{f \rightarrow -\infty}$: la droite $x = 0$ est **asymptote verticale**. En $+\infty$, avec $X = \sqrt{x}$: $\frac{(\ln x)^2}{x} = \left(\frac{2 \ln X}{X}\right)^2 \rightarrow 0$, d'où $f \rightarrow +\infty$ et $f(x) - (x - 1) \rightarrow 0$: D est **asymptote**. Comme $f(x) - (x - 1) = -\frac{(\ln x)^2}{x} \leq 0$, nul seulement en 1, C_f est **au-dessous** de D , avec un seul point commun $A(1, 0)$.
- $\left[\frac{(\ln x)^2}{x}\right]' = \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$, donc $f'(x) = \frac{x^2 - 2 \ln x + (\ln x)^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$: f est **strictement croissante**. $f(1) = 0$ et $f'(1) = g(1) = 1$: la tangente en A est $y = x - 1$, c'est D .
- Avec $f' = 1 - u$, $u = \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$: $u'(x) = \frac{\left(\frac{2}{x} - \frac{2 \ln x}{x}\right)x^2 - 2x(2 \ln x - (\ln x)^2)}{x^4} = \frac{2[(\ln x)^2 - 3 \ln x + 1]}{x^3}$, d'où la formule. Le trinôme $X^2 - 3X + 1$ ($X = \ln x$) a pour racines $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$: f'' change de signe deux fois ; inflexions en $x_1 = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \approx 1,47$ et $x_2 = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \approx 13,7$.
- f continue strictement croissante, $f(]0, +\infty[) =]\lim_{0^+} f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$: bijection. $f(1) = 0$: $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \boxed{1}$. $f'(e) = \frac{g(e)}{e^2} = \frac{e^2 - 1}{e^2}$: $(f^{-1})'(f(e)) = \frac{e^2}{e^2 - 1} \approx 1,16$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
f	$-\infty$	0	$+\infty$



$C_{f^{-1}}$ (en orange) est la symétrique de C_f par rapport à $y = x$: elle admet l'asymptote $D' : y = x + 1$ et l'asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$.

Partie III. Sur $\left[\frac{1}{e}, e\right]$, D est au-dessus de C_f : $A = \int_{1/e}^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_{1/e}^e = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{2}{3} \text{ u.a.}}$

■ Corrigé de l'exercice 44

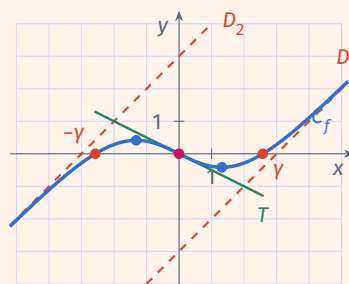
Partie I. $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$, donc $\ln(2 - \sqrt{3}) = -a$. Avec $X = e^x$: $X^2 - 4X + 1 = 0 \iff X = 2 \pm \sqrt{3}$ (tous deux > 0), soit $x = \pm a$. Et $g(x) = (e^x - 2 + \sqrt{3})(e^x - 2 - \sqrt{3})$: $g < 0$ sur $] -a, a[$, $g > 0$ sur $] -\infty, -a[\cup] a, +\infty[$.

Partie II.

- $\frac{6}{1+e^{-x}} = \frac{6e^x}{e^x+1} = 6 - \frac{6}{1+e^x}$, donc $f(-x) = -x - 3 + 6 - \frac{6}{1+e^x} = -f(x)$: f est **impaire** (O centre de symétrie).
- En $+\infty$: $f \rightarrow +\infty$ et $f(x) - (x - 3) = \frac{6}{1+e^x} \rightarrow 0^+$: D_1 asymptote, C_f **au-dessus**. En $-\infty$: $f \rightarrow -\infty$ et $f(x) - (x + 3) = \frac{6}{1+e^x} - 6 = \frac{-6e^x}{1+e^x} \rightarrow 0^-$: D_2 asymptote, C_f **au-dessous**.

3. $f'(x) = 1 - \frac{6e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{(1+e^x)^2 - 6e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{g(x)}{(1+e^x)^2}$. Comme $e^a = 2 + \sqrt{3}$: $\frac{6}{3+\sqrt{3}} = \frac{6(3-\sqrt{3})}{6} = 3 - \sqrt{3}$ et $f(a) = a - \sqrt{3}$; par imparité $f(-a) = \sqrt{3} - a$.
4. $f''(x)$ a le signe de $e^x - 1$, donc de x : il change de signe en 0 et $f(0) = 0$: O est un **point d'inflexion**. $f'(0) = \frac{g(0)}{4} = -\frac{1}{2}$: $T : y = -\frac{x}{2}$; C_f (convexe sur $[0, +\infty[$) est au-dessus de T pour $x > 0$, au-dessous pour $x < 0$.
5. Sur $[0, a]$, f décroît de 0 à $f(a) < 0$: seul zéro 0. Sur $[a, +\infty[$, f est continue, strictement croissante, de $f(a) < 0$ à $+\infty$: un unique zéro γ ; $f(2) = -1 + \frac{6}{1+e^2} \approx -0,28 < 0$ et $f(3) = \frac{6}{1+e^3} \approx 0,28 > 0$: $2 < \gamma < 3$ ($\gamma \approx 2,58$). Par imparité, $-\gamma$ est l'unique zéro de $]-\infty, -a]$, et $f > 0$ sur $[-a, 0[$: **exactement trois zéros**.

x	$-\infty$	$-a$	0	a	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$+$
f	$-\infty$	$\sqrt{3} - a$	0	$a - \sqrt{3}$	$+\infty$



7. h est continue et strictement croissante sur I : bijection de I sur $J = [a - \sqrt{3}, +\infty[$. $\ln 5 \in I$ ($5 > 2 + \sqrt{3}$) et $h(\ln 5) = \ln 5 - 3 + 1 = \ln 5 - 2$; $h'(\ln 5) = \frac{25-20+1}{36} = \frac{1}{6}$, d'où $(h^{-1})'(\ln 5 - 2) = \frac{1}{6}$.

Partie III. $\frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$ a pour primitive $x - \ln(1 + e^x)$. Sur $[0, \ln 3]$, C_f est au-dessus de D_1 :
 $A = \int_0^{\ln 3} \frac{6 dx}{1 + e^x} = 6 \left[x - \ln(1 + e^x) \right]_0^{\ln 3} = 6(\ln 3 - \ln 4 + \ln 2) = 6 \ln \frac{3}{2} \approx 2,43$ u.a.

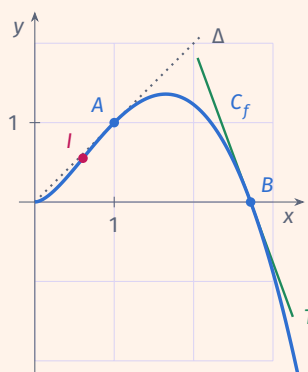
■ Corrigé de l'exercice 45

Partie I. $\varphi'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$: φ croît sur $]0, 1]$, décroît sur $[1, +\infty[$; son maximum est $\varphi(1) = 0$: $\varphi \leq 0$, avec égalité seulement en 1.

Partie II.

- $x^2 \ln x = x(x \ln x) \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow 0 = f(0)$: continuité à droite. $\frac{f(x)-f(0)}{x} = x - x \ln x \rightarrow 0$: $f'_d(0) = 0$, **demi-tangente horizontale** en O .
- $1 - \ln x \rightarrow -\infty$: $f \rightarrow -\infty$; $\frac{f(x)}{x} = x(1 - \ln x) \rightarrow -\infty$: **branche parabolique de direction** (Oy) .
- $f'(x) = 2x(1 - \ln x) - x = x(1 - 2 \ln x)$: f croît sur $[0, \sqrt{e}]$, décroît sur $[\sqrt{e}, +\infty[$; maximum $f(\sqrt{e}) = e \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}$.
- $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $\ln x = 1$: points O et $B(e, 0)$. $f'(e) = -e$: $T : y = -ex + e^2$.
- $f''(x) = 1 - 2 \ln x - 2 = -1 - 2 \ln x$ s'annule en changeant de signe en $e^{-\frac{1}{2}}$: $I \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{3}{2e} \right) \approx (0,61 ; 0,55)$.
- $x^2 - x^2 \ln x - x = x(x - x \ln x - 1) = x\varphi(x) \leq 0$: C_f est **au-dessous** de Δ , et ne la rencontre qu'en O et en $A(1, 1)$. Comme $f'(1) = 1$, Δ est la tangente en A .

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	-
f	0	$\frac{e}{2}$	$-\infty$



Partie III. 1. f est continue et strictement croissante sur $[0, 1] \subset [0, \sqrt{e}]$: si $0 < x < 1$, alors $0 = f(0) < f(x) < f(1) = 1$. Par récurrence, $0 < u_n < 1$. **2.** $u_{n+1} - u_n = u_n \varphi(u_n) < 0$ (car $u_n \neq 1$) : (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc converge vers $\ell \in [0, \frac{1}{2}]$. f étant continue sur $[0, \frac{1}{2}]$, $f(\ell) = \ell$, soit $\ell \varphi(\ell) = 0$ ($\ell > 0$) ou $\ell = 0$; or $\varphi(\ell) \neq 0$ pour $\ell \neq 1$: $\lim u_n = 0$.

Partie IV. $F'(x) = \frac{x^2}{3}(4 - 3 \ln x) + \frac{x^3}{9} \times \left(-\frac{3}{x}\right) = x^2 - x^2 \ln x = f(x)$; $x^3 \ln x \rightarrow 0$ donne $\lim_{0^+} F = 0$. Prolongée par $F(0) = 0$, F est continue sur $[0, +\infty[$ et $\frac{F(x)}{x} \rightarrow 0 = f(0)$: c'est une primitive de f sur $[0, +\infty[$. Comme $f \geq 0$ sur $[0, e]$: $A = F(e) - F(0) = \frac{e^3}{9} \approx 2,23$ u.a.

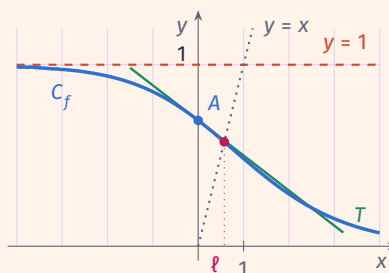
■ Corrigé de l'exercice 46

Partie I. $g'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{-t}{(1+t)^2} < 0$ pour $t > 0$: g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et $g(0) = 0$, donc $g(t) < 0$ pour $t > 0$.

Partie II.

- En $-\infty$: $t = e^x \rightarrow 0^+$ et $f(x) = \frac{\ln(1+t)}{t} \rightarrow 1$: la droite $y = 1$ est **asymptote** en $-\infty$. $\ln(1 + e^x) = \ln(e^x(1 + e^{-x})) = x + \ln(1 + e^{-x})$, d'où la formule ; en $+\infty$, $xe^{-x} \rightarrow 0$ et $e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) \rightarrow 0 \times 0$: $f \rightarrow 0$, l'axe (Ox) est **asymptote** en $+\infty$.
- $f'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^x) + e^{-x} \frac{e^x}{1+e^x} = e^{-x} \left[\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1 + e^x) \right] = e^{-x} g(e^x) < 0$: f est **strictement décroissante**, de 1 (en $-\infty$) à 0 (en $+\infty$), limites non atteintes : $0 < f(x) < 1$.
- $f(0) = \ln 2$ et $f'(0) = g(1) = \frac{1}{2} - \ln 2 \approx -0,19$: $T : y = \left(\frac{1}{2} - \ln 2\right)x + \ln 2$.
- f est continue, strictement décroissante, et $f(\mathbb{R}) =]\lim_{+\infty} f, \lim_{-\infty} f[=]0, 1[$: bijection. $f(0) = \ln 2$, donc $(f^{-1})'(\ln 2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{2}{1 - 2 \ln 2} \approx -5,18$.
- $\varphi(x) = f(x) - x$ est continue, strictement décroissante, de $+\infty$ à $-\infty$: un unique zéro ℓ . $\varphi(0,5) \approx 0,59 - 0,5 > 0$ et $\varphi(0,6) \approx 0,57 - 0,6 < 0$: $0,5 < \ell < 0,6$ ($\ell \approx 0,575$).

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
f	1	0



Partie III. $F'(x) = 1 + e^{-x} \ln(1 + e^x) - (1 + e^{-x}) \frac{e^x}{1+e^x} = 1 + f(x) - 1 = f(x)$, car $(1 + e^{-x})e^x = e^x + 1$. Comme $f > 0$:

$$A = F(\ln 3) - F(0) = \left(\ln 3 - \frac{4}{3} \ln 4\right) - (0 - 2 \ln 2) = \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2 \approx 0,64 \text{ u.a.}$$

■ Corrigé de l'exercice 47

1. $f(0) = -1$; $f'(-1) = f'(2) = 0$ (tangentes horizontales) ;
 $f' < 0$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]2, +\infty[$, $f' > 0$ sur $]-1, 2[$.

2. $f'(x) = (-x^2 + (2-a)x + a-b)e^{-x}$. $f(0) = b = -1$; $f'(2) = -(a+b)e^{-2} = 0$ donne $a = 1, b = -1$ (et $f'(-1) = (2a-b-3)e = 0$ ✓).

3. $f'(x) = (-x^2 + x + 2)e^{-x} = -(x+1)(x-2)e^{-x}$. En $-\infty$, avec $X = -x \rightarrow +\infty$: $f = (X^2 - X - 1)e^X \rightarrow +\infty$; en $+\infty$, $x^2 e^{-x} \rightarrow 0$: $f \rightarrow 0$. $A(-1, -e)$, $B(2, \frac{5}{e^2})$; $f(x) = 0 \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

4. $f'(0) = 2$: $y = 2x - 1$.

5. Sur $]-\infty, -1[$, f décroît de $+\infty$ à $-e$; sur $[-1, 2]$, elle croît de $-e$ à $\frac{5}{e^2}$; sur $[2, +\infty[$, elle décroît de $\frac{5}{e^2}$ vers 0 (valeurs dans $]0, \frac{5}{e^2}]$). D'où le nombre de solutions de $f(x) = m$:

m	$m < -e$	$m = -e$	$-e < m \leq 0$	$0 < m < \frac{5}{e^2}$	$m = \frac{5}{e^2}$	$m > \frac{5}{e^2}$
solutions	0	1	2	3	2	1

6. $F'(x) = -(2x+3)e^{-x} + (x^2+3x+2)e^{-x} = f(x)$ ✓. Sur $[1, 3]$, $f > 0$ (car $1 > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$) : $A = F(3) - F(1) = -20e^{-3} + 6e^{-1} = \frac{6}{e} - \frac{20}{e^3} \approx 1,21$ u.a.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
f	$+\infty$		$\frac{5}{e^2}$		0	

$-e$

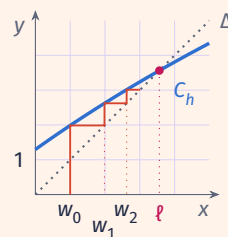
■ Corrigé de l'exercice 48

A. 1. Par récurrence $u_n > 0$, et $v_{n+1} = \frac{1}{3}(2 + \ln u_n) - 1 = \frac{1}{3}(\ln u_n - 1) = \frac{1}{3}v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$, de premier terme $v_0 = -1$. 2. $v_n = -(\frac{1}{3})^n$ et $u_n = e^{1+v_n} = e^{1-3^{-n}} \rightarrow e$. 3. $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (1 + v_k) = n - \frac{1-3^{-n}}{1-\frac{1}{3}} = n - \frac{3}{2}(1 - 3^{-n})$, donc $\frac{u_0 \cdots u_{n-1}}{e^n} = e^{S_n - n} \rightarrow e^{-\frac{3}{2}}$.

B. 1. $\psi'(x) = \frac{2}{2x+1} - 1 = \frac{1-2x}{2x+1}$: ψ croît sur $[0, \frac{1}{2}]$ (avec $\psi(0) = 0$, donc $\psi > 0$ sur $]0, \frac{1}{2}]$), puis décroît strictement de $\ln 2 - \frac{1}{2} > 0$ vers $-\infty$ sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ ($\psi(x) = x(\frac{\ln(2x+1)}{x} - 1)$) : un unique zéro $\ell > 0$. $\psi(1) = \ln 3 - 1 > 0 > \ln 5 - 2 = \psi(2)$: $1 < \ell < 2$ ($\ell \approx 1,256$). De plus $\psi > 0$ sur $]0, \ell[$.

2. Construction « en escalier » ci-contre : $w_0 = 1, w_1 = \ln 3 \approx 1,10, w_2 \approx 1,16$; la suite semble croître vers ℓ .

3. Si $1 \leq w_n < \ell$, h étant croissante : $1 < \ln 3 = h(1) \leq h(w_n) < h(\ell) = \ell$. Puis $w_{n+1} - w_n = \psi(w_n) > 0$: (w_n) croît, majorée par ℓ , donc converge vers $L \in [1, \ell]$; h est continue, donc $h(L) = L$ et $L = \ell$.



■ Corrigé de l'exercice 49

1. a) $D =]1, +\infty[$; $\log_3((x-1)(x+1)) = 1 \iff x^2 - 1 = 3$: $S = \{2\}$. b) $X = 2^x > 0$: $2X + \frac{1}{X} = 3 \iff 2X^2 - 3X + 1 = 0 \iff X \in \{1, \frac{1}{2}\}$: $S = \{-1, 0\}$. c) $3^{-x} > 3^{2x-6} \iff -x > 2x - 6$ ($t \mapsto 3^t$ croissante) : $S =]-\infty, 2[$.

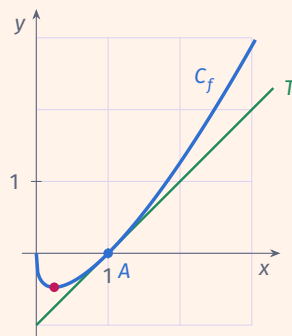
2. Avec $t = \log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} > 0$, on a $\log_3 2 = \frac{1}{t}$ et $t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{(t-1)^2}{t} > 0$ car $t \neq 1$ ($\ln 3 \neq \ln 2$).

3. a) $2^{-\frac{t}{8}} = \frac{1}{10} \iff \frac{t}{8} \ln 2 = \ln 10 \iff t = \frac{8 \ln 10}{\ln 2} \approx \boxed{26,6 \text{ jours}}$. b) $2^{-\frac{30}{8}} \approx 0,074$: il reste environ $\boxed{7,4 \%}$. c) $A(t) = A_0 e^{-\frac{t}{8} \ln 2}$, donc $A'(t) = -\frac{\ln 2}{8} A_0 e^{-\frac{t}{8} \ln 2} = -\frac{\ln 2}{8} A(t) < 0$: A décroît.
4. a) $10 \log \frac{2I}{I_0} - 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log 2 \approx \boxed{3 \text{ dB}}$. b) Pour n machines : $L = 70 + 10 \log n > 85 \iff \log n > 1,5 \iff n > 10^{1,5} \approx 31,6$: $\boxed{32 \text{ machines}}$.

■ Corrigé de l'exercice 50

1. Pour $x > 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{(x-1)\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow -\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 0 ; **demi-tangente verticale** en O . En $+\infty$: $f \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x} \rightarrow +\infty$: **branche parabolique de direction** (Oy) .
2. $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$: $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4x-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. f décroît sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, croît sur $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right]$; minimum $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}} \approx -0,47$.
3. $f(1) = 0, f'(1) = 1$: $T : y = x - 1$. $f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}(2x+1) = \frac{2(2x+1)}{9x\sqrt[3]{x^2}} > 0$: C_f est **convexe** sur $]0, +\infty[$, donc au-dessus de T (contact en A seulement).

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	0	$-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$	$+\infty$



4. g est continue, strictement croissante : bijection de $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$ sur $J = \left[-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}, +\infty\right[$. $g(8) = 7 \times 2 = 14$ et $g'(8) = \frac{31}{3 \times 4} = \frac{31}{12}$: $(g^{-1})'(14) = \boxed{\frac{12}{31}}$.
5. $f \leq 0$ sur $[0, 1]$ (zéros 0 et 1). Une primitive est $F(x) = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$: $A = -(F(1) - F(0)) = -\left(\frac{3}{7} - \frac{3}{4}\right) = \boxed{\frac{9}{28}}$ u.a.

■ 15.3 Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 51

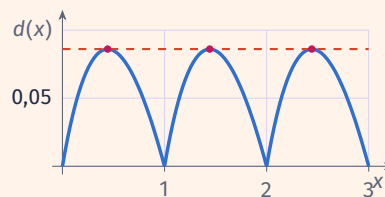
1. $f'(x) = -e^{-x} < 0$: $f(I) = [f(3), f(2)] = [2 + e^{-3}, 2 + e^{-2}] \subset [2, 3]$; et $|f'(x)| = e^{-x} \leq e^{-2} < \frac{1}{7}$ pour $x \geq 2$.
2. $\rho(x) = f(x) - x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ($\rho' = -e^{-x} - 1 < 0$), de $+\infty$ à $-\infty$: un unique zéro ℓ . $\rho(2) = e^{-2} > 0 > e^{-3} - 1 = \rho(3)$: $\ell \in I$, puis $\ell = f(\ell) \in f(I) = [2 + e^{-3}, 2 + e^{-2}]$.
3. $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$: $u_n \in I$. L'IAF sur I (avec $k = \frac{1}{7}$) entre u_n et ℓ : $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{7}|u_n - \ell|$. Par récurrence $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n |u_0 - \ell|$, et $|u_0 - \ell| = \ell - 2 \leq e^{-2} < \frac{1}{7}$: $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1} \rightarrow 0$, donc $\lim u_n = \ell$. $7^{n+1} \geq 1000 \iff n+1 \geq 4$ ($7^3 = 343, 7^4 = 2401$) : rang $\boxed{n = 3}$.
4. f est strictement décroissante : si $u_n > \ell$, alors $u_{n+1} = f(u_n) < f(\ell) = \ell$, et inversement. Donc ℓ est toujours **entre deux termes consécutifs** : $u_4 < \ell < u_5$, soit $\boxed{2,120\,00 < \ell < 2,120\,04}$ (amplitude 4×10^{-5} ; en fait $\ell \approx 2,120\,028$).

■ Corrigé de l'exercice 52

1. $\varphi'(x) = \ln x + 1 - \ln \frac{x+b}{2} - (x+b) \times \frac{1}{x+b} = \ln \frac{2x}{x+b}$, et $\varphi'(x) > 0 \iff 2x > x+b \iff x > b$. φ décroît sur $]0, b]$, croît sur $[b, +\infty[$, de minimum $\varphi(b) = 2b \ln b - 2b \ln b = 0$: $\varphi \geq 0$, avec égalité seulement en b .
2. Avec $x = a$: $a \ln a + b \ln b \geq (a+b) \ln \frac{a+b}{2}$; exp étant croissante : $a^a b^b \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$, égalité si et seulement si $a = b$.
3. $a = 99, b = 101$: $99^{99} \times 101^{101} > 100^{200}$ (inégalité stricte car $a \neq b$). Avec $a = n, b = n+2$: $n^n (n+2)^{n+2} > \left(\frac{2n+2}{2}\right)^{2n+2} = (n+1)^{2n+2}$.
4. $k(t) = t \ln t$ vérifie $k''(t) = \frac{1}{t} > 0$: k est convexe, sa courbe est au-dessous de ses cordes ; le milieu de la corde joignant les points d'abscisses a et b est au-dessus de la courbe : $\frac{k(a)+k(b)}{2} \geq k\left(\frac{a+b}{2}\right)$, ce qui est exactement l'inégalité de 2 (divisée par 2 et passée au logarithme).

■ Corrigé de l'exercice 53

1. Sur $[n, n+1[$: $E(x) = n$ et $f(x) = n + \log_2(1+x-n)$; $f(n) = n + \log_2 1 = n$. Comme $E(x+1) = E(x) + 1$ et $(x+1) - E(x+1) = x - E(x)$: $f(x+1) = f(x) + 1$.
2. f est continue sur chaque $]n, n+1[$ et à droite en n . À gauche : pour $x \in [n-1, n[$, $f(x) = n-1 + \log_2(2+x-n) \rightarrow n-1 + \log_2 2 = n = f(n)$. Donc f est **continue sur $\mathbb{R}$** .
3. À droite, avec $t = x - n \rightarrow 0^+$: $\frac{f(x)-f(n)}{x-n} = \frac{\ln(1+t)}{t \ln 2} \rightarrow \frac{1}{\ln 2}$. À gauche, avec $x = n-1+s, s \rightarrow 1^-$: $\frac{f(x)-f(n)}{x-n} = \frac{\log_2(1+s)-\log_2 2}{s-1} \rightarrow (\log_2(1+s))'_{s=1} = \frac{1}{2 \ln 2}$. Les deux demi-tangentes ont des pentes différentes : **points anguleux** aux points d'abscisse entière.
4. Sur $[n, n+1[$, f est continue strictement croissante de n vers $n+1$ (exclu) : bijection de $[n, n+1[$ sur $[n, n+1[$. Ces intervalles recouvrent $\mathbb{R}$ sans se chevaucher : f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Si $y \in [n, n+1[$ (donc $n = E(y)$) : $\log_2(1+x-n) = y-n \iff x = n+2^{y-n}-1$, d'où la formule.
5. $d(x+1) = f(x)+1-x-1 = d(x)$. Pour $t = x-E(x) \in [0, 1[$: $d(x) = \delta(t) = \log_2(1+t)-t$, $\delta'(t) = \frac{1}{(1+t) \ln 2} - 1 \geq 0 \iff t \leq t_0 = \frac{1}{\ln 2} - 1 \approx 0,44$. δ croît de $\delta(0) = 0$ à $\delta(t_0)$, puis décroît vers $\delta(1) = 0$: $0 \leq d(x) \leq \delta(t_0)$, avec $\delta(t_0) = \log_2 \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + 1 \approx [0,086]$. C_f est au-dessus de la droite $y = x$, qu'elle touche aux points d'abscisse entière, et dont elle ne s'écarte jamais de plus de 0,09 (verticalement) : à l'œil, on les confond !



■ Corrigé de l'exercice 54

1. $\varphi'(x) = 1 - \varepsilon \cos x \geq 1 - \varepsilon > 0$: φ est continue et strictement croissante. $x - \varepsilon \leq \varphi(x) \leq x + \varepsilon$ donne $\lim_{\pm\infty} \varphi = \pm\infty$: bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $\varphi(-x) = -x + \varepsilon \sin x = -\varphi(x)$ et $\varphi(x+2\pi) = x+2\pi - \varepsilon \sin x = \varphi(x) + 2\pi$. Si $\theta = \psi(M)$: $\varphi(-\theta) = -M$ donne $\varphi(-M) = -\varphi(M)$, et $\varphi(\theta+2\pi) = M+2\pi$ donne $\varphi(M+2\pi) = \varphi(M) + 2\pi$. Enfin $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\pi) = \pi$: $\psi(0) = 0, \psi(\pi) = \pi$.
3. $\theta = \psi(M)$ vérifie $\theta - M = \varepsilon \sin \theta$, d'où $|\psi(M) - M| \leq \varepsilon$. φ est dérivable et φ' ne s'annule pas : φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\psi'(M) = \frac{1}{\varphi'(\psi(M))} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos \psi(M)}$.

4. θ^* vérifie $\theta^* = 1 + \frac{1}{2} \sin \theta^* = g(\theta^*)$, avec $g(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin x$ et $|g'(x)| = \frac{|\cos x|}{2} \leq \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$. L'IAF donne $|\theta_{n+1} - \theta^*| \leq \frac{1}{2} |\theta_n - \theta^*|$, et $|\theta_0 - \theta^*| = |1 - \psi(1)| \leq \frac{1}{2}$ (question 3) : $|\theta_n - \theta^*| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. $2^{n+1} \geq 1000 \iff n+1 \geq 10$: $\boxed{n=9}$ ($\theta^* \approx 1,4987$).

■ Corrigé de l'exercice 55

- $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$ sur $[1, +\infty[$: f croît, $f(x) \geq f(1) = 1$, et $f(x) - x = -\ln x \leq 0$. Donc $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} - u_n = -\ln u_n \leq 0$: (u_n) décroît, minorée par 1, converge vers $\ell \geq 1$ avec $f(\ell) = \ell$ (f continue), soit $\ln \ell = 0$: $\boxed{\lim u_n = 1}$.
- $\rho(x) = \frac{(x-1)^2}{2} - x + 1 + \ln x$: $\rho'(x) = x - 2 + \frac{1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ et $\rho(1) = 0$: $\rho \geq 0$ sur $[1, +\infty[$.
- $d_{n+1} = u_n - 1 - \ln u_n$ est ≥ 0 ($\ln x \leq x - 1$) et $\leq \frac{(u_n-1)^2}{2} = \frac{1}{2} d_n^2$. Récurrence : $d_0 = 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2^0}$; si $d_n \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$, alors $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} \times 4\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$. $d_4 \leq 2^{-15} \approx 3 \times 10^{-5}$ mais $d_5 \leq 2^{-31} \approx 4,7 \times 10^{-10}$: rang $\boxed{n=5}$. (En fait $u_1 \approx 1,307$; $u_2 \approx 1,039$; $u_3 \approx 1,00075$; $u_4 \approx 1 + 3 \times 10^{-7}$: le nombre de décimales exactes **double** à chaque étape.)
- Pour tout $x > 0$, $x - \ln x \geq 1$, avec égalité seulement en 1 (minimum de $x \mapsto x - \ln x$). Si $u_0 \in]0, 1[$, alors $u_1 > 1$ et l'on est ramené au cas précédent à partir du rang 1 : (u_n) converge encore vers 1.

■ 15.4 Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 56

- $f_m(1) = 0$ pour tout m : $\boxed{A(1, 0)}$. Si $m \neq p$: $f_m(x) - f_p(x) = (p - m) \ln x = 0 \iff x = 1$. $f'_m(x) = \ln x + 1 - \frac{m}{x}$, $f'_m(1) = 1 - m$: tangente $y = (1 - m)(x - 1)$, horizontale pour $\boxed{m=1}$.
- $f''_m(x) = \frac{1}{x} + \frac{m}{x^2} > 0$: f'_m est strictement croissante, de $-\infty$ (en 0^+) à $+\infty$: elle s'annule en un unique x_m . $f'_m(x_m) = 0 \iff x_m(1 + \ln x_m) = m$; comme $m > 0$, $1 + \ln x_m > 0$, soit $x_m > \frac{1}{e}$. f_m décroît sur $]0, x_m]$ (de $+\infty$ à $f_m(x_m)$) et croît sur $[x_m, +\infty[$.
- $x_m - m = -x_m \ln x_m$, donc $f_m(x_m) = (x_m - m) \ln x_m = \boxed{-x_m (\ln x_m)^2}$: le point le plus bas M_m est sur Γ . Réciproquement, pour $t > \frac{1}{e}$, $m = t(1 + \ln t) > 0$ et $f'_m(t) = 0$: $t = x_m$, et $(t, -t(\ln t)^2)$ est le point le plus bas de C_m . **Γ est exactement le lieu des points les plus bas.**
- C_m coupe (Ox) en 1 et en m : (a) = $C_{1/2}$, (b) = C_1 (minimum 0 en A), (c) = C_2 , (d) = C_{2e} . $x_m = e \iff m = e(1 + 1) = \boxed{2e}$: point le plus bas $(e, -e)$.
- $G'(x) = (e - x) \ln x + \left(ex - \frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{x} - e + \frac{x}{2} = (e - x) \ln x \checkmark$. Sur $[1, e]$, $f_e(x) = (x - e) \ln x \leq 0$: $A = G(e) - G(1) = \left(-\frac{e^2}{4}\right) - \left(-e + \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{4e - e^2 - 1}{4}} \approx 0,62$ u.a.

■ Corrigé de l'exercice 57

- $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0$. Si (u_n) convergeait vers ℓ , la continuité de $x \mapsto x + e^{-x}$ donnerait $\ell = \ell + e^{-\ell}$, absurde. Croissante et non convergente, elle n'est pas majorée : $\boxed{\lim u_n = +\infty}$.
- $a(t) = e^t - 1 - t$ a pour minimum $a(0) = 0$ ($a'(t) = e^t - 1$). $b(t) = 1 + t + t^2 - e^t$: $b''(t) = 2 - e^t$, donc b' croît sur $[0, \ln 2]$ puis décroît sur $[\ln 2, 1]$; $b'(0) = 0$ et $b'(1) = 3 - e > 0$: $b' \geq 0$ sur $[0, 1]$, b croît et $b(0) = 0$: $b \geq 0$.
- $w_{n+1} = e^{u_n} e^{e^{-u_n}} = w_n e^{\frac{1}{w_n}}$. Comme $u_n \geq 0$, $w_n \geq 1$ et $t = \frac{1}{w_n} \in]0, 1]$: $1 + t \leq e^t \leq 1 + t + t^2$; en multipliant par w_n : $w_n + 1 \leq w_{n+1} \leq w_n + 1 + \frac{1}{w_n}$.

4. $w_0 = 1$ et $w_{n+1} \geq w_n + 1$: $w_n \geq n + 1$. Donc $\frac{1}{w_k} \leq \frac{1}{k+1}$, et $w_{k+1} - w_k \leq 1 + \frac{1}{k+1}$; en sommant pour $k = 0, \dots, n-1$: $w_n \leq 1 + n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
5. $\ln(1+s) \leq s$ avec $s = -\frac{1}{k}$: $\ln \frac{k-1}{k} \leq -\frac{1}{k}$, soit $\frac{1}{k} \leq \ln k - \ln(k-1)$. En sommant pour $k = 2, \dots, n$ (télescopage) : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$, d'où $n+1 \leq w_n \leq n+2 + \ln n$.
6. $\ln(n+1) \leq u_n \leq \ln(n+2 + \ln n)$, donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq u_n - \ln n \leq \ln\left(1 + \frac{2+\ln n}{n}\right)$; les deux bornes tendent vers 0 ($\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$) : $\lim(u_n - \ln n) = 0$. La suite tend vers $+\infty$ aussi lentement que $\ln n$: il faut environ un million d'étapes pour que u_n dépasse 13,8.

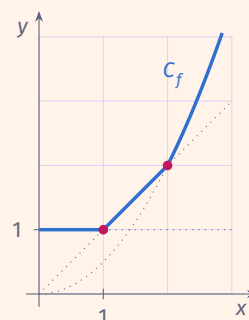
■ Corrigé de l'exercice 58

1. $\varphi'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$: φ croît sur $]0, e^2]$, décroît sur $[e^2, +\infty[$; $\max \varphi = \varphi(e^2) = \frac{2}{e}$. En 0^+ : $\varphi \rightarrow -\infty$; en $+\infty$: $\varphi(x) = \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \rightarrow 0^+$. Signe : $\varphi < 0$ sur $]0, 1[$, $\varphi > 0$ sur $]1, +\infty[$.
2. $a^{\sqrt{b}} = e^{\sqrt{b}\ln a}$ et $b^{\sqrt{a}} = e^{\sqrt{a}\ln b}$; exp croissante, puis division par $\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$: $a^{\sqrt{b}} < b^{\sqrt{a}} \iff \sqrt{b}\ln a < \sqrt{a}\ln b \iff \varphi(a) < \varphi(b)$ (et de même avec $=$).
3. $e > 2,7$ donne $e^2 > 7,29 > 5$: $3 < 5 < e^2$ et φ croît sur $]0, e^2]$: $3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$. $e < 3$ donne $e^2 < 9$: sur $[e^2, +\infty[$, φ décroît, $\varphi(9) > \varphi(16)$: $9^{\sqrt{16}} > 16^{\sqrt{9}}$, soit $9^4 = 6561 > 16^3 = 4096$ ✓. De même $10^{\sqrt{11}} > 11^{\sqrt{10}}$.
4. $4^{\sqrt{x}} = x^{\sqrt{4}} \iff \varphi(x) = \varphi(4) = \ln 2 \in]0, \frac{2}{e}[$. Sur $]0, 1]$, $\varphi \leq 0$: pas de solution ; sur $]1, e^2]$ et sur $[e^2, +\infty[$, φ est une bijection sur $]0, \frac{2}{e}[$: une solution dans chacun, 4 et 16 (car $\varphi(16) = \frac{4\ln 2}{4} = \ln 2$). $S = \{4, 16\}$: $4^{\sqrt{16}} = 16^{\sqrt{4}} = 256$.
5. L'équation équivaut à $\varphi(x) = \varphi(a)$, et $x = a$ est solution. Si $a \leq 1$: $\varphi(a) \leq 0$, valeur prise seulement sur $]0, 1]$ où φ est injective : solution unique. Si $a > 1$, $a \neq e^2$: $0 < \varphi(a) < \frac{2}{e}$, valeur prise une fois sur $]1, e^2[$ et une fois sur $]e^2, +\infty[$: deux solutions. Si $a = e^2$: $\frac{2}{e}$ n'est atteint qu'en e^2 . D'où le résultat.

x	0	e^2	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	0	-
φ	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

■ Corrigé de l'exercice 59

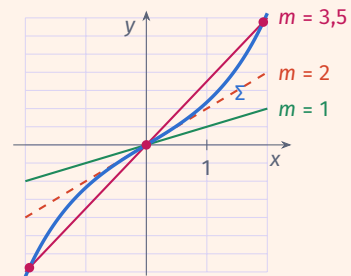
1. $0 \leq b, c \leq a$ donne $a^n \leq a^n + b^n + c^n \leq 3a^n$, et $\sqrt[n]{\cdot}$ est croissante : $a \leq \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq \sqrt[n]{3} a$. Or $\sqrt[n]{3} = e^{\frac{\ln 3}{n}} \rightarrow 1$: par encadrement, la limite est a .
2. Les réels $1, x, \frac{x^2}{2}$ sont positifs ; en les rangeant, 1 donne $f(x) = \max\left(1, x, \frac{x^2}{2}\right)$. Or $x \geq 1$ sur $[1, +\infty[$; $\frac{x^2}{2} \geq x \iff x \geq 2$; $\frac{x^2}{2} \geq 1 \iff x \geq \sqrt{2}$. Donc $f(x) = 1$ sur $[0, 1]$, $f(x) = x$ sur $[1, 2]$, $f(x) = \frac{x^2}{2}$ sur $[2, +\infty[$.
3. Les trois expressions sont continues et se raccordent ($1 = 1$ en 1 , $2 = \frac{4}{2}$ en 2) : f est continue. En 1 : $f'_g(1) = 0 \neq 1 = f'_d(1)$; en 2 : $f'_g(2) = 1 \neq 2 = f'_d(2)$: deux points anguleux.



4. $h'_n(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} > 0$. Pour $x \geq 0$: $h_n(x) - x = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{-nx}) \in]0, \frac{\ln 2}{n}]$; pour $x < 0$: $h_n(x) - 0 = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{nx}) \in]0, \frac{\ln 2}{n}]$. Par encadrement, $h_n(x) \rightarrow h(x) = \max(0, x)$, qui **n'est pas dérivable en 0** ($h'_g(0) = 0$, $h'_d(0) = 1$). **Une limite de fonctions dérivables n'est pas forcément dérivable.**

■ Corrigé de l'exercice 60

- $\varphi(-x) = \frac{e^{-x}-e^x}{-x} = \varphi(x)$ sur $\mathbb{R}^*$: φ est paire. $\varphi(x) = \frac{e^x-1}{x} + \frac{e^{-x}-1}{-x} \rightarrow 1+1 = 2$ en 0 ; $\varphi(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^{-x}}{x} \rightarrow +\infty$ en $+\infty$.
- $\psi'(x) = (e^x + e^{-x}) + x(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) = x(e^x - e^{-x}) > 0$ pour $x > 0$; $\psi(0) = 0$: $\psi > 0$ sur $]0, +\infty[$.
Et $\varphi'(x) = \frac{x(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})}{x^2} = \frac{\psi(x)}{x^2} > 0$: φ croît strictement sur $]0, +\infty[$.
- $x = 0$ est toujours solution ; pour $x \neq 0$, $(E_m) \iff \varphi(x) = m$. Sur $]0, +\infty[$, φ est une bijection sur $]2, +\infty[$; par parité, de même sur $]-\infty, 0[$. **$m \leq 2$: une solution ; $m > 2$: trois solutions** $(-x_m, 0, x_m)$. La courbe $\Sigma : y = e^x - e^{-x}$ est impaire, de tangente $y = 2x$ en O (dérivée $e^x + e^{-x}$, égale à 2 en 0), convexe sur $]0, +\infty[$: les droites issues de O de pente $m \leq 2$ ne la rencontrent qu'en O , les plus raides la coupent en trois points.
- $\varphi([0, 1]) = [2, e - \frac{1}{e}]$: (E_m) a **trois** solutions dans $[-1, 1]$ si $2 < m \leq e - \frac{1}{e} \approx 2,35$, et **une seule** (0) sinon.
- $x_m = \chi(m)$, où χ est la réciproque de la restriction de φ à $]0, +\infty[$: continue, strictement croissante, de $]2, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. Donc $\lim_{m \rightarrow 2^+} x_m = 0$ et $\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m = +\infty$ (par exemple $x_3 \approx 1,62$).



Partie 4 • Méthodes de concours

20 fiches pour résoudre vite et bien

1

Domaine de définition express

Tronc commun

Le réflexe n°1, avant tout calcul

Méthode : l'idée en une phrase

On dresse la liste des **dangers** — un dénominateur doit être **non nul**, une racine carrée doit porter sur un nombre **positif ou nul** (**strictement positif** si la racine est au dénominateur) — puis D_f est **l'intersection** de toutes les conditions, lue sur un axe gradué. (En 2^e Bac : $\ln u(x)$ exige $u(x) > 0$.)

Exemple : $f(x) = \frac{\sqrt{12 - x - x^2}}{x^2 - 2x - 3}$

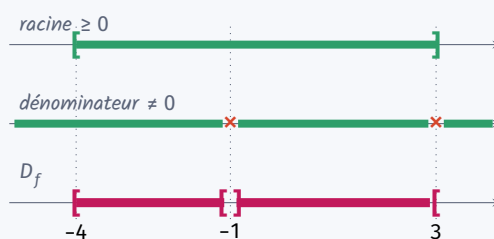
Danger 1, la racine : $12 - x - x^2 = -(x - 3)(x + 4) \geq 0 \iff x \in [-4, 3]$ (trinôme de coefficient -1 : positif **entre** ses racines).

Danger 2, le dénominateur : $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) \neq 0 \iff x \neq -1$ et $x \neq 3$.

Intersection (axe ci-contre) :

$$D_f = [-4, -1[\cup]-1, 3[$$

Le réel 3, permis par la racine, est interdit par le dénominateur : le crochet se **retourne**.



Attention, piège !

Chercher le domaine AVANT de simplifier. $u(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ et $v(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$ ne sont pas la même fonction :

$D_u =]-\infty, -2[\cup [1, +\infty[$, mais $D_v = [1, +\infty[$. Elles ne coïncident que sur $[1, +\infty[$.

À toi !

1. Domaine de $h(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2-x}$?

Réponse : 1. $D_h =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 2[$

2. Domaine de $k(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{|x|-1}$?

2. $x \geq -4$ et $|x| \neq 1$: $D_k = [-4, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

2

L'image par le discriminant

Tronc commun

Un maximum sans dériver

Méthode : l'idée en une phrase

Le réel y est une valeur prise par f **si et seulement si** l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x , a au moins une solution dans D_f : pour un quotient de trinômes, c'est une équation du second degré en x , et la condition $\Delta(y) \geq 0$ donne l'ensemble des valeurs, donc le minimum et le maximum.

Exemple : l'ensemble des valeurs de $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1}$

$x^2 + 1 > 0$, donc $D_f = \mathbb{R}$. Pour y réel, en multipliant par $x^2 + 1$:

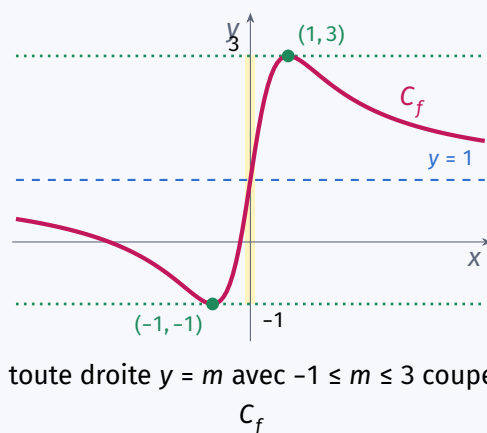
$$f(x) = y \iff (1 - y)x^2 + 4x + (1 - y) = 0.$$

Cas $y = 1$: $4x = 0$, solution $x = 0$ ($f(0) = 1$).

Cas $y \neq 1$: second degré, $\Delta' = 4 - (1 - y)^2 = (1 + y)(3 - y)$; une solution existe $\iff \Delta' \geq 0 \iff -1 \leq y \leq 3$.

Donc $f(\mathbb{R}) = [-1, 3]$.

Pour $y = 3$: racine double $x = \frac{-2}{1-3} = 1$, **maximum**
 $f(1) = 3$; pour $y = -1$: $x = \frac{-2}{1+1} = -1$, **minimum**
 $f(-1) = -1$.



toute droite $y = m$ avec $-1 \leq m \leq 3$ coupe C_f

★ Astuce de concours : contrôle en dix secondes

Une fois les bornes trouvées, une identité les **prouve** : $f(x) - 3 = \frac{-2(x-1)^2}{x^2+1} \leq 0$ et $f(x) + 1 = \frac{2(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0$.

Attention, piège !

$\Delta \geq 0$ **ne suffit pas** : la solution x doit être dans D_f . Pour $g(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ ($x \neq \pm 1$) : $g(x) = y \iff (1 - y)x^2 + x + y = 0$, et $\Delta = (2y - 1)^2 \geq 0$ pour tout y . Pourtant : $y = 1$ donne $x = -1$, et $y = \frac{1}{2}$ donne la racine double $x = -1$, **interdite**. Donc $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}; 1\}$ (en effet $g(x) = \frac{x}{x-1}$ pour $x \neq -1$).

À toi !

1. Ensemble des valeurs de $h(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$?

2. Pour quels réels m l'équation $f(x) = m$ de l'exemple a-t-elle **une seule** solution ?

Réponse : 1. $x^2 - yx + y + 8 = 0$, $\Delta = (y - 8)(y + 4) \geq 0$ ($x = 1$ jamais solution) : $]-\infty, -4] \cup [8, +\infty[$. 2. $m \in \{-1; 1; 3\}$ ($m = 1$: équation $4x = 0$).

3

Parité, axe et centre

Tronc commun 1^{re} Bac

Étudier la moitié, déduire le reste

L'idée en une phrase

C_f admet la droite $x = a$ pour axe (resp. le point $\Omega(a, b)$ pour centre) de symétrie si et seulement si, pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$ (resp. $f(2a - x) + f(x) = 2b$) ; pour $a = b = 0$ on retrouve les fonctions paires et impaires.

Exemple : un axe, puis un centre

a) Un axe. $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{6-x}$: $D_g = [0, 6]$ est symétrique par rapport à 3 ($x \in [0, 6] \iff 6-x \in [0, 6]$) et

$$g(6-x) = \sqrt{6-x} + \sqrt{x} = g(x)$$

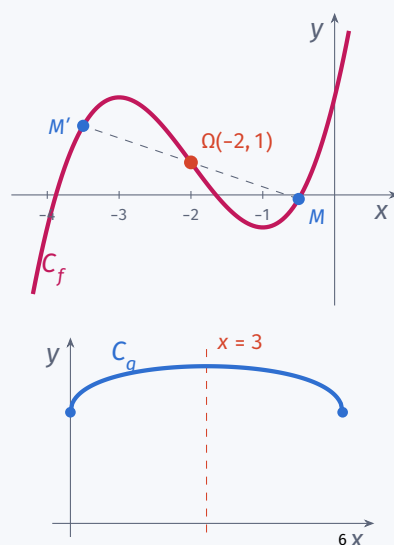
donc la droite $x = 3$ est un axe de symétrie de C_g .

b) Un centre. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$. **Changement d'origine :** on pose $X = x+2$ (choisi pour faire disparaître le terme en X^2 , car $-\frac{b}{3a} = -2$) et $Y = y - 1$:

$$f(x) = (X-2)^3 + 6(X-2)^2 + 9(X-2) + 3 = X^3 - 3X + 1.$$

Ainsi $Y = X^3 - 3X$, fonction **impaire** de X : $\Omega(-2, 1)$ est centre de symétrie de C_f . Contrôle : $f(-4-x) + f(x) = 2$ pour tout x .

Exemple de points symétriques : $f(-0,5) = -0,125$ et $f(-3,5) = 2,125$, de somme 2.



★ Astuce de concours : la symétrie montre l'extremum

$(\sqrt{x} + \sqrt{6-x})^2 = 6 + 2\sqrt{x(6-x)}$ et $x(6-x) = 9 - (x-3)^2 \leq 9$: donc $\sqrt{6} \leq g(x) \leq 2\sqrt{3}$, le maximum $2\sqrt{3}$ étant atteint **sur l'axe** ($x = 3$), le minimum $\sqrt{6}$ aux deux bords ($x = 0$ et $x = 6$).

Attention, piège !

Le domaine d'abord. $x \mapsto x^2$ définie sur $[-2, 3]$ n'est **pas** paire : 3 est dans le domaine mais pas -3. Et pour prouver qu'une fonction n'est **pas** paire (ni impaire), un seul contre-exemple suffit : pour $h(x) = x^3 + 1$, $h(-1) = 0$ alors que $h(1) = 2$, donc $h(-1) \neq h(1)$ et $h(-1) \neq -h(1)$.

À toi !

1. Montrer que $C : y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ admet un centre de symétrie. 2. Un axe pour $y = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x$?

Réponse : 1. Avec $X = x - 1$: $y = X + \frac{2}{X}$, impaire : centre $\Omega(1, 0)$. 2. Avec $X = x - 1$: $y = X^4 - 4X^2 + 3$, paire : axe $x = 1$.

4

Transformer une courbe

Tronc commun

Une courbe connue, zéro calcul

L'idée en une phrase

Ce qui modifie $f(x)$ agit **verticalement** et « à l'endroit », ce qui modifie x agit **horizontalement** et « à l'envers » :

$y = f(x) + b$	translation de vecteur $b\vec{j}$	$y = f(x - a)$	translation de vecteur $a\vec{i}$
$y = -f(x)$	symétrie d'axe (Ox)	$y = f(-x)$	symétrie d'axe (Oy)
$y = kf(x) \ (k > 0)$	ordonnées multipliées par k	$y = f(kx) \ (k > 0)$	abscisses divisées par k

Exemple : tracer $C_g : y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ à partir de la parabole $P : y = x^2$

Forme canonique : $g(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x) + 2 = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4$.

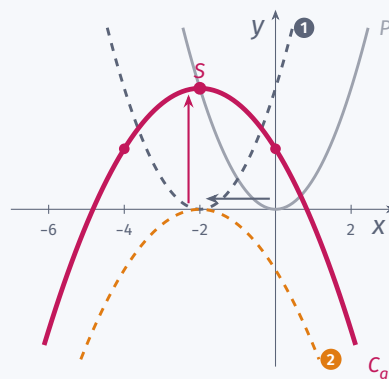
① $y = (x + 2)^2$: translation de $-2\vec{i}$ (vers la gauche).

② $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2$: symétrie d'axe (Ox) et ordonnées divisées par 2.

③ $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4$: translation de $4\vec{j}$.

Bilan : sommet $S(-2, 4)$, axe $x = -2$, $g(0) = g(-4) = 2$, racines $(x + 2)^2 = 8 \iff x = -2 \pm 2\sqrt{2}$.

Chaque point de P suit le même chemin : $(2, 4) \rightarrow (0, 4) \rightarrow (0, -2) \rightarrow (0, 2)$.



★ Astuce de concours : écrire l'équation d'une courbe transformée

Translation de vecteur $\vec{u}(a, b)$: dans $y = f(x)$, on remplace x par $x - a$ et y par $y - b$, d'où $y = f(x - a) + b$. Symétrique de C_f par rapport au point $\Omega(a, b)$: $y = 2b - f(2a - x)$ (le point (x_0, y_0) va en $(2a - x_0, 2b - y_0)$).

Attention, piège !

$f(2x - 2)$ n'est pas « $f(2x)$ décalée de 2 ». On écrit $f(2x - 2) = f(2(x - 1))$: après avoir tracé $y = f(2x)$, on translate de $1\vec{i}$ (et non de $2\vec{i}$). Contrôle avec un point : si $A(4, 1) \in C_f$, le point de même ordonnée sur $y = f(2x - 2)$ vérifie $2x - 2 = 4$, soit $x = 3$: c'est $(3, 1)$, et non $(4, 1)$.

À toi !

Le point $A(4, 1)$ appartient à C_f . Quel point est sûrement sur la courbe de :

1. $y = 2f(x - 3) - 1$? 2. $y = f(2x) + 3$?

Réponse : 1. $x - 3 = 4$: $(7, 2 \times 1 - 1) = (7, 1)$. 2. $2x = 4$: $(2, 1 + 3) = (2, 4)$.

5

Courbes de $|f|$ et de $f(|x|)$

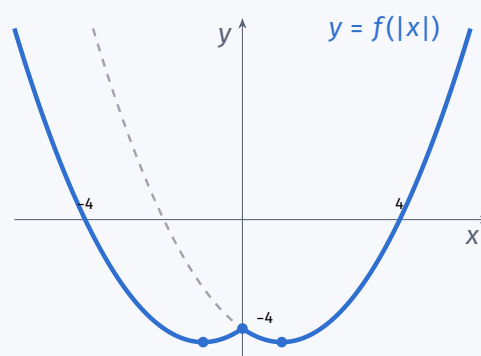
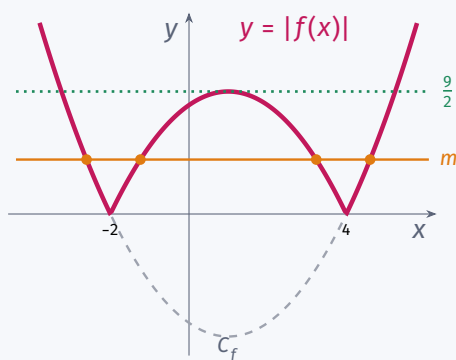
Tronc commun 1^{re} Bac

Plier, recopier

L'idée en une phrase

Pour $|f|$, on **plie** : on garde la partie de C_f située au-dessus de (Ox) et on remplace la partie située au-dessous par sa symétrique par rapport à (Ox) ; pour $f(|x|)$, on **recopie** : on garde la partie d'abscisses $x \geq 0$ et on la complète par symétrie par rapport à (Oy) , car $x \mapsto f(|x|)$ est paire.

Exemple : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = \frac{1}{2}(x - 4)(x + 2)$, sommet $(1, -\frac{9}{2})$, $f(0) = -4$



Lecture du nombre de solutions de $|f(x)| = m$ (on fait glisser la droite $y = m$ sur la figure de gauche) :

$m < 0$: aucune ; $m = 0$: 2 ; $0 < m < \frac{9}{2}$: 4 ; $m = \frac{9}{2}$: 3 (dont $x = 1$) ; $m > \frac{9}{2}$: 2.

De même, $f(|x|) = m$ a 0, 2, 4, 3, 2 solutions selon que $m < -\frac{9}{2}$, $m = -\frac{9}{2}$, $-\frac{9}{2} < m < -4$, $m = -4$, $m > -4$.

★ Astuce de concours : deux droites au lieu d'un pliage

Pour $m > 0$: $|f(x)| = m \iff f(x) = m$ ou $f(x) = -m$. On peut donc compter directement sur C_f les points d'intersection avec les **deux** droites $y = m$ et $y = -m$: ici, pour $0 < m < \frac{9}{2}$, $2 + 2 = 4$ solutions.

Attention, piège !

$|f(x)|$ et $f(|x|)$ sont deux fonctions **différentes** : ici $|f(0)| = 4$ mais $f(|0|) = -4$. La première est toujours positive, la seconde toujours paire. Et $\sqrt{f(x)^2} = |f(x)|$, jamais $f(x)$.

À toi !

Nombre de solutions de : 1. $|x^2 - 6x + 5| = 3$? 2. $x^2 - 6|x| + 5 = 5$?

Réponse : 1. Le sommet de $x^2 - 6x + 5$ est $(3, -4)$: la « bosse » de $|f|$ monte à $4 > 3$, d'où 4 solutions.

2. 3 solutions : 0, 6 et -6.

6

Composées et $f(f(x)) = 0$ 1^{re} Bac

Une équation dans l'équation

Méthode : l'idée en une phrase

Pour résoudre $f(f(x)) = 0$, on pose $t = f(x)$: on résout d'abord $f(t) = 0$, de solutions $t_1, t_2, \dots$, puis on **compte** les solutions de chaque équation $f(x) = t_i$ sur le tableau de variations de f , et on additionne. (Rappel : si u et v varient dans le même sens, $v \circ u$ est croissante ; sinon, décroissante.)

Exemple : combien de solutions pour $f(f(x)) = 0$, avec $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$?

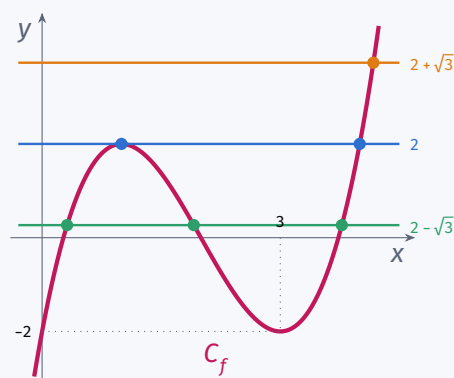
Variations. $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$: f croît de $-\infty$ à $f(1) = 2$, décroît jusqu'à $f(3) = -2$, puis croît jusqu'à $+\infty$.

Étape 1 : $f(t) = 0$. 2 est racine évidente : $f(t) = (t-2)(t^2 - 4t + 1)$, d'où $t \in \{2 - \sqrt{3}; 2; 2 + \sqrt{3}\}$.

Étape 2 : on compte.

- $f(x) = 2 - \sqrt{3} \approx 0,27$, strictement entre -2 et 2 : **3** solutions.
- $f(x) = 2$, valeur du maximum local : $f(x) - 2 = (x-1)^2(x-4)$: **2** solutions, 1 et 4.
- $f(x) = 2 + \sqrt{3} \approx 3,73 > 2$: **1** solution (dans $]4, +\infty[$).

Les t_i étant distincts, les solutions le sont :
 $3 + 2 + 1 = 6$ solutions.



3 + 2 + 1 points d'intersection

★ Astuce de concours : $f(f(x)) = x$ avec f croissante

Si f est strictement croissante, $f(f(x)) = x \iff f(x) = x$ (si $f(x) > x$, alors $f(f(x)) > f(x) > x$).
 Ainsi, avec $f(x) = \frac{x^3+6}{7}$: $\left(\frac{x^3+6}{7}\right)^3 + 6 = 7x \iff x^3 - 7x + 6 = 0$, d'où $S = \{-3; 1; 2\}$.

Attention, piège !

$f \circ f(x) = f(f(x))$ n'est **pas** $(f(x))^2$. Et $g \circ f$ n'est définie qu'aux points où $f(x) \in D_g$: par exemple $\sqrt{f(x)}$ exige $f(x) \geq 0$, $\frac{1}{f(x)}$ exige $f(x) \neq 0$.

À toi !

1. Résoudre $f(f(x)) = 0$ pour $f(x) = x^2 - 1$.
 2. Variations de $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 10}$ sur $\mathbb{R}$?
- Réponse : 1. $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$: $x^2 = 2$ ou $x^2 = 0$, soit $\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$. 2. $u(x) = (x-1)^2 + 9$ et la racine carrée est croissante : décroissante sur $]-\infty, 1]$, croissante sur $[1, +\infty[$, minimum 3.

7

Nombre de solutions de $f(x) = m$

1^{re} BacIsoler m , puis faire glisser une droite

Méthode : l'idée en une phrase

On **isole le paramètre** pour écrire l'équation sous la forme $g(x) = m$, on étudie g (variations et limites), puis on fait glisser la droite horizontale $y = m$ et on compte ses points d'intersection avec C_g .

Exemple : discuter selon m le nombre de solutions de $(E_m) : x^3 - mx + 2 = 0$

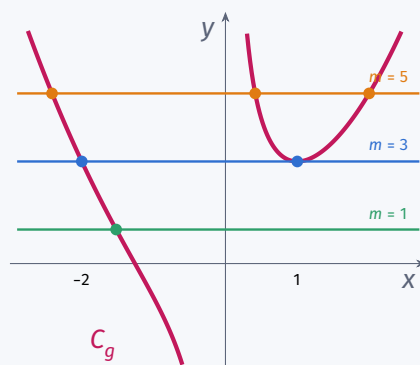
Isoler m . 0 n'est jamais solution ($0 - 0 + 2 \neq 0$); pour $x \neq 0$:

$$(E_m) \iff m = x^2 + \frac{2}{x} = g(x).$$

Étudier g sur $\mathbb{R}^*$: $g'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2}$, du signe de $x - 1$.

- sur $]-\infty, 0[$: g décroît de $+\infty$ à $-\infty$;
- sur $]0, 1]$: g décroît de $+\infty$ à $g(1) = 3$;
- sur $[1, +\infty[$: g croît de 3 à $+\infty$.

Conclure (figure) : $m < 3$: **une** solution ; $m = 3$: **deux** solutions (-2 et 1 , car $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$); $m > 3$: **trois** solutions. Pour $m = 5$: $x^3 - 5x + 2 = (x-2)(x^2 + 2x - 1)$, de racines 2 et $-1 \pm \sqrt{2}$.



1, 2 puis 3 points d'intersection

★ Astuce de concours : une droite qui tourne

Autre lecture : $x^3 - mx + 2 = 0 \iff x^3 + 2 = mx$: on fait tourner la droite $y = mx$ autour de O et on compte ses points communs avec la courbe $y = x^3 + 2$. La valeur critique $m = 3$ est la pente de la **tangente issue de O** (contact au point $(1, 3)$, voir la fiche 11).

Attention, piège !

Diviser par x exige $x \neq 0$: on vérifie d'abord que 0 n'est pas solution de l'équation de départ (sinon on la perd). Et au niveau d'un extremum ($m = 3$), la droite est **tangente** à C_g : la racine 1 est double, on compte 2 solutions distinctes et non 3.

À toi !

Combien de solutions a l'équation $(x^2 - 4x)^2 = m$ pour 1. $m = 9$? 2. $m = 16$?

Réponse : 1. $x^2 - 4x = \pm 3$: 4 solutions $(1, 3, 2 \pm \sqrt{7})$. 2. 16 est le maximum local (en $x = 2$) : $x^2 - 4x = \pm 4$, 3 solutions $(2$ et $2 \pm 2\sqrt{2})$.

8

Cubique : trois racines ?

1^{re} Bac

Le signe d'un seul produit

L'idée en une phrase

Si $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ a deux extremums locaux en $\alpha < \beta$ (racines de P'), alors P a **trois racines réelles distinctes** si et seulement si $P(\alpha) \times P(\beta) < 0$; si ce produit est nul, une racine double et une simple ; s'il est positif, une seule racine réelle.

Exemple : $P_k(x) = x^3 - 6x^2 + k$: pour quels réels k trois racines distinctes ?

$$P'_k(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4) : \alpha = 0, \beta = 4.$$

$$P_k(0) = k \quad \text{et} \quad P_k(4) = k - 32.$$

Trois racines distinctes si et seulement si

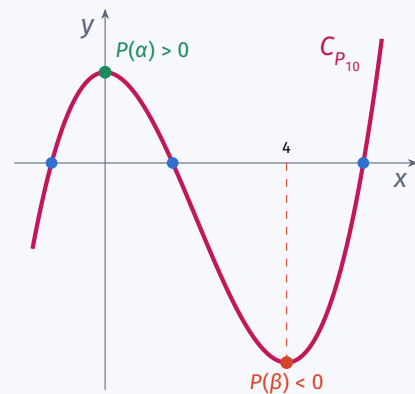
$$k(k - 32) < 0 \iff 0 < k < 32.$$

Pour $k = 10$, on peut même **localiser** les racines par le TVI (ou par les variations) :

x	-2	-1	1	2	5	6
$P_{10}(x)$	-22	3	5	-6	-15	10

Les racines sont dans $] -2, -1[$, $] 1, 2[$ et $] 5, 6[$ (valeurs approchées : -1,18 ; 1,49 ; 5,69).

Bornes : $k = 0$ donne $x^2(x - 6)$, racine double 0 ; $k = 32$ donne $(x - 4)^2(x + 2)$, racine double 4.



un maximum au-dessus, un minimum au-dessous : la courbe traverse trois fois (Ox)

★ Astuce de concours : un contrôle gratuit

Le point d'inflexion d'une cubique est son centre de symétrie, situé au milieu des deux extremums : $P(\alpha) + P(\beta) = 2P\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Ici : $P_k(0) + P_k(4) = 2k - 32 = 2P_k(2)$.

Attention, piège !

Si P' n'a pas deux racines distinctes ($\Delta' \leq 0$), P est strictement monotone : il a **exactement une** racine réelle (un polynôme de degré 3 en a toujours au moins une !). Et si $P(\alpha)P(\beta) = 0$, on n'a que **deux** racines distinctes.

À toi !

1. Nombre de racines réelles de $x^3 + x + 5$? a-t-il trois racines distinctes ?

Réponse : 1. $P'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: une seule.

2. Pour quels a le polynôme $2x^3 - 9x^2 + 12x + a$

$P'(x) = 6(x - 1)(x - 2)$, $P(1) = a + 5$, $P(2) = a + 4$:

$(a + 5)(a + 4) < 0 \iff -5 < a < -4$.

9

Asymptote oblique express

1^{re} Bac

Une division, et tout est dit

L'idée en une phrase

Pour $f = \frac{P}{Q}$ avec $\deg P = \deg Q + 1$, la division euclidienne $P = Q \times (ax + b) + R$ donne

$f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$ avec $\frac{R}{Q} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: la droite $y = ax + b$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$, et le **signe** de $\frac{R}{Q}$ donne la position.

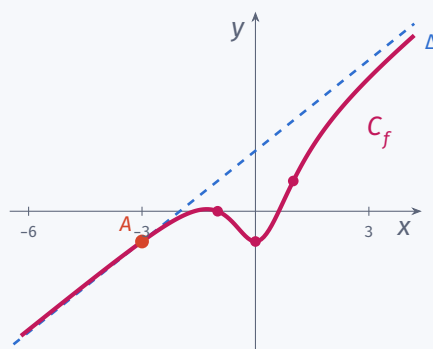
Exemple : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$

Division : $x^3 + 2x^2 - 1 = (x^2 + 1)(x + 2) - x - 3$, donc

$$f(x) = x + 2 - \frac{x + 3}{x^2 + 1}.$$

Asymptote : $\frac{x + 3}{x^2 + 1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$ (degré 1 sur degré 2) : $\Delta : y = x + 2$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

Position : $f(x) - (x + 2) = -\frac{x + 3}{x^2 + 1}$, du signe de $-(x + 3)$: C_f est **au-dessus** de Δ si $x < -3$, **au-dessous** si $x > -3$, et **traverse** son asymptote en $A(-3, -1)$.
Autre voie : $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, puis $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 2$.



★ Astuce de concours

Pour une racine de trinôme, on complète le carré : $\sqrt{x^2 + 6x + 10} = \sqrt{(x + 3)^2 + 1}$ « ressemble » à $|x + 3|$, et en effet $\sqrt{(x + 3)^2 + 1} - |x + 3| = \frac{1}{\sqrt{(x + 3)^2 + 1} + |x + 3|} \rightarrow 0$. Asymptotes : $y = x + 3$ en $+\infty$ et $y = -x - 3$ en $-\infty$.

Attention, piège !

Une courbe peut **couper** son asymptote oblique (ici en A) : « asymptote » ne veut pas dire « jamais atteinte ». Et pour une racine, les asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ sont **différentes**.

À toi !

Asymptotes obliques de 1. $y = \frac{3x^2 - x + 1}{x + 1}$? 2. $y = \sqrt{4x^2 - 4x + 5}$?

Réponse : 1. $3x^2 - x + 1 = (x + 1)(3x - 4) + 5$: $y = 3x - 4$. 2. $\sqrt{(2x - 1)^2 + 4}$: $y = 2x - 1$ en $+\infty$, $y = -2x + 1$ en $-\infty$.

10

Formes indéterminées : réflexes1^{re} Bac

Transformer, jamais deviner

Méthode : l'idée en une phrase

Devant une forme indéterminée, on ne « devine » pas : on **transforme l'écriture** jusqu'à reconnaître une limite connue.

Situation**Réflexe**polynôme ou fraction en $\pm\infty$

factoriser par le terme de plus haut degré

 $\infty - \infty$ avec des racines

multiplier par la quantité conjuguée

 $\frac{0}{0}$ en a avec des polynômesfactoriser haut et bas par $(x - a)$ $\frac{u(x)-u(a)}{x-a}$ en a c'est le **nombre dérivé** $u'(a)$ $\frac{0}{0}$ trigonométrique en 0 $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1, \frac{\tan x}{x} \rightarrow 1, \frac{1-\cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ **Exemple : quatre limites, quatre réflexes**

$$1. \text{ Conjuguée : } \sqrt{9x^2 + 4x + 1} - 3x = \frac{4x + 1}{\sqrt{9x^2 + 4x + 1} + 3x} = \frac{4 + \frac{1}{x}}{\sqrt{9 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

$$2. \text{ Factoriser par } (x + 1) : \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x^3 + 2x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^3 + 2)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{1}{-2} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

$$3. \text{ Nombre dérivé : } u(x) = \sqrt{2x + 3}, u(3) = 3, u'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 3}}, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x + 3} - 3}{x - 3} = u'(3) = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

$$4. \text{ Limites de référence : } \frac{1 - \cos 2x}{x \tan 5x} = \frac{4}{5} \times \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} \times \frac{5x}{\tan 5x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times 1 = \boxed{\frac{2}{5}}.$$

★ **Astuce de concours : $x^n - a^n$**

$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-1})$, donc $\frac{x^n - a^n}{x - a} \rightarrow na^{n-1}$ en a (nombre dérivé de x^n) ;
ex. : $\frac{x^5 - 32}{x - 2} \xrightarrow{x \rightarrow 2} 80$.

Attention, piège !

En $-\infty$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{x} = -1$, et non 1. Et rappelons que « $\frac{\infty}{\infty} = 1$ » ou « $0 \times \infty = 0$ » sont **faux** : ce sont justement des formes indéterminées.

À toi !

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} + x) ?$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1} ?$$

Réponse : 1. Conjuguée : $\frac{5x}{\sqrt{x^2 + 5x} - x} = \frac{5}{-\sqrt{1 + 5/x} - 1} \rightarrow -\frac{5}{2}$. 2. $\frac{x^3 - 1}{x - 1} \times \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = (x^2 + x + 1)(\sqrt{x} + 1) \rightarrow 3 \times 2 = 6$.

11 Tangentes passant par un point

1^{re} Bac

L'inconnue est le point de contact

Méthode : l'idée en une phrase

La tangente au point d'abscisse a , $(T_a) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$, passe par $P(p, q)$ si et seulement si $q = f'(a)(p - a) + f(a)$: c'est une équation d'inconnue a , et il y a autant de tangentes issues de P que de solutions a .

Exemple : tangentes à la parabole $y = \frac{x^2}{4}$ issues du point $P(1, -2)$

Ici $f(x) = \frac{x^2}{4}$ et $f'(x) = \frac{x}{2}$:

$$(T_a) : y = \frac{a}{2}(x - a) + \frac{a^2}{4} = \frac{a}{2}x - \frac{a^2}{4}.$$

$$P \in (T_a) \iff -2 = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} \iff a^2 - 2a - 8 = 0$$

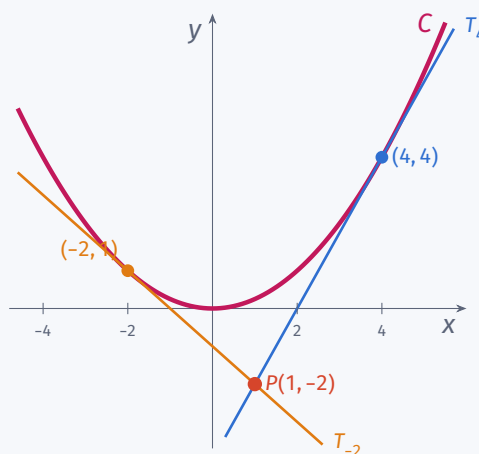
$$\iff (a - 4)(a + 2) = 0 \iff a = 4 \text{ ou } a = -2.$$

Deux tangentes passent par P :

- $(T_4) : y = 2x - 4$, point de contact $(4, 4)$;
- $(T_{-2}) : y = -x - 1$, point de contact $(-2, 1)$.

Contrôle : $2 \times 1 - 4 = -2$ et $-1 - 1 = -2$.

P est « sous » la parabole : deux tangentes ; « au-dessus », aucune.



★ Astuce de concours : tangentes issues de l'origine

Pour $P = O$, la condition devient $f(a) = a f'(a)$: la tangente en a passe par O si et seulement si la pente $f'(a)$ est égale à la pente $\frac{f(a)}{a}$ de la droite (OM) . C'est le réflexe des questions « droite passant par O et tangente à la courbe ».

Attention, piège !

Même si P est sur la courbe, il peut exister une AUTRE tangente passant par P . Pour $y = x^3 - 3x$ et $P(2, 2) \in C : 2 = (3a^2 - 3)(2 - a) + a^3 - 3a \iff -2(a - 2)^2(a + 1) = 0$. Il y a la tangente en 2, $y = 9x - 16$, et la tangente horizontale en -1 , $y = 2$, qui passe aussi par P .

À toi !

1. Tangentes à l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ passant par $P(-1, 3)$?
2. Tangentes à $y = x^2 + 4$ passant par O ?

Réponse : 1. $3 = \frac{1+2a}{a^2} \iff 3a^2 - 2a - 1 = 0 \iff a \in \left\{1; -\frac{1}{3}\right\} : y = -x + 2$ et $y = -9x - 6$. 2. $a^2 + 4 = 2a^2 : a = \pm 2, y = 4x$ et $y = -4x$.

12

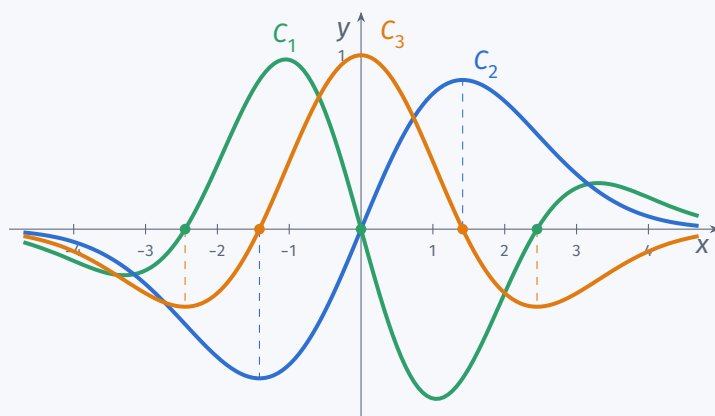
Lire f, f', f'' sur les courbes1^{re} Bac 2^e Bac PC

Enquête graphique

L'idée en une phrase

Là où $f' > 0$, f croît ; un zéro de f' avec **changement de signe** donne un **extremum** de f (tangente horizontale) ; un zéro de f'' avec changement de signe donne un **point d'inflexion** de C_f , qui est aussi un **extremum** de f' .

Exemple : trois courbes, trois rôles : laquelle est f , laquelle f' , laquelle f'' ?



Enquête. C_2 a un maximum et un minimum en $\pm 1,4$ environ, exactement là où C_3 coupe l'axe en changeant de signe ; C_3 a ses extremums en 0 et $\pm 2,4$ environ, là où C_1 s'annule en changeant de signe ; les extremums de C_1 (vers ± 1 et $\pm 3,3$) ne correspondent à aucun zéro : C_1 est la « dernière » de la chaîne. De plus C_2 croît exactement où C_3 est au-dessus de l'axe. Conclusion :

$$C_2 = C_f, \quad C_3 = C_{f'}, \quad C_1 = C_{f''}$$

C_f a donc trois points d'inflexion, d'abscisses les zéros de C_1 . (Ici $f(x) = x e^{-\frac{x^2}{4}}$, $f'(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) e^{-\frac{x^2}{4}}$, $f''(x) = \frac{x}{4} (x^2 - 6) e^{-\frac{x^2}{4}}$: zéros $\pm\sqrt{2}$, puis 0 et $\pm\sqrt{6}$.)

Attention, piège !

$f'(a) = 0$ ne suffit pas pour un extremum : $x \mapsto x^3$ en 0 (tangente horizontale, pas d'extremum). $f''(a) = 0$ ne suffit pas pour une inflexion : $x \mapsto x^4$ en 0. Il faut un **changement de signe**. Et la « courbe la plus haute » n'est pas forcément f !

À toi !

- f' s'annule en -1 en passant de - à +, et en 2 en passant de + à -. Que dire de f en -1 et en 2 ?
- La courbe de f' admet un maximum local en 3. Que représente le point d'abscisse 3 pour C_f ?

Réponse : 1. Minimum local en -1, maximum local en 2. 2. f'' s'annule en 3 en changeant de signe : c'est un point d'inflexion de C_f .

13

Inégalités par une étude

2^e Bac PC

Une différence, un minimum

L'idée en une phrase

Pour prouver $A(x) \leq B(x)$ sur I , on étudie $\varphi = B - A$ sur I : si son minimum vaut 0 (ou si φ est monotone et nulle à la bonne borne), alors $\varphi \geq 0$. Les deux références, $e^x \geq 1 + x$ sur $\mathbb{R}$ et $\ln x \leq x - 1$ sur $]0, +\infty[$ (égalité seulement en 0, resp. en 1), en fabriquant d'autres sans calcul en remplaçant x par $-x, \frac{1}{x}, \sqrt{x}, \dots$

Exemple : montrer que $\ln x \leq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x \geq 1$, puis que $\ln 2 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Soit $\varphi(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln x$ sur $]0, +\infty[$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{2x\sqrt{x}}.$$

Donc $\varphi' \geq 0$, ne s'annulant qu'en 1 : φ est **strictement croissante**, et $\varphi(1) = 1 - 1 - 0 = 0$.

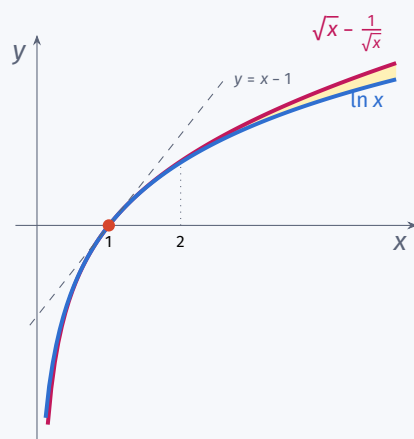
Pour $x \geq 1$: $\varphi(x) \geq \varphi(1) = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\ln x \leq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (x \geq 1).$$

Application ($x = 2$, inégalité stricte car $2 \neq 1$) :

$$\ln 2 < \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Une inégalité très fine, sans calculatrice : $\ln 2 \approx 0,6931$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$.



les deux courbes ont la même tangente en $(1, 0)$; leur ordre s'inverse en 1

Attention, piège !

φ **croissante** et $\varphi(1) = 0$ donnent $\varphi \geq 0$ **seulement à DROITE de 1**. Sur $]0, 1]$, $\varphi \leq 0$ et l'inégalité **s'inverse** : pour $x = \frac{1}{4}$, $\ln \frac{1}{4} \approx -1,39$ alors que $\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\sqrt{1/4}} = -\frac{3}{2}$.

À toi !

1. Montrer que $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ pour tout $x < 1$. 2. Montrer que $\ln x \leq 2(\sqrt{x} - 1)$ pour tout $x > 0$.

Réponse : 1. $e^{-x} \geq 1 - x > 0$ (référence appliquée à $-x$), puis on passe aux inverses. 2. $\ln t \leq t - 1$ avec $t = \sqrt{x}$: $\frac{1}{2} \ln x \leq \sqrt{x} - 1$.

14 Comparer a^b et b^a

2^e Bac PC

Le défi de la couverture

L'idée en une phrase

Pour $a > 0$ et $b > 0$: $a^b < b^a \iff b \ln a < a \ln b \iff \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}$: tout se ramène à la fonction $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, croissante sur $]0, e]$, décroissante sur $[e, +\infty[$, de maximum $g(e) = \frac{1}{e}$.

Exemple : e^π ou π^e : lequel est le plus grand ?

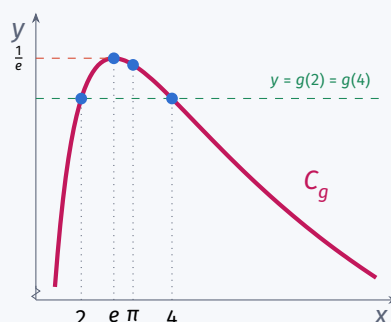
L'outil. $g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, du signe de $1 - \ln x$: positive sur $]0, e]$, négative sur $]e, +\infty[$.

Le défi. $e < \pi$ et g est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$, donc $g(\pi) < g(e)$:

$$\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e} \iff e \ln \pi < \pi \iff \ln(\pi^e) < \ln(e^\pi).$$

Par croissance de $\exp$: $e^\pi > \pi^e$ (23,14 contre 22,46).

Plus fin : π^2 ou 2^π ? Ici $2 < e < \pi$: la monotonie ne suffit pas. L'astuce : $g(2) = \frac{\ln 2}{2} = \frac{2 \ln 2}{4} = g(4)$. Comme $e < \pi < 4$: $g(\pi) > g(4) = g(2)$, soit $2 \ln \pi > \pi \ln 2$: $\pi^2 > 2^\pi$ (9,87 contre 8,82).



zoom sur le sommet de C_g : $g(\pi)$ est sous $g(e)$ mais au-dessus de $g(4) = g(2)$

★ Astuce de concours : pourquoi e gagne toujours

Comme g atteint son maximum en e : pour tout $x > 0$, $x \neq e$, $\frac{\ln x}{x} < \frac{1}{e}$, c'est-à-dire $x^e < e^x$. Le nombre e est le seul réel $a > 0$ tel que $x^a \leq a^x$ pour **tout** $x > 0$.

Attention, piège !

g n'est pas monotone sur $]0, +\infty[$: si $a < e < b$, comparer a et b ne dit rien de $g(a)$ et $g(b)$. Il faut un intermédiaire, comme $g(2) = g(4)$. Et ne pas écrire « $a < b \Rightarrow a^b < b^a$ » : $3 < 4$ mais $3^4 = 81 > 4^3 = 64$.

À toi !

Comparer : 1. 50^{51} et 51^{50} ; 2. π^4 et 4^π .

Réponse : 1. $e < 50 < 51$: $g(50) > g(51)$, donc $51 \ln 50 > 50 \ln 51$: $50^{51} > 51^{50}$. 2. $e < \pi < 4$: $g(\pi) > g(4)$, donc $4 \ln \pi > \pi \ln 4$: $\pi^4 > 4^\pi$ (97,4 contre 77,9).

15

La fonction auxiliaire

2^e Bac PCQuand le signe de f' résiste

Méthode : l'idée en une phrase

Quand le signe de $f'(x)$ n'est pas lisible, on isole le facteur gênant dans une **fonction auxiliaire** g , on étudie g (variations, TVI) pour obtenir son signe à l'aide d'un réel α tel que $g(\alpha) = 0$, puis on utilise la relation $g(\alpha) = 0$ pour simplifier les valeurs de f en α .

Exemple : $f(x) = \frac{\ln x}{x+2}$ sur $]0, +\infty[$

Dérivée. $f'(x) = \frac{\frac{x+2}{x} - \ln x}{(x+2)^2} = \frac{g(x)}{x(x+2)^2}$ avec

$$g(x) = x + 2 - x \ln x.$$

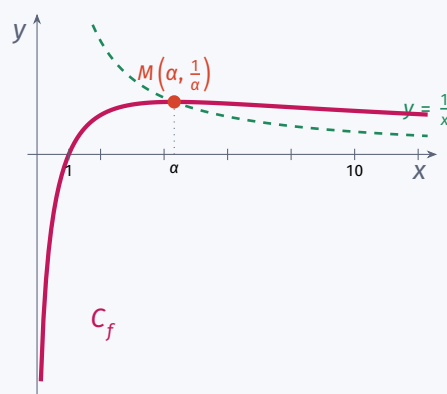
Étude de g . $g'(x) = 1 - (\ln x + 1) = -\ln x$: g croît sur $]0, 1]$ et décroît sur $[1, +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2$ ($x \ln x \rightarrow 0$).

$$g(1) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{2}{x} - \ln x\right) = -\infty.$$

- Sur $]0, 1]$: $g(x) > 2 > 0$.
- Sur $[1, +\infty[$: g est continue, strictement décroissante, de 3 à $-\infty$: **un unique** α tel que $g(\alpha) = 0$; $g(4,3) \approx 0,03 > 0$ et $g(4,4) \approx -0,12 < 0$, donc $4,3 < \alpha < 4,4$.

Conclusion. f' a le signe de g : f croît sur $]0, \alpha]$, décroît sur $[\alpha, +\infty[$. Or $g(\alpha) = 0 \iff \ln \alpha = \frac{\alpha+2}{\alpha}$, donc

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha+2} = \frac{1}{\alpha} \approx 0,23.$$



le sommet de C_f est sur l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$

Attention, piège !

On ne remplace **jamais** α par 4,3 dans un calcul exact : on utilise $g(\alpha) = 0$. Et le signe de f' est celui de g **parce que** $x(x+2)^2 > 0$: à vérifier à chaque fois.

À toi !

Avec les notations de l'exemple : 1. Montrer, sans calculatrice, que $e < \alpha < e^2$. 2. Encadrer le maximum $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

Réponse : 1. $g(e) = e + 2 - e = 2 > 0$ et $g(e^2) = e^2 + 2 - 2e^2 = 2 - e^2 < 0$. 2. $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ et $4,3 < \alpha < 4,4$: $0,227 < \frac{1}{4,4} < f(\alpha) < \frac{1}{4,3} < 0,233$.

16

Réciproque sans calcul

2^e Bac PCTout savoir de f^{-1} sans la formule

L'idée en une phrase

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , elle réalise une bijection de I sur $J = f(I)$, et **sans connaître** f^{-1} : elle a le même sens de variation que f , sa courbe est la symétrique de C_f par rapport à la droite $y = x$, $f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$, et si $f'(a) \neq 0$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Exemple : $f(x) = e^x + 3x$ sur $\mathbb{R}$: l'équation $e^x + 3x = y$ ne se résout pas, et pourtant...

Bijection. $f'(x) = e^x + 3 > 0$: f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Une valeur. $f(0) = 1$, donc $f^{-1}(1) = 0$; $f(1) = e + 3$, donc $f^{-1}(e + 3) = 1$.

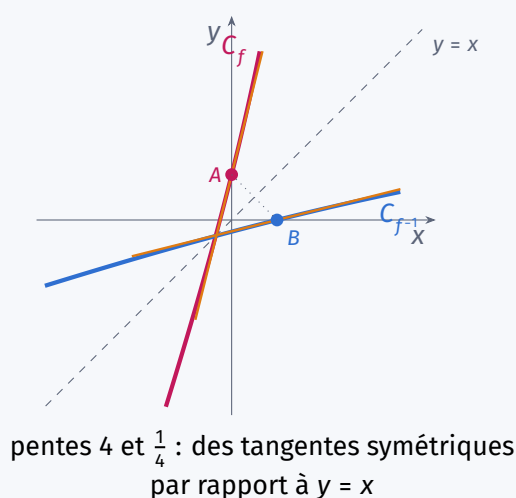
Un nombre dérivé. $f'(0) = 4 \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en 1 et

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}.$$

Une tangente. Au point $B(1, 0)$ de $C_{f^{-1}}$:

$y = \frac{1}{4}(x - 1)$, symétrique de la tangente $y = 4x + 1$ à C_f en $A(0, 1)$.

Un signe. f^{-1} est croissante : $f^{-1}(x) < 0 \iff x < f(0) = 1$.



★ Astuce de concours : tangente verticale

Là où $f'(a) = 0$, la courbe de f^{-1} a une **tangente verticale** au point $(f(a), a)$, symétrique d'une tangente horizontale : sur $[0, +\infty[$, $x \mapsto x^3$ et sa réciproque $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ en 0.

Attention, piège !

$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)}$, et **non** $\frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{e+3}$. Et f^{-1} (réciproque) n'a rien à voir avec $\frac{1}{f}$ (inverse) !

À toi !

1. $g(x) = x^3 + 2x - 1$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; calculer $(g^{-1})'(2)$. 2. Avec f de l'exemple, résoudre $f^{-1}(x) > 1$.

Réponse : 1. $g(1) = 2$ et $g'(1) = 5$: $(g^{-1})'(2) = \frac{1}{5}$. 2. f^{-1} est croissante et $f^{-1}(e+3) = 1$: $x > e+3$.

17

Croissances comparées en pratique

2^e Bac PC

Le plus fort impose sa limite

L'idée en une phrase

En $+\infty$, $(\ln x)^p \ll x^q \ll e^{rx}$ ($p, q, r > 0$) : dans un produit, un quotient ou une somme, c'est le terme le plus « fort » qui impose la limite ; on factorise par lui, puis un changement de variable ($X = \ln x$, $X = -\ln x$, $X = \frac{1}{x}$, $X = -x$...) ramène à une limite de référence.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$$

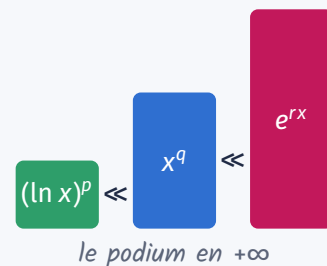
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$(n \in \mathbb{N}^*)$$

Exemple : quatre limites, un seul principe

- En $+\infty$: $e^{2x} - x^4 e^x = e^{2x} (1 - x^4 e^{-x}) \rightarrow +\infty$, car $x^4 e^{-x} \rightarrow 0$.
- En $+\infty$, avec $X = \ln x$: $\frac{(\ln x)^3}{x^2} = X^3 e^{-2X} \rightarrow 0$, donc $x^2 - 5(\ln x)^3 = x^2 \left(1 - 5 \frac{(\ln x)^3}{x^2}\right) \rightarrow +\infty$.
- En $+\infty$, on factorise **dans** le $\ln$: $\frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x}} = \frac{2 \ln x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow 0$.
- En 0^+ , avec $X = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$: $x^3 e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^X}{X^3} \rightarrow +\infty$ (« $0 \times \infty$ » gagné par l'exponentielle).



x	ln x	x ²	e ^x
10	2,3	100	22 026
100	4,6	10 ⁴	2,7 × 10 ⁴³

Attention, piège !

Les croissances comparées sont des résultats « à l'infini ». Pour $x = 100$: $\frac{e^x}{x^{100}} \approx 2,7 \times 10^{-157}$, et pourtant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{100}} = +\infty$: un test numérique peut tromper. Autre piège : en 0^+ , $\frac{\ln x}{x} \rightarrow -\infty$ ($-\infty$ divisé par 0^+) : ce n'est **pas** une forme indéterminée.

★ Astuce de concours : le bon changement de variable

$\ln x$ en 0^+ : poser $X = -\ln x$; $e^{\frac{1}{x}}$ ou $e^{-\frac{1}{x}}$: poser $X = \frac{1}{x}$; en $-\infty$: $X = -x$. On retombe sur « polynôme $\times e^{-X} \rightarrow 0$ » ou « $\frac{e^X}{\text{polynôme}} \rightarrow +\infty$ ».

À toi !

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^3}{e^x + x^3}$?

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \ln x$?

Réponse : 1. On factorise par e^x : $\frac{1 - x^3 e^{-x}}{1 + x^3 e^{-x}} \rightarrow 1$. 2. $X = \frac{1}{x}$: $-e^{-X} \ln X = -\frac{\ln X}{X} \times X e^{-X} \rightarrow 0$.

18

Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ 2^e Bac PC

Le plan en quatre temps

Méthode : l'idée en une phrase

- ① un intervalle I **stable** ($f(I) \subset I$) contenant u_0 : par récurrence, $u_n \in I$ pour tout n ; ② si f est croissante sur I , (u_n) est **monotone**, dans le sens donné par la comparaison de u_0 et u_1 ; ③ monotone et bornée, elle **converge** ; ④ f étant continue sur I (intervalle fermé), sa limite $\ell \in I$ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Exemple : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{5x+3}{x+3}$

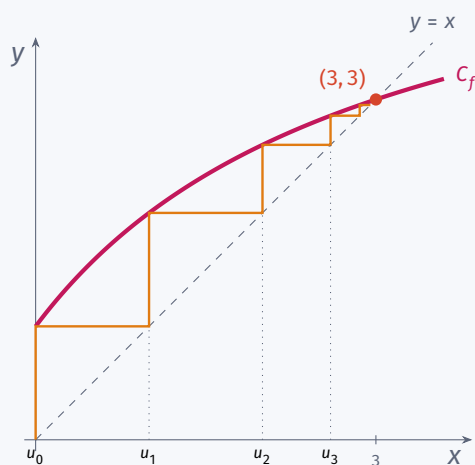
① $f'(x) = \frac{12}{(x+3)^2} > 0$: f croît sur $[0, 3]$, $f(0) = 1$ et $f(3) = 3$, donc $f([0, 3]) = [1, 3] \subset [0, 3]$. Par récurrence : $0 \leq u_n \leq 3$.

② $u_1 = 1 > u_0$ (puis $u_2 = 2$, $u_3 = \frac{13}{5}$). Si $u_n \leq u_{n+1}$, alors $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$: (u_n) est **croissante**.

③ Croissante et majorée par 3 : elle converge vers un réel $\ell \in [0, 3]$.

④ $f(\ell) = \ell \iff \ell^2 - 2\ell - 3 = 0 \iff \ell = 3$ ou $\ell = -1$. Or $\ell \in [0, 3]$: $\lim u_n = 3$.

Autre voie pour ② : $f(x) - x = -\frac{(x-3)(x+1)}{x+3} \geq 0$ sur $[0, 3]$.



l'escalier monte vers le point fixe 3

★ **Astuce de concours : si f est décroissante**

Alors $f \circ f$ est croissante : les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de **sens contraires**, et l'escalier devient un « escargot » qui tourne autour du point fixe.

Attention, piège !

« f croissante » ne veut pas dire « (u_n) croissante » : c'est la comparaison de u_0 et u_1 qui décide (question 1 ci-dessous). Et une solution de $f(\ell) = \ell$ n'est pas forcément la limite : $\ell = -1$ est rejetée car $\ell \notin [0, 3]$.

À toi !

1. Même f , mais $u_0 = 5$: sens de variation et limite ? 2. $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = \frac{w_n^2 + 3}{4}$: limite ?
 Réponse : 1. $[3, +\infty[$ est stable, $u_1 = \frac{7}{2} < u_0$: décroissante, minorée par 3, limite 3. 2. $[1, 3]$ est stable, $w_1 = \frac{7}{4} < w_0$: décroissante, limite 1 (et non 3) : $\ell^2 - 4\ell + 3 = 0$.

19 Optimiser une aire, une distance

1^{re} Bac 2^e Bac PC

Une variable, une fonction, un tableau

Méthode : l'idée en une phrase

1 choisir une variable et son intervalle ; 2 exprimer la grandeur à optimiser comme une fonction de cette variable ; 3 étudier ses variations et conclure. Pour une distance, on étudie son **carré** : même sens de variation, plus de racine.

Exemple : le plus grand triangle découpé par une tangente à $y = e^{-x}$

La tangente en $M(a, e^{-a})$, $a \geq 0$, coupe (Ox) en P et (Oy) en Q . Aire maximale de OPQ ?

1 La variable est $a \in [0, +\infty[$.

2 $(T_a) : y = -e^{-a}(x - a) + e^{-a} = e^{-a}(1 + a - x)$. Donc $P(1 + a, 0)$ et $Q(0, (1 + a)e^{-a})$, et

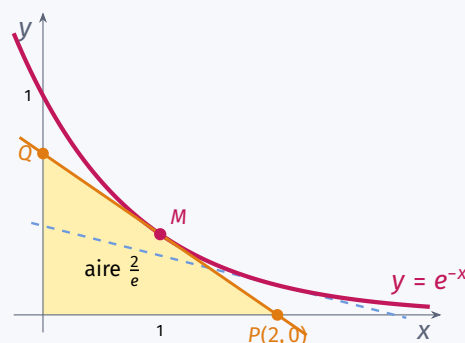
$$A(a) = \frac{OP \times OQ}{2} = \frac{1}{2}(1 + a)^2 e^{-a}.$$

3 $A'(a) = \frac{1}{2}e^{-a}[2(1 + a) - (1 + a)^2] = \frac{1}{2}(1 + a)(1 - a)e^{-a}$:

A croît sur $[0, 1]$, décroît sur $[1, +\infty[$; $A(0) = \frac{1}{2}$ et $A(a) \rightarrow 0$ en $+\infty$.

Conclusion : maximum pour $a = 1$:

$$A_{\max} = A(1) = \frac{2}{e} \approx 0,74 \quad (\text{tangente } y = \frac{2-x}{e}, \\ P(2, 0), Q(0, \frac{2}{e})).$$



en pointillés : la tangente en $a = 2$, triangle d'aire $\frac{9}{2}e^{-2} \approx 0,61$ seulement

★ Astuce de concours : la normale

Au point M de la courbe le plus proche de A , la droite (AM) est **perpendiculaire à la tangente** en M : la dérivée de $d^2 = (x - x_A)^2 + (f(x) - y_A)^2$ est nulle quand $\vec{AM} \cdot (1, f'(x)) = 0$.

Attention, piège !

L'intervalle de la variable fait partie du problème : si le maximum de la fonction tombe hors de l'intervalle, l'optimum est atteint à une **borne**. Et minimiser d revient à minimiser d^2 parce que $d \geq 0$ et que $t \mapsto t^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

À toi !

1. Point de la courbe $y = \sqrt{x}$ le plus proche de $A(3, 0)$? 2. Distance minimale d'un point de $y = e^x$ à la droite $y = x$?

Réponse : 1. $AM^2 = (x - 3)^2 + x = x^2 - 5x + 9$, minimal en $x = \frac{5}{2}$: $M(\frac{5}{2}, \sqrt{\frac{5}{2}})$, $AM = \frac{\sqrt{11}}{2}$. 2. $d(x) = \frac{e^x - x}{\sqrt{2}}$ (car $e^x > x$), minimale en $x = 0$: $\frac{\sqrt{2}}{2}$, au point $(0, 1)$.

20 Familles de courbes

2^e Bac PC

Une infinité de courbes, deux questions

Méthode : l'idée en une phrase

Pour une famille (C_m) : ① $M(x, y)$ est commun à toutes les courbes si et seulement si $y = f_m(x)$ est vraie **pour tout** m : on l'écrit $A(x, y) + m B(x, y) = 0$ et on exige $A = 0$ et $B = 0$; ② pour le lieu des extremums, on calcule (x_m, y_m) , puis on **élimine** m pour obtenir une relation entre y_m et x_m .

Exemple : $f_m(x) = x^2 - m \ln x$ sur $]0, +\infty[$, $m \in \mathbb{R}$

① **Point commun.** $y = x^2 - m \ln x$ pour tout m
 $\Leftrightarrow (x^2 - y) - m \ln x = 0$ pour tout $m \Leftrightarrow \ln x = 0$ et $y = x^2 \Leftrightarrow (x, y) = (1, 1)$. Toutes les courbes passent par $A(1, 1)$.

② **Extremums.** $f'_m(x) = 2x - \frac{m}{x} = \frac{2x^2 - m}{x}$.

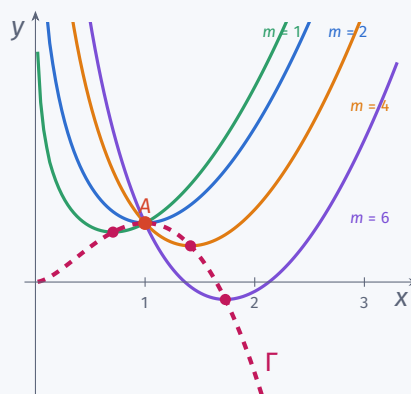
• Si $m \leq 0$: $f'_m > 0$, aucun extremum.

• Si $m > 0$: minimum en $x_m = \sqrt{\frac{m}{2}}$, de valeur $y_m = x_m^2 - m \ln x_m$.

On élimine m : $m = 2x_m^2$, donc $y_m = x_m^2 - 2x_m^2 \ln x_m$. Les minimums décrivent la courbe

$$\Gamma : y = x^2(1 - 2 \ln x) \quad (x > 0),$$

et $A \in \Gamma$: c'est le minimum de C_2 .



les minimums (points) glissent sur Γ (tirets)

★ Astuce de concours : l'ordre des courbes

$f_m(x) - f_{m'}(x) = (m' - m) \ln x$: si $m < m'$, C_m est **au-dessus** de $C_{m'}$ sur $]1, +\infty[$ et **au-dessous** sur $]0, 1[$. Toutes les courbes se croisent en A et leur ordre s'y inverse : c'est ce qu'on voit sur la figure.

Attention, piège !

Le lieu ne concerne que les valeurs de m pour lesquelles l'extremum **existe** (ici $m > 0$). Et pour éliminer m , on exprime m en fonction de x_m ($m = 2x_m^2$), puis on remplace dans y_m .

À toi !

1. Pour $m > 0$, montrer que les minimums des courbes $y = x + m e^{-x}$ sont sur une droite.

2. Point commun et lieu des sommets des paraboles $y = x^2 + m(x - 2)$?

Réponse : 1. Minimum en $x = \ln m$, de valeur $\ln m + 1$: droite $y = x + 1$. 2. $(x^2 - y) + m(x - 2) = 0$ pour tout m : point $(2, 4)$; sommet $(-\frac{m}{2}, -\frac{m^2}{4} - 2m)$, et avec $m = -2x$: $y = 4x - x^2$.

Partie 5 · Questions de concours

60 questions à choix multiples, du tronc commun au 2^e Bac PC

Mode d'emploi

- **Six séries de dix questions**, de difficulté croissante (★★ à ★★★★★), du tronc commun au 2^e Bac PC.
- Questions 1 à 8 de chaque série : **une seule** bonne réponse parmi (A) (B) (C) (D) ; les trois autres sont des **pièges plausibles**.
- Questions 9 et 10 de chaque série : **réponse numérique**, un nombre entier (éventuellement négatif).
- **Barème** : +4 par bonne réponse, -1 par QCM faux, 0 sinon (sans réponse ou réponse numérique fausse).
- **Temps conseillé** : 25 minutes par série, sans calculatrice. Corrigés et méthodes express à partir de la page 130.

1

Série 1 · Généralités et courbes

Tronc commun Variations, parité, trinômes, homographies et lectures graphiques.

Question 1 Variations sans formule ★★

corrigé p. 130

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie, pour tous réels a et b : $f(a) - f(b) = (a - b)(4 - a - b)$. Alors :

- (A) f croît sur $]-\infty, 2]$ et décroît sur $[2, +\infty[$ (B) f croît sur $]-\infty, 4]$ et décroît sur $[4, +\infty[$
(C) f décroît sur $]-\infty, 2]$ et croît sur $[2, +\infty[$ (D) f est croissante sur $\mathbb{R}$

Question 2 Une famille de paraboles ★★

corrigé p. 130

Pour $m \in \mathbb{R}^*$, on note C_m la courbe de $f_m(x) = mx^2 + (m - 1)x + 2$. Les points communs à toutes les courbes C_m sont exactement :

- (A) (0, 2) et (1, 1) (B) (0, 2) seulement (C) (-1, 3) et (1, 3) (D) (0, 2) et (-1, 3)

Question 3 Produits et parité ★★

corrigé p. 130

f est une fonction paire et g une fonction impaire, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$. Laquelle de ces fonctions est *nécessairement* impaire ?

- (A) $f + g$ (B) $f \times g$ (C) $|g|$ (D) g^2

Question 4 Ce que dit un tableau ★★★

corrigé p. 130

La fonction f , définie sur $[-2, 3]$, a le tableau de variations ci-contre. Laquelle de ces affirmations est nécessairement vraie ?

x	-2	0	3
f(x)	1	4	-1

- (A) $f(-1) < f(1)$ (B) le minimum de f sur $[-2, 3]$ est 1
 (C) $f(1) > f(2)$ (D) l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions

Question 5 Un sommet qui bouge ★★★

corrigé p. 130

Soit $m \in \mathbb{R}$. La fonction $f(x) = x^2 - 2mx + 3$ est croissante sur $[1, +\infty[$ si et seulement si :

- (A) $m \geq 1$ (B) $m < 1$ (C) $m \geq -1$ (D) $m \leq 1$

Question 6 Décroissante, mais où ? ★★★

corrigé p. 130

Sur lequel de ces ensembles la fonction $f(x) = x + \frac{4}{x}$ est-elle décroissante ?

- (A) $[-2, 0[$ (B) $[-2, 0[\cup]0, 2]$ (C) $]0, 4]$ (D) $]-\infty, -2]$

Question 7 Droite et hyperbole ★★★

corrigé p. 131

La droite $D_m : y = -x + m$ coupe l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ en deux points distincts si et seulement si :

- (A) $m > 2$ (B) $|m| \geq 2$ (C) $|m| > 2$ (D) $m \neq 0$

Question 8 Monotonie et imparité ★★★★★

corrigé p. 131

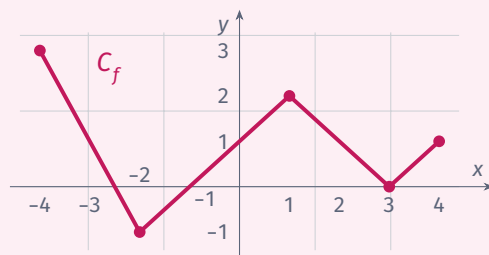
Soit f une fonction impaire et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. L'inéquation $f(x^2) + f(-x - 2) > 0$ a pour ensemble de solutions :

- (A) $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$ (B) $]-1, 2[$ (C) $]-2, 1[$ (D) $\emptyset$

Question 9 Images entières ★★★

corrigé p. 131

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $[-4, 4]$: une ligne brisée dont les sommets ont des coordonnées entières. Combien de réels x de $[-4, 4]$ ont une image $f(x)$ entière ?



Réponse numérique (un entier) : _____

Question 10 Points entiers ★★★★★

corrigé p. 131

Combien de points à coordonnées entières (abscisse et ordonnée entières) la courbe de la fonction $f(x) = \frac{2x+13}{x+2}$ possède-t-elle ?

Réponse numérique (un entier) : _____

2

Série 2 • Transformations

Tronc commun 1^{re} Bac Fonctions de référence, symétries, translations, composées, périodicité.**Question 11** Ordre des références ★★

corrigé p. 131

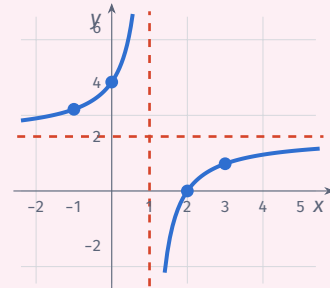
Pour tout réel x de $]0, 1[$, on a :

- (A) $x^2 < x^3 < x$ (B) $\sqrt{x} < x < x^2$ (C) $x^3 < x^2 < \sqrt{x}$ (D) $x < x^2 < \sqrt{x}$

Question 12 Reconnaître une hyperbole ★★

corrigé p. 131

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f ; ses asymptotes sont en pointillés, et les points marqués ont des coordonnées entières. Laquelle de ces expressions est celle de $f(x)$?



- (A) $\frac{2x-4}{x-1}$ (B) $\frac{2x}{x-1}$ (C) $\frac{2x-4}{x+1}$ (D) $\frac{x-2}{x-1}$

Question 13 Axe caché ★★

corrigé p. 131

La courbe de la fonction $f(x) = x^2 - 6x + |x - 3|$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation :

- (A) $x = -3$ (B) $x = 0$ (C) $x = 6$ (D) $x = 3$

Question 14 Symétrie centrale ★★★

corrigé p. 131

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. L'image de C_f par la symétrie de centre $\Omega(1, 0)$ est la courbe de la fonction :

- (A) $x \mapsto -f(x-2)$ (B) $x \mapsto -f(2-x)$ (C) $x \mapsto f(2-x)$ (D) $x \mapsto -f(x+2)$

Question 15 Racine d'un trinôme ★★★

corrigé p. 132

La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ est croissante sur :

- (A) $[5, +\infty[$ (B) $[2, +\infty[$ (C) $]-\infty, -1]$ (D) $[-1, 5]$

Question 16 L'ordre compte ★★★

corrigé p. 132

On pose $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$. L'ensemble des réels x tels que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ est :

- (A) $\{0\}$ (B) $\emptyset$ (C) $\mathbb{R}$ (D) $\{-2; 0\}$

Question 17 Monotonie garantie ★★★

corrigé p. 132

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et g strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Laquelle de ces fonctions est nécessairement monotone sur $\mathbb{R}$?

- (A) $f + g$ (B) $g \cdot f$ (C) $f \times g$ (D) $g \times g$

Question 18 Une période cachée ★★★★★

corrigé p. 132

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $f(x+2) = -f(x)$ pour tout réel x . Alors, nécessairement :

- (A) f est périodique de période 2
 (B) f est impaire
 (C) f est périodique de période 4
 (D) $f(0) = 0$

Question 19 Loin de l'origine ★★★

corrigé p. 132

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 3, et $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0, 3[$. Calculer $f(2026) + f(-2026)$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 20 Composer 2026 fois ★★★★★

corrigé p. 132

On pose $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Calculer $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{2026 \text{ fois}}(2)$.

Réponse numérique (un entier) : _____

3

Série 3 · Limites et asymptotes

1^{re} Bac Formes indéterminées, conjugués, limites trigonométriques, composées, branches infinies.

Question 21 À gauche de 2 ★★

corrigé p. 132

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} =$$

- (A) 4
 (B) -4
 (C) 0
 (D) $-\infty$

Question 22 Asymptote ou branche ? ★★

corrigé p. 132

Laquelle de ces fonctions admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$?

- (A) $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$
 (B) $x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{x}}$
 (C) $x \mapsto 2x + \sqrt{x}$
 (D) $x \mapsto x + \sqrt{x}$

Question 23 Sans changement de variable ★★★

corrigé p. 133

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} =$$

- (A) $\frac{1}{2}$
 (B) 0
 (C) 1
 (D) $+\infty$

Question 24 Deux asymptotes parallèles ★★★

corrigé p. 133

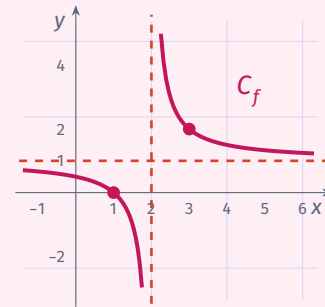
La courbe de la fonction $f(x) = \frac{2x^2 + |x|}{x+1}$ admet :

- (A) l'asymptote $y = 2x - 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$
 (B) $y = 2x + 1$ en $+\infty$ et $y = 2x - 1$ en $-\infty$
 (C) $y = 2x - 1$ en $+\infty$ et $y = 2x - 3$ en $-\infty$
 (D) $y = 2x - 1$ en $+\infty$, branche parabolique en $-\infty$

Question 25 Lire des limites composées ★★★

corrigé p. 133

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; ses asymptotes (en pointillés) ont pour équations $x = 2$ et $y = 1$. Une seule de ces égalités est vraie ; laquelle ?



(A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(2 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$

(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x+1}{x}\right) = 1$

(D) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(f(x)) = 1$

Question 26 Double conjugué ★★★

corrigé p. 133

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1} =$

(A) 1

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 2

(D) $\frac{1}{4}$

Question 27 Le bon paramètre ★★★

corrigé p. 133

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{x^3 + mx + 2}{x + 1}$. La fonction f admet une limite finie ℓ en -1 pour une seule valeur de m ; alors :

(A) $m = 1$ et $\ell = 4$

(B) $m = -1$ et $\ell = 4$

(C) $m = 1$ et $\ell = 2$

(D) $m = 3$ et $\ell = 6$

Question 28 Au second ordre ★★★★★

corrigé p. 133

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - x - 1) =$

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{1}{2}$

(D) $-\infty$

Question 29 Dix sinus ★★★

corrigé p. 133

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin 10x}{x}$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 30 Un sinus déguisé ★★★★★

corrigé p. 133

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos 2x)}{\pi x^2}$.

Réponse numérique (un entier) : _____

4

Série 4 • Dérivées et variations

1^{re} Bac Nombre dérivé, tangentes, dérivabilité, signe de f' , optimisation.

Question 31 Tangente par l'origine ★★

corrigé p. 133

La tangente à la courbe de $f(x) = x^2 + c$ au point d'abscisse 1 passe par l'origine du repère. Alors $c =$

- (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) 2

Question 32 Un taux déguisé ★★

corrigé p. 134

Avec $f(x) = x^3$: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2-h)}{h} =$

- (A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 48

Question 33 Valeur absolue et dérivabilité ★★★

corrigé p. 134

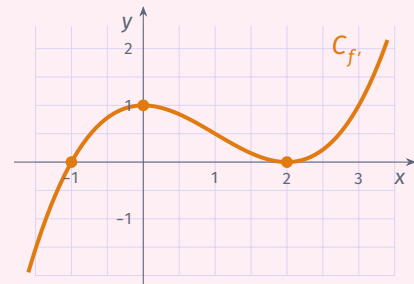
L'ensemble des réels en lesquels la fonction $f(x) = (x-1)|x^2-1|$ n'est pas dérivable est :

- (A) $\{-1; 1\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\{-1\}$ (D) $\emptyset$

Question 34 Racine double de la dérivée ★★★

corrigé p. 134

La courbe ci-contre est celle de la **dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ (f' ne s'annule qu'en -1 et en 2, et garde hors de la fenêtre le signe qu'elle a aux bords). Laquelle de ces affirmations est vraie ?



- (A) f admet un maximum local en 0
 (B) f admet un minimum local en -1 et aucun autre extremum local
 (C) f admet un minimum local en -1 et un maximum local en 2
 (D) f est décroissante sur $[0, 2]$

Question 35 La tangente recoupe ★★★

corrigé p. 134

La tangente à la courbe de $f(x) = x^3 + 2x^2$ au point d'abscisse 1 recoupe cette courbe au point d'abscisse :

- (A) -2 (B) 4 (C) -3 (D) -4

Question 36 Croissante sur $\mathbb{R}$ ★★★

corrigé p. 134

Soit $m \in \mathbb{R}$. La fonction $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

- (A) $m \in [-1, 1]$ (B) $m \in]-1, 1[$ (C) $m \in [0, 1]$ (D) $m \leq 1$

Question 37 Une droite qui ondule ★★★

corrigé p. 134

Sur $[0, 2\pi]$, la fonction $f(x) = x + 2 \sin x$ est décroissante sur l'intervalle :

- (A) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (B) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ (C) $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ (D) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$

Question 38 Un triangle invariant ★★★

corrigé p. 134

Pour $a > 0$, la tangente à l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ au point d'abscisse a coupe l'axe des abscisses en A et l'axe des ordonnées en B . L'aire du triangle OAB vaut :

- (A) $2a$ (B) 2, quel que soit a (C) $\frac{2}{a}$ (D) 1, quel que soit a

Question 39 Dérivée d'un produit ★★★

corrigé p. 134

On pose $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Calculer $f'(2)$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 40 Rectangle sous une parabole ★★★

corrigé p. 135

Un rectangle a deux sommets sur l'axe des abscisses et les deux autres sur la parabole d'équation $y = 12 - x^2$, au-dessus de cet axe. Quelle est l'aire maximale d'un tel rectangle ?

Réponse numérique (un entier) : _____

5

Série S · Fonctions ln et exp

2^e Bac PC Logarithme, exponentielle, puissances a^x : équations, limites, études.

Question 41 Qui l'emporte en 0 ? ★★

corrigé p. 135

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) =$$

- (A) $-\infty$ (B) 0 (C) $+\infty$ (D) 1

Question 42 Le carré dans le logarithme ★★

corrigé p. 135

L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(x^2) = 2 \ln(x+2)$ est :

- (A) $\{-1\}$ (B) $\emptyset$ (C) $\{1\}$ (D) $\{-1; 1\}$

Question 43 Logarithme emboîté ★★

corrigé p. 135

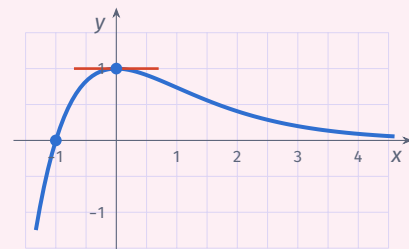
L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \ln(1 - \ln x)$ est :

- (A) $]e, +\infty[$ (B) $]0, 1[$ (C) $]1, e[$ (D) $]0, e[$

Question 44 Quelle exponentielle ? ★★★

corrigé p. 135

La courbe ci-contre a une tangente horizontale au point $(0, 1)$ et admet l'axe des abscisses pour asymptote en $+\infty$. C'est la courbe de la fonction :



- (A) $x \mapsto (1-x)e^x$ (B) $x \mapsto (x+1)e^{-x}$ (C) $x \mapsto 1-x^2$ (D) $x \mapsto (x+1)e^x$

Question 45 Deux exponentielles en $-\infty$ ★★★

corrigé p. 135

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} =$$

- (A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) n'existe pas

Question 46 Logarithme d'un cosinus ★★★

corrigé p. 135

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} =$$

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) -1 (D) $-\frac{1}{2}$

Question 47 Croissante partout ★★★

corrigé p. 135

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f(x) = x - a \ln x$ est croissante sur $]0, +\infty[$ si et seulement si :

- (A) $a \leq 0$ (B) $a < 1$ (C) $a \leq 1$ (D) $a \geq 0$

Question 48 Une inégalité de concavité ★★★★★

corrigé p. 136

Laquelle de ces inégalités est vraie pour tous les réels a et b pour lesquels elle a un sens ?

- (A) $e^{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{e^a + e^b}{2}$ (B) $\ln \frac{a+b}{2} \geq \frac{\ln a + \ln b}{2}$
 (C) $\ln(a+b) \geq \ln a + \ln b$ (D) $\ln(ab) \leq \ln a \times \ln b$

Question 49 Deux extremums ★★★

corrigé p. 136

On pose $f(x) = (x^2 - 7x + 1)e^x$. Calculer la somme des abscisses des points où f admet un extremum local.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 50 Exponentielle contre parabole ★★★★★

corrigé p. 136

Combien de solutions réelles l'équation $e^x = 4x^2$ admet-elle ?

Réponse numérique (un entier) : _____

6

Série 6 • Défis de concours

2^e Bac PC Continuité, dérivabilité, suites, convexité, limites, réciproques.

Question 51 Point d'inflexion ★★

corrigé p. 136

La courbe de la fonction $f(x) = (\ln x)^2$ admet un unique point d'inflexion ; c'est le point :

- (A) (1, 0) (B) $(e^2, 4)$ (C) $(\sqrt{e}, \frac{1}{4})$ (D) $(e, 1)$

Question 52 Ce que garantit la continuité ★★★

corrigé p. 136

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$. Alors, nécessairement :

- (A) f est une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$ (B) $f(x) = x$ admet au moins une solution
 (C) f est monotone sur $[0, 1]$ (D) $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$

Question 53 Dérivable en 0 ★★★

corrigé p.136

Laquelle de ces fonctions est dérivable en 0 ?

- (A) $x \mapsto (e^x - 1)|x|$ (B) $x \mapsto |e^x - 1|$
 (C) $x \mapsto |\ln(1+x)|$ (D) $x \mapsto x \ln |x|$, prolongée par 0 en 0

Question 54 Un point fixe trompeur ★★★

corrigé p.137

La suite (u_n) est définie par $u_0 = \frac{2}{3}$ et $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- (A) (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$ (B) (u_n) converge vers $\frac{2}{3}$
 (C) (u_n) tend vers $+\infty$ (D) (u_n) est décroissante

Question 55 Un faux air de e ★★★

corrigé p.137

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} =$$

- (A) $+\infty$ (B) e (C) 1 (D) e^2

Question 56 Une différence trompeuse ★★★

corrigé p.137

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x-1}}) =$$

- (A) 0 (B) 1 (C) e (D) $+\infty$

Question 57 Convexité et tangente ★★★★★

corrigé p.137

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f''(x) \geq 0$ pour tout réel x , $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Alors, nécessairement :

- (A) $f(x) \leq x$ pour tout réel x (B) $f(x) \geq x$ pour tout réel x
 (C) f est croissante sur $\mathbb{R}$ (D) $f(1) \leq 1$

Question 58 Une asymptote cachée ★★★★★

corrigé p.137

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$. En $+\infty$, la courbe de f admet :

- (A) l'asymptote d'équation $y = x$ (B) l'asymptote d'équation $y = ex$
 (C) l'asymptote d'équation $y = x + 1$ (D) une branche parabolique de direction $y = x$

Question 59 Sans calculer x ★★★

corrigé p.137

Le réel x vérifie $e^x + e^{-x} = 3$. Calculer $e^{3x} + e^{-3x}$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 60 Une courbe et sa réciproque ★★★★★

corrigé p.137

La fonction $f(x) = e^x - 2$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-2, +\infty[$. Dans un repère orthonormé, combien de points communs ont les courbes de f et de sa réciproque f^{-1} ?

Réponse numérique (un entier) : _____

7 Grille des réponses

Pour chaque question : son numéro (en petit) puis la bonne réponse (lettre du QCM ou entier). Les questions 9 et 10 de chaque série sont à réponse numérique.

Série	QCM										Numériques
1 Généralités et courbes	1 A	2 D	3 B	4 C	5 D	6 A	7 C	8 B	9 11	10 6	
2 Transformations	11 C	12 A	13 D	14 B	15 A	16 D	17 B	18 C	19 5	20 -1	
3 Limites et asymptotes	21 B	22 D	23 A	24 C	25 D	26 B	27 A	28 C	29 55	30 2	
4 Dérivées et variations	31 A	32 D	33 C	34 B	35 D	36 A	37 C	38 B	39 4	40 32	
5 Fonctions ln et exp	41 C	42 A	43 D	44 B	45 C	46 D	47 A	48 B	49 5	50 3	
6 Défis de concours	51 D	52 B	53 A	54 C	55 A	56 D	57 B	58 C	59 18	60 2	

Calculer son score

Pour une série : **score** = $4 \times (\text{bonnes réponses}) - 1 \times (\text{QCM faux})$. Les réponses numériques fausses et les questions sans réponse valent 0.

Exemple : 7 bonnes réponses, 2 QCM faux et 1 question sans réponse donnent $4 \times 7 - 2 = 26$ points sur 40.

Repères : moins de 16 : revois le cours de la partie concernée ; de 16 à 28 : bon niveau ; plus de 28 : niveau concours.

Reporte tes scores dans le tableau « Mon bilan » à la fin du livret.

8

Corrigés des questions

Pour chaque question : la réponse, une solution courte, puis la **méthode express** quand il en existe une. Les pièges cités sont les mauvaises propositions.

■ Série 1 • Généralités et courbes

■ Question 1

Réponse : A

Pour $a \neq b$, le taux de variation vaut $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = 4 - a - b$. Si a et b sont deux réels distincts de $]-\infty, 2]$, alors $a + b < 4$ et le taux est **strictement positif** : f est croissante sur $]-\infty, 2]$. Si $a, b \geq 2$ (distincts), $a + b > 4$: f est décroissante sur $[2, +\infty[$. Piège B : $f(3) - f(4) = (-1)(-3) = 3 > 0$, donc f n'est pas croissante sur $]-\infty, 4]$.

Méthode express : avec $b = 0$: $f(x) = -x^2 + 4x + f(0)$, parabole tournée vers le bas de sommet d'abscisse 2.

■ Question 2

Réponse : D

On ordonne suivant m : $f_m(x) = m(x^2 + x) + 2 - x$. Un point (x, y) est sur toutes les courbes si et seulement si $x^2 + x = 0$ et $y = 2 - x$: on obtient $(0, 2)$ et $(-1, 3)$. Pièges : $f_m(1) = 2m + 1$ dépend de m (A et C) ; B oublie le second point.

Méthode express : un point commun à toute une famille annule le coefficient du paramètre.

■ Question 3

Réponse : B

$(f \times g)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x) \times (-g(x)) = -(f \times g)(x)$: $f \times g$ est impaire. Contre-exemples avec $f(x) = x^2$, $g(x) = x$: $f + g = x^2 + x$ n'est ni paire ni impaire ; $|g|$ et g^2 sont paires.

Méthode express : règle des signes : paire = « + », impaire = « - » ; un produit $(+) \times (-)$ est impair.

■ Question 4

Réponse : C

f est strictement décroissante sur $[0, 3]$ et $0 \leq 1 < 2 \leq 3$, donc $f(1) > f(2)$. Piège A : on sait seulement que $f(-1) \in]1, 4[$ et $f(1) \in]-1, 4[$; les deux cas $f(-1) < f(1)$ et $f(-1) > f(1)$ sont possibles. B : le minimum est $f(3) = -1$. D : sur $[-2, 0]$, $f \geq 1$; sur $[0, 3]$, f décroît strictement de 4 à -1 et ne passe qu'une fois par 0.

Méthode express : on ne compare deux images qu'à l'intérieur d'un même intervalle de monotonie.

■ Question 5

Réponse : D

$f(x) = (x - m)^2 + 3 - m^2$ décroît sur $]-\infty, m]$ et croît sur $[m, +\infty[$. Elle est croissante sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $[1, +\infty[\subset [m, +\infty[$, soit $m \leq 1$. Piège B : pour $m = 1$, f est bien croissante sur $[1, +\infty[$.

Méthode express : une parabole tournée vers le haut croît à droite de son sommet : il suffit que le sommet soit à gauche de 1.

■ Question 6

Réponse : A

Pour $a \neq b$ non nuls, le taux vaut $1 - \frac{4}{ab}$. Si $a, b \in [-2, 0]$ sont distincts, $0 < ab < 4$, donc le taux est négatif : f est décroissante sur $[-2, 0]$. Piège B : $-1 < 1$ mais $f(-1) = -5 < f(1) = 5$; C : $f(2) = 4 < f(4) = 5$; D : $f(-4) = -5 < f(-2) = -4$ (f croît sur $]-\infty, -2]$).

Méthode express : « décroissante sur chaque intervalle » n'implique pas « décroissante sur la réunion » : tester un point de chaque côté de 0.

■ Question 7

Réponse : C

Pour $x \neq 0$: $-x + m = \frac{1}{x} \iff x^2 - mx + 1 = 0$, et 0 n'est jamais racine. Deux points distincts $\iff \Delta = m^2 - 4 > 0 \iff |m| > 2$. Piège B : pour $m = \pm 2$, la racine est double, la droite est **tangente** à l'hyperbole (un seul point).

■ Question 8

Réponse : B

f impaire : $f(-x-2) = -f(x+2)$. L'inéquation s'écrit $f(x^2) > f(x+2)$, et comme f est strictement décroissante : $x^2 < x+2 \iff (x-2)(x+1) < 0 \iff x \in]-1, 2[$. Piège A : oublier que f décroissante renverse l'inégalité.

Méthode express : tester avec $f(x) = -x$: $-x^2 + x + 2 > 0$.

■ Question 9

Réponse : 11

$f([-4, 4]) = [-1, 3]$; on balaie avec les droites $y = k$, $k \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, sans compter deux fois un sommet : $k = 3$: $x = -4$; $k = 2$: $x = -\frac{7}{2}$ et $x = 1$; $k = 1$: $x = -3, 0, 2, 4$; $k = 0$: $x = -\frac{5}{2}, -1, 3$; $k = -1$: $x = -2$. Total : $1 + 2 + 4 + 3 + 1 = 11$.

■ Question 10

Réponse : 6

$f(x) = 2 + \frac{9}{x+2}$. Pour x entier, $f(x)$ est entier si et seulement si $x+2$ divise 9 : $x+2 \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$, d'où les six points $(-1, 11), (-3, -7), (1, 5), (-5, -1), (7, 3), (-11, 1)$.

Méthode express : forme réduite $a + \frac{k}{x-x_0}$: compter les diviseurs positifs et négatifs de k .

■ Série 2 • Transformations

■ Question 11

Réponse : C

Pour $0 < x < 1$: en multipliant $x < 1$ par $x^2 > 0$, puis par $x > 0$: $x^3 < x^2 < x$; et $x < \sqrt{x}$ (car $\sqrt{x} < 1$). Donc $x^3 < x^2 < \sqrt{x}$.

Méthode express : tester $x = \frac{1}{4}$: $\frac{1}{64} < \frac{1}{16} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ élimine A, B et D.

■ Question 12

Réponse : A

On lit les asymptotes $x = 1$ et $y = 2$: C (asymptote $x = -1$) et D (asymptote $y = 1$) sont exclues. B passe par O, alors que la courbe passe par $(2, 0)$ et $(0, 4)$; et $\frac{2 \times 0 - 4}{0 - 1} = 4$, $\frac{2 \times 3 - 4}{3 - 1} = 1$ ✓.

Méthode express : asymptotes : $x =$ valeur interdite, $y = \frac{a}{c}$; un point lisible tranche ensuite.

■ Question 13

Réponse : D

Avec $X = x - 3$: $f(x) = (x-3)^2 - 9 + |x-3| = X^2 + |X| - 9$, expression **paire en X**. Donc $f(6-x) = f(x)$: la droite $x = 3$ est axe de symétrie.

Méthode express : tout écrire en fonction de $x - a$; si l'expression est paire en $x - a$, la droite $x = a$ est un axe.

■ Question 14

Réponse : B

Le symétrique de $M(x, y)$ par rapport à $\Omega(1, 0)$ est $M'(2-x, -y)$. Un point (X, Y) est sur l'image si et seulement si $(2-X, -Y) \in C_f$, c'est-à-dire $-Y = f(2-X)$: $Y = -f(2-X)$.

Méthode express : par la symétrie de centre $\Omega(a, b)$, la courbe $y = f(x)$ devient $y = 2b - f(2a-x)$.

■ Question 15

Réponse : A

$x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5) \geq 0 : D_f =]-\infty, -1] \cup [5, +\infty[$. Le trinôme décroît sur $]-\infty, -1]$ et croît sur $[5, +\infty[$, et $\sqrt{}$ est croissante : f a le même sens de variation. Pièges B et D : f n'est pas définie sur $]-1, 5[$; le sommet $x = 2$ de la parabole n'est pas dans D_f .

■ Question 16

Réponse : D

$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$ et $(g \circ f)(x) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$. Égalité $\iff 2x^2 + 4x = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$.

Méthode express : $f \circ g$: on applique d'abord g . En général $f \circ g \neq g \circ f$ (piège C).

■ Question 17

Réponse : B

Si $a < b : f(a) < f(b)$, puis $g(f(a)) > g(f(b))$: $g \circ f$ est strictement décroissante. Contre-exemples : $f(x) = x^3$, $g(x) = -x$ donnent $f + g = x^3 - x$, nulle en $-1, 0$ et 1 ; $f(x) = x$, $g(x) = -x$ donnent $f \times g = -x^2$ et $g \times g = x^2$, non monotones.

Méthode express : pour une composée, règle des signes : croissante puis décroissante donne décroissante.

■ Question 18

Réponse : C

$f(x + 4) = f((x + 2) + 2) = -f(x + 2) = f(x)$: f est périodique de période 4. La fonction $x \mapsto \cos \frac{\pi x}{2}$ vérifie la relation $(\cos(\frac{\pi x}{2} + \pi) = -\cos \frac{\pi x}{2})$; elle est paire, vaut 1 en 0 et $f(2) = -1 \neq f(0)$: A, B et D sont fausses.

Méthode express : appliquer deux fois la relation : deux changements de signe s'annulent.

■ Question 19

Réponse : 5

$2026 = 3 \times 675 + 1$, donc $f(2026) = f(1) = 1$; $-2026 = 3 \times (-676) + 2$, donc $f(-2026) = f(2) = 4$. Total : 5. Piège : croire f paire et écrire $f(-2026) = f(2026)$.

Méthode express : ramener dans $[0, 3[$ avec le reste (toujours positif) de la division par 3.

■ Question 20

Réponse : -1

$(f \circ f)(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x}$ puis $(f \circ f \circ f)(x) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x : f \circ f \circ f = \text{Id}$. On a le cycle $2 \mapsto -1 \mapsto \frac{1}{2} \mapsto 2$, et $2026 = 3 \times 675 + 1$: le résultat est $f(2) = -1$.

Méthode express : calculer les premiers itérés jusqu'à retrouver le point de départ.

■ Série 3 • Limites et asymptotes

■ Question 21

Réponse : B

Pour $x < 2$: $|x - 2| = 2 - x$, donc $\frac{x^2 - 4}{|x - 2|} = \frac{(x-2)(x+2)}{2-x} = -(x+2) \rightarrow -4$. (À droite, on trouverait 4 : la limite en 2 n'existe pas.)

■ Question 22

Réponse : D

$\frac{x+\sqrt{x}}{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 1$ et $(x + \sqrt{x}) - x = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction $y = x$. Pièges : $\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ donnent l'asymptote $y = x$ (A, B) ; pour C, $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 2$.

Méthode express : direction $y = x : \frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$ et $f(x) - x \rightarrow \pm\infty$; si $f(x) - x$ a une limite finie, c'est une asymptote.

■ Question 23

Réponse : A

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$, donc pour x voisin de $\frac{\pi}{2}$ ($x \neq \frac{\pi}{2}$) : $\frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 + \sin x} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Méthode express : penser à l'identité $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ avant tout changement de variable.

■ Question 24

Réponse : C

Pour $x > 0$: $2x^2 + x = (x + 1)(2x - 1) + 1$, donc $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$: asymptote $y = 2x - 1$ en $+\infty$. Pour $x < 0$, $x \neq -1$: $2x^2 - x = (x + 1)(2x - 3) + 3$, donc $f(x) = 2x - 3 + \frac{3}{x+1}$: asymptote $y = 2x - 3$ en $-\infty$.

Méthode express : $|x|$ change d'expression avec le signe de x : une division par côté.

■ Question 25

Réponse : D

On lit : $f \rightarrow 1$ en $\pm\infty$, $f \rightarrow -\infty$ en 2^- , $f \rightarrow +\infty$ en 2^+ . D : quand $x \rightarrow 2^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$, puis $f(f(x)) \rightarrow 1$ ✓. A : $2 - \frac{1}{x} \rightarrow 2^-$, donc $f \rightarrow -\infty$. B : $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc $f \rightarrow 1$. C : $\frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x} \rightarrow 2^+$, donc $f \rightarrow +\infty$.

Méthode express : dans $f(u(x))$, chercher la limite de $u(x)$ et le côté par lequel elle arrive.

■ Question 26

Réponse : B

$\sqrt{x+1} - 2 = \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}$ et $\sqrt{x-2} - 1 = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}$, donc le quotient vaut $\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x+1}+2} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Méthode express : deux conjugués à la fois : le facteur $x - 3$ se simplifie.

■ Question 27

Réponse : A

Le numérateur vaut $1 - m$ en -1 ; s'il est non nul, la limite est infinie (forme « $\frac{k}{0}$ »). Donc $m = 1$: $x^3 + x + 2 = (x + 1)(x^2 - x + 2)$ et $f(x) = x^2 - x + 2 \rightarrow 4$.

■ Question 28

Réponse : C

$\sqrt{x^2 + 2x} - (x + 1) = \frac{x^2 + 2x - (x+1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1}$, donc pour $x > 0$: $x(\sqrt{x^2 + 2x} - x - 1) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 + \frac{1}{x}} \rightarrow -\frac{1}{2}$.

Méthode express : piège A : $\sqrt{x^2 + 2x} - x - 1 \rightarrow 0$, mais ce reste, multiplié par x , tend vers $-\frac{1}{2}$: le facteur x ne s'efface pas.

■ Question 29

Réponse : 55

Pour chaque entier k : $\frac{\sin kx}{x} = k \times \frac{\sin kx}{kx} \rightarrow k$. Par somme, la limite vaut $1 + 2 + \dots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$.

Méthode express : chaque quotient $\frac{\sin kx}{x}$ tend vers k : on additionne les coefficients 1, 2, ..., 10.

■ Question 30

Réponse : 2

$\sin(\pi \cos 2x) = \sin(\pi - \pi \cos 2x) = \sin u$ avec $u = \pi(1 - \cos 2x) \rightarrow 0$ ($u \neq 0$ pour $x \neq 0$ voisin de 0). Donc $\frac{\sin(\pi \cos 2x)}{\pi x^2} = \frac{\sin u}{u} \times \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \rightarrow 1 \times 2 = 2$.

Méthode express : $\sin(\pi - u) = \sin u$ ramène l'angle près de 0 ; puis $\frac{1 - \cos 2x}{x^2} = 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \rightarrow 2$.

■ Série 4 • Dérivées et variations

■ Question 31

Réponse : A

$f'(1) = 2$ et $f(1) = 1 + c$: la tangente a pour équation $y = 2(x - 1) + 1 + c = 2x - 1 + c$. Elle passe par 0 si et seulement si $c = 1$.

■ Question 32

Réponse : D

$$\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{h} = 3 \times \frac{f(2+3h)-f(2)}{3h} + \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} \rightarrow 3f'(2) + f'(2) = 4 \times 12 = 48.$$

Méthode express : $\frac{f(a+ph)-f(a+qh)}{h} \rightarrow (p-q)f'(a)$; ici $(3 - (-1)) \times 12$.

■ Question 33

Réponse : C

Hors de ± 1 , f est dérivable (produit de fonctions dérivables). En 1 : $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = |x-1| |x+1| \rightarrow 0$: f est dérivable en 1. En -1 : $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = (x-1) |x-1| \frac{|x+1|}{x+1}$ tend vers -4 à droite et vers 4 à gauche : point anguleux.

Méthode express : $(x-a)|x-a|$ est dérivable en a ; seul un facteur $|x-a|$ « isolé » crée un point anguleux.

■ Question 34

Réponse : B

On lit : $f' < 0$ sur $]-\infty, -1[$, $f' > 0$ sur $]-1, 2[$ et sur $]2, +\infty[$. Donc f décroît puis croît : minimum local en -1. En 2, f' s'annule **sans changer de signe** : pas d'extremum (tangente horizontale). A : le sommet de C_f , en $x = 0$ n'est pas un extremum de f ($f'(0) = 1 \neq 0$) ; D : $f' > 0$ sur $[0, 2[$.

Méthode express : extremum de $f \iff f'$ s'annule en changeant de signe.

■ Question 35

Réponse : D

$f(1) = 3$ et $f'(1) = 3 + 4 = 7$: tangente $y = 7x - 4$. Puis $f(x) - (7x - 4) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = (x-1)^2(x+4)$: la tangente recoupe la courbe en $x = -4$.

Méthode express : 1 est racine double de $x^3 + 2x^2 - 7x + 4$, et la somme des trois racines vaut -2 : $1 + 1 + r = -2$, donc $r = -4$.

■ Question 36

Réponse : A

$f'(x) = 3(x^2 - 2mx + 1)$, de discriminant réduit $m^2 - 1$. Si $|m| \leq 1$, $f' \geq 0$ et ne s'annule qu'en un point au plus : f est croissante. Si $|m| > 1$, $f' < 0$ entre ses deux racines. Piège B : pour $m = \pm 1$, $f'(x) = 3(x \mp 1)^2 \geq 0$ et f est bien croissante.

Méthode express : une dérivée positive qui s'annule en des points isolés n'empêche pas la croissance (penser à x^3).

■ Question 37

Réponse : C

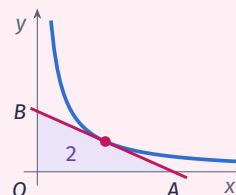
$f'(x) = 1 + 2 \cos x \leq 0 \iff \cos x \leq -\frac{1}{2} \iff x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ (sur $[0, 2\pi]$). Les autres intervalles contiennent des points où $f' > 0$: par exemple $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

■ Question 38

Réponse : B

La tangente en $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ a pour équation $y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$. Elle coupe les axes en $A(2a, 0)$ et $B\left(0, \frac{2}{a}\right)$, donc l'aire de OAB vaut $\frac{1}{2} \times 2a \times \frac{2}{a} = 2$, **quel que soit a** .

Méthode express : le point de contact est le milieu de $[AB]$.



■ Question 39

Réponse : 4

$f(x) = (x-2)g(x)$ avec $g(x) = x(x-1)(x-3)(x-4)$; $f'(x) = g(x) + (x-2)g'(x)$, donc $f'(2) = g(2) = 2 \times 1 \times (-1) \times (-2) = 4$.

Méthode express : en une racine simple a , $f'(a)$ est le produit des autres facteurs évalués en a .

■ Question 40

Réponse : 32

Les deux sommets situés sur la parabole ont même ordonnée : ce sont $(\pm u, 12 - u^2)$ avec $0 < u < 2\sqrt{3}$. L'aire vaut $A(u) = 2u(12 - u^2) = 24u - 2u^3$, $A'(u) = 24 - 6u^2 = 6(2 - u)(2 + u)$: A croît sur $]0, 2]$ et décroît sur $[2, 2\sqrt{3}[$. Maximum : $A(2) = 4 \times 8 = 32$.

■ Série 5 • Logarithme et exponentielle

■ Question 41

Réponse : C

$\frac{1}{x} + \ln x = \frac{1+x \ln x}{x}$; or $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ , donc le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 0^+ : la limite vaut $+\infty$.

Méthode express : en 0^+ , $\frac{1}{x}$ l'emporte sur $\ln x$ (car $x \ln x \rightarrow 0$).

■ Question 42

Réponse : A

Domaine : $x \neq 0$ et $x > -2$. Sur ce domaine, $\ln(x^2) = \ln((x+2)^2) \iff x^2 = (x+2)^2 \iff 4x+4=0 \iff x=-1$, qui convient. Piège B : écrire $\ln(x^2) = 2 \ln x$ (valable seulement pour $x > 0$) mène à $x = x+2$, impossible.

Méthode express : $\ln(x^2) = 2 \ln |x|$, et non $2 \ln x$.

■ Question 43

Réponse : D

Il faut $x > 0$ et $1 - \ln x > 0$, soit $\ln x < 1$, c'est-à-dire $0 < x < e$: $D_f =]0, e[$.

■ Question 44

Réponse : B

$f(x) = (x+1)e^{-x}$: $f(0) = 1$, $f'(x) = -xe^{-x}$ donc $f'(0) = 0$, $f(-1) = 0$ et $f(x) = xe^{-x} + e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$ ✓. A et C s'annulent en 1 (la courbe lue ne s'annule qu'en -1) et tendent vers $-\infty$ en $+\infty$; pour D, $f'(0) = 2 \neq 0$.

Méthode express : le zéro lu ($x = -1$) et la limite en $+\infty$ suffisent pour éliminer A, C et D.

■ Question 45

Réponse : C

On divise par 2^x : $\frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1}$, et $\left(\frac{3}{2}\right)^x \rightarrow 0$ en $-\infty$ (base > 1) : la limite vaut -1.

Méthode express : en $-\infty$, c'est la plus **petite** base qui domine (piège A).

■ Question 46

Réponse : D

On pose $u = \cos x - 1$, qui tend vers 0 et est non nul pour $x \neq 0$ voisin de 0 : $\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{\ln(1+u)}{u} \times \frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$. Piège B : oublier le signe de $\cos x - 1$.

Méthode express : écrire $\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos x - 1))$ et enchaîner les limites de référence $\frac{\ln(1+u)}{u} \rightarrow 1$ et $\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$.

■ Question 47

Réponse : A

$f'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x-a}{x}$. Si $a \leq 0$, $f' > 0$ sur $]0, +\infty[$: f est croissante. Si $a > 0$, $f' < 0$ sur $]0, a[$: f y décroît. Piège C : vérifier seulement $f'(1) = 1 - a \geq 0$.

■ Question 48

Réponse : B

Pour $a, b > 0$: $\frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln \sqrt{ab}$, et $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$; comme $\ln$ est croissante, $\ln \frac{a+b}{2} \geq \ln \sqrt{ab}$: B est vraie (c'est la **concavité** de $\ln$). Contre-exemples : A avec $a = 0, b = 2$ ($e < \frac{1+e^2}{2}$) ; C avec $a = b = 3$ ($\ln 6 < \ln 9$) ; D avec $a = b = e$ ($2 > 1$).

Méthode express : la courbe de $\ln$ est au-dessus de ses cordes, celle de $\exp$ au-dessous (piège A).

■ Question 49

Réponse : 5

$f'(x) = (2x - 7)e^x + (x^2 - 7x + 1)e^x = (x^2 - 5x - 6)e^x = (x + 1)(x - 6)e^x$. f' s'annule en changeant de signe en -1 et en 6 : ce sont les deux extremums locaux, et $-1 + 6 = 5$.

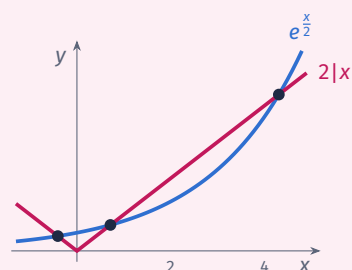
Méthode express : inutile de résoudre : les deux racines de $x^2 - 5x - 6$ sont simples et leur somme vaut 5.

■ Question 50

Réponse : 3

Les deux membres étant positifs : $e^x = 4x^2 \iff e^{\frac{x}{2}} = 2|x|$.
 Pour $x < 0$: $\varphi(x) = e^{\frac{x}{2}} + 2x$ est strictement croissante, tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et $\varphi(0) = 1 > 0$: une solution. Pour $x > 0$: $\psi(x) = e^{\frac{x}{2}} - 2x$, $\psi'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - 2$ s'annule en $x_0 = 4 \ln 2$; ψ décroît puis croît, avec $\psi(0) = 1 > 0$, $\psi(x_0) = 4 - 8 \ln 2 < 0$ et $\psi \rightarrow +\infty$: deux solutions. Total : 3 (environ $-0,41$; $0,71$; $4,31$).

Méthode express : prendre la racine carrée des deux membres : on compare une exponentielle à une droite.



■ Série 6 · Défis de concours

■ Question 51

Réponse : D

$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$ et $f''(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$, qui s'annule en e en changeant de signe : point d'inflexion $(e, 1)$. Piège A : $(1, 0)$ est le minimum de f .

■ Question 52

Réponse : B

$g(x) = f(x) - x$ est continue sur $[0, 1]$, avec $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$. Contre-exemples : $f = \frac{1}{2}$ (constante) pour A et D, $f(x) = 4x(1 - x)$ pour C.

Méthode express : la courbe de f traverse le carré $[0, 1]^2$ du côté gauche au côté droit : elle coupe la diagonale $y = x$.

■ Question 53

Réponse : A

A : $\frac{f(x)-f(0)}{x} = (e^x - 1) \frac{|x|}{x} = \pm(e^x - 1) \rightarrow 0$ des deux côtés : $f'(0) = 0$. B et C : le taux tend vers 1 à droite et -1 à gauche (point anguleux). D : le taux vaut $\ln |x| \rightarrow -\infty$ (tangente verticale).

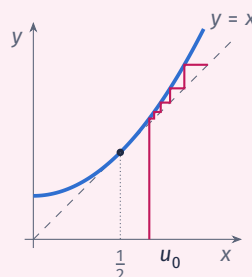
Méthode express : une valeur absolue multipliée par une fonction nulle en 0 devient dérivable en 0.

■ Question 54

Réponse : C

$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + \frac{1}{4} = \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$: la suite est croissante, donc $u_n \geq \frac{2}{3}$ pour tout n . Si elle convergerait vers ℓ , on aurait $\ell = \ell^2 + \frac{1}{4}$, soit $\ell = \frac{1}{2}$, impossible car $\ell \geq \frac{2}{3}$. Croissante et non convergente, elle n'est pas majorée : $u_n \rightarrow +\infty$. Piège A : $\frac{1}{2}$ est l'unique point fixe, mais la suite part **au-dessus** de lui.

Méthode express : la parabole est au-dessus de la droite $y = x$ (tangente en $\frac{1}{2}$) : l'escalier s'éloigne vers la droite.



■ Question 55

Réponse : A

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$, et $x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x \times \frac{\ln(1+u)}{u}$ avec $u = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$: l'exposant tend vers $+\infty$, donc la limite vaut $+\infty$. Piège B : c'est $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ qui tend vers e .

■ Question 56

Réponse : D

Posons $u = \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$: $u \rightarrow 0^+$ et $u \geq \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Alors $e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x-1}} = e^{\sqrt{x}}(1 - e^{-u}) = e^{\sqrt{x}} u \times \frac{1-e^{-u}}{u}$, avec $\frac{1-e^{-u}}{u} \rightarrow 1$ et $e^{\sqrt{x}} u \geq \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$ (croissances comparées, avec $X = \sqrt{x}$). La limite vaut $+\infty$. Piège A : croire que les deux termes « se compensent ».

Méthode express : l'écart entre $\sqrt{x}$ et $\sqrt{x-1}$ tend vers 0 moins vite que $e^{\sqrt{x}}$ ne tend vers $+\infty$.

■ Question 57

Réponse : B

Soit $g(x) = f(x) - x$: $g'' = f'' \geq 0$, donc $g' = f' - 1$ est croissante, avec $g'(0) = 0$: $g' \leq 0$ sur $]-\infty, 0]$ et $g' \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi g admet en 0 un minimum : $g(x) \geq g(0) = 0$, soit $f(x) \geq x$. Contre-exemple aux autres : $f(x) = x + x^2$ vérifie les hypothèses, mais $f(1) = 2 > 1$ (A et D) et f décroît sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ (C).

Méthode express : une courbe convexe est au-dessus de ses tangentes ; ici la tangente en 0 est $y = x$.

■ Question 58

Réponse : C

$f(x) - x = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \frac{e^u - 1}{u}$ avec $u = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$, donc $f(x) - x \rightarrow 1$ et $f(x) - (x+1) \rightarrow 0$: asymptote $y = x+1$. Pièges : $f(x) - x \rightarrow 1 \neq 0$ (A) ; $\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 1$ et non e (B) ; la limite finie de $f(x) - x$ exclut la branche parabolique (D).

■ Question 59

Réponse : 18

Comme $e^x \times e^{-x} = 1$: $(e^x + e^{-x})^3 = e^{3x} + e^{-3x} + 3(e^x + e^{-x})$, donc $e^{3x} + e^{-3x} = 3^3 - 3 \times 3 = 18$.

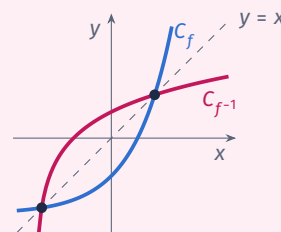
Méthode express : $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ avec $ab = 1$.

■ Question 60

Réponse : 2

f est strictement croissante. Si $M(a, b)$ est commun aux deux courbes : $b = f(a)$ et $a = f(b)$. Si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$, soit $b < a$: absurde ; de même si $a > b$. Donc $a = b$ et $f(a) = a$. Or $g(x) = e^x - x - 2$ décroît sur $]-\infty, 0]$, croît sur $[0, +\infty[$, $g(0) = -1 < 0$ et $g \rightarrow +\infty$ en $\pm\infty$: deux solutions ($\approx -1,84$ et $\approx 1,15$), toutes deux dans $]-2, +\infty[$. Deux points communs.

Méthode express : pour f strictement croissante, C_f et $C_{f^{-1}}$ ne se coupent que sur la droite $y = x$.



Partie 6 · Grands problèmes

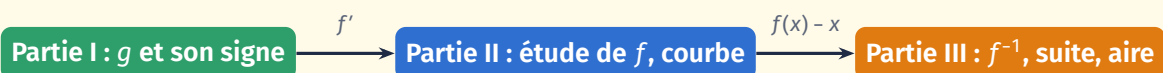
6 problèmes de synthèse : examen national et concours

★ Astuce de concours : comment aborder un grand problème

Un problème se lit **en entier** avant de commencer : les parties s'enchaînent (le signe de g donne le sens de variation de f , les positions relatives donnent la monotonie de la suite, etc.). Une question non résolue n'empêche pas d'utiliser son résultat dans la suite : **on admet et on avance**. Au concours, chaque question prépare la suivante : cherche toujours à *quoi sert* le résultat que l'on te demande.

1

Problèmes type examen national



Le fil rouge des trois problèmes : le signe de g donne les variations de f ; la position de C_f par rapport à $y = x$ donne la monotonie de la suite et l'aire.

Exercice 61 Problème 1 · Autour du logarithme ★★

corrigé p. 143

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité : 1 cm.

Partie I Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - 2 \ln x$.

Calculer $g'(x)$, dresser le tableau de variations de g et en déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Partie II Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + 2 \ln x - (\ln x)^2$; on note C_f sa courbe et Δ la droite d'équation $y = x$.

- a)** Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement. **b)** Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\infty$; interpréter.
- Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ pour tout $x > 0$, puis dresser le tableau de variations de f .
- a)** Vérifier que $f(x) - x = \ln x (2 - \ln x)$ et étudier la position relative de C_f et de Δ .
b) Montrer que la tangente T à C_f au point d'abscisse e a pour équation $y = x + 1$, puis que C_f est au-dessous de T .
- Montrer que $f''(x) = \frac{2(\ln x - 2)}{x^2}$; en déduire que C_f admet un point d'inflexion que l'on précisera.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0,7 < \alpha < 0,75$.
- Construire Δ , T et C_f (on prendra $e \approx 2,7$ et $e^2 \approx 7,4$).

Partie III Réciproque, suite et aire.

1. **a)** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$. **b)** Montrer que f^{-1} est dérivable en $e + 1$ et calculer $(f^{-1})'(e + 1)$. **c)** Construire $C_{f^{-1}}$ dans le même repère.
2. On pose $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. **a)** Montrer que $e \leq u_n \leq e^2$ pour tout n . **b)** Montrer que (u_n) est croissante. **c)** En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.
3. **a)** À l'aide d'intégrations par parties, calculer $\int_1^{e^2} \ln x \, dx$ puis $\int_1^{e^2} (\ln x)^2 \, dx$.
b) En déduire l'aire, en cm^2 , du domaine limité par C_f , la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

Exercice 62 Problème 2 · Autour de l'exponentielle ★★

corrigé p. 144

Repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité : 2 cm.**Partie I** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2 - x)e^x - 1$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$, puis $g'(x)$; dresser le tableau de variations de g .
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β , avec $-1,2 < \alpha < -1,1$ et $1,84 < \beta < 1,85$; en déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Partie II On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$; Δ est la droite d'équation $y = x$.

1. Montrer que $e^x - x > 0$ pour tout réel x (on pourra utiliser $e^x \geq 1 + x$) ; en déduire D_f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter. Étudier la position de C_f par rapport à la droite $D : y = 1$.
3. **a)** Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ et dresser le tableau de variations de f .
b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ (de même, $f(\beta) = \frac{1}{\beta - 1}$) et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
4. **a)** Montrer que $f(x) - x = \frac{(1 - x)(e^x - 1 - x)}{e^x - x}$; en déduire la position relative de C_f et de Δ .
b) Montrer que Δ est la tangente à C_f en O .
5. On admet que C_f possède trois points d'inflexion. Construire Δ et C_f (on prendra $\alpha \approx -1,15$, $\beta \approx 1,84$, $f(\alpha) \approx -0,47$ et $f(\beta) \approx 1,19$).

Partie III Réciproque, suite et aire.

1. Soit h la restriction de f à $I = [\alpha, \beta]$. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à préciser, puis que h^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(h^{-1})'(1)$.
2. On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. **a)** Montrer que $0 < u_n < 1$ pour tout n . **b)** Montrer que (u_n) est croissante. **c)** En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.
3. **a)** Vérifier que $f = \frac{v'}{v}$, où $v(x) = e^x - x$. **b)** Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par C_f , l'axe des abscisses et les droites $x = 0$, $x = 1$, puis celle du domaine compris entre C_f et Δ sur $[0, 1]$.

Exercice 63 Problème 3 · Logarithme et exponentielle ★★

corrigé p. 146

Repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité : 2 cm.**Partie I** Deux fonctions auxiliaires.

1. Soit $g(x) = e^{x-1} - x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Étudier les variations de g et montrer que $g(x) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.
2. Soit $h(x) = 2 \ln x + 1 - x$ pour $x > 0$. **a)** Étudier les variations de h (limites comprises).
b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ a exactement deux solutions : 1 et un réel β tel que $3,5 < \beta < 3,6$. En déduire le signe de $h(x)$.

Partie II Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x + e^{1-x}$, de courbe C_f .

1. Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; interpréter graphiquement.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x e^{x-1}}$; dresser le tableau de variations de f . Préciser la tangente à C_f au point $I(1, 1)$.
3. **a)** Montrer que $f''(x) = \frac{x^2 e^{1-x} - 1}{x^2}$ et que $f''(x)$ a le signe de $h(x)$.
b) En déduire que C_f admet deux points d'inflexion : I et un point J d'abscisse β . Montrer que $f(\beta) = \frac{\beta-1}{2} + \frac{1}{\beta^2}$.
4. Construire C_f (on prendra $\beta \approx 3,5$ et $f(\beta) \approx 1,34$).

Partie III Réciproque, suite et aire.

1. **a)** Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. **b)** La fonction f^{-1} est-elle dérivable en 1 ? Interpréter graphiquement. **c)** Construire $C_{f^{-1}}$.
2. On pose $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. **a)** Montrer que $1 < u_n \leq 2$ pour tout n .
b) En étudiant $x \mapsto f(x) - x$ sur $[1, +\infty[$, montrer que $f(x) < x$ pour tout $x > 1$; en déduire que (u_n) est décroissante. **c)** Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.
3. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

2

Problèmes de concours**Rappel utilisé dans les problèmes 5 et 6 : inégalité des accroissements finis**

Si k est dérivable sur un intervalle I et s'il existe $M \geq 0$ tel que $|k'(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$, alors $|k(a) - k(b)| \leq M |a - b|$ pour tous a, b de I .

Exercice 64 Problème 4 · Une famille de courbes et leurs sommets ★★★

corrigé p. 147

Pour tout réel m , on considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = (x^2 - m)e^x$; C_m est sa courbe dans un repère orthonormé.

1. **a)** Étudier les limites de f_m en $-\infty$ et en $+\infty$ et les branches infinies de C_m .
b) Montrer que, si $m \neq p$, les courbes C_m et C_p n'ont aucun point commun, et préciser leur position relative.

- Étudier les variations de f_m selon m (distinguer $m < -1$, $m = -1$ et $m > -1$; dans ce dernier cas, on notera $x_1 < x_2$ les racines de f'_m).
- Lieu des points à tangente horizontale.** **a)** Montrer que si C_m admet une tangente horizontale en un point $M(x, y)$, alors $y = -2x e^x$.
b) Étudier la fonction $\gamma : x \mapsto -2x e^x$; on note Γ sa courbe.
c) Montrer que tout point M_0 de Γ , d'abscisse x_0 , est un point à tangente horizontale d'une unique courbe C_m . Selon x_0 , M_0 est-il un maximum local, un minimum local, ou ni l'un ni l'autre ? Quel est l'ensemble des points d'extremum de toutes les courbes C_m ?
- Tangentes issues de l'origine.** On note $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ les racines de $a^2 - a - 1 = 0$.
a) Montrer que la tangente à C_m au point d'abscisse a passe par O si et seulement si $a \neq 1$ et $m = \varphi(a)$, où $\varphi(a) = \frac{a^2(a+1)}{a-1}$.
b) Étudier les variations de φ ; montrer que $\varphi(\Phi) = \Phi^5 = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi(\Phi') = \Phi'^5 = \frac{11-5\sqrt{5}}{2}$.
c) Discuter, selon m , le nombre de points de C_m en lesquels la tangente passe par l'origine.

Exercice 65 Problème 5 · Une fonction égale à sa réciproque ★★★★★

corrigé p. 148

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -\ln(1 - e^{-x})$, C_f sa courbe dans un repère orthonormé et Δ la droite $y = x$.

Partie A Étude et symétrie.

- Justifier que f est définie et strictement positive sur $]0, +\infty[$; calculer ses limites aux bornes et interpréter.
- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$; dresser le tableau de variations de f et préciser sa concavité.
- a)** Montrer que $f(f(x)) = x$ pour tout $x > 0$. **b)** En déduire que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui-même, que $f^{-1} = f$, et que C_f est symétrique par rapport à Δ .
c) Résoudre $f(x) = x$. Donner la tangente à C_f au point Ω d'abscisse $\ln 2$: pourquoi est-elle perpendiculaire à Δ ?

Partie B Comportement aux bornes.

- On rappelle que $1 - \frac{1}{v} \leq \ln v \leq v - 1$ pour tout $v > 0$, avec égalité seulement si $v = 1$.
a) En choisissant $v = \frac{1}{1 - e^{-x}}$, montrer que $e^{-x} < f(x) < \frac{1}{e^x - 1}$ pour tout $x > 0$. **b)** En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x f(x)$.
- a)** Montrer que $x < (1+x)(1 - e^{-x})$ pour tout $x > 0$. **b)** En déduire que $0 < f(x) + \ln x < \ln(1+x)$ pour tout $x > 0$. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + \ln x)$? Interpréter, et rapprocher ce résultat de B.1.
- Tracer C_f , Δ et la courbe de $x \mapsto -\ln x$ dans un même repère.

Partie C Itérer f , puis la « moyenner ».

- On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Calculer u_1 et u_2 ; la suite (u_n) converge-t-elle ? Plus généralement, pour quelles valeurs de $u_0 > 0$ la suite (u_n) converge-t-elle ?
- Soit $k(x) = \frac{x + f(x)}{2}$ sur $I = [\frac{1}{2}, 1]$. **a)** Étudier les variations de k et montrer que $k(I) \subset I$ (on pourra utiliser B.2).
b) Montrer que $|k'(x)| \leq \frac{1}{3}$ pour tout $x \in I$. **c)** On pose $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = k(w_n)$. Montrer que $|w_n - \ln 2| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$; conclure.

Exercice 66 Problème 6 · Une suite définie implicitement ★★★

corrigé p. 150

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = x + n \ln x$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n , et que $e^{-1/n} < x_n < 1$.
2. **a)** Calculer $f_{n+1}(x_n)$; en déduire que la suite (x_n) est strictement croissante. **b)** Déterminer $\lim x_n$.
3. **a)** Montrer que $x_n = e^{-x_n/n}$. **b)** En déduire $\lim n(1 - x_n)$ (on rappelle que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$).
4. **a)** Montrer que, pour tout $t \geq 0$: $t - \frac{t^2}{2} \leq 1 - e^{-t} \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$.
b) En déduire que $\lim n(n(1 - x_n) - 1) = -\frac{3}{2}$. Que suggère ce résultat pour x_n ?
5. **Calcul approché.** Soit $n \geq 2$ et $h_n(x) = e^{-x/n}$. **a)** Montrer que $h_n([0, 1]) \subset [0, 1]$ et que $|h'_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ sur $[0, 1]$.
b) On pose $v_0 = 1$ et $v_{k+1} = h_n(v_k)$. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que $|v_k - x_n| \leq \frac{1}{n^{k+1}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
c) Cas $n = 10$: combien d'itérations suffisent pour obtenir x_{10} à 10^{-6} près ? Donner cette valeur approchée.

3

Corrigés des problèmes

■ Corrigé de l'exercice 61

Partie I

$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$ a le signe de $x-2$ (car $x > 0$). En 0^+ , $-2 \ln x \rightarrow +\infty$; en $+\infty$, $g(x) = x \left(1 + \frac{2}{x} - 2 \frac{\ln x}{x}\right) \rightarrow +\infty$. Le minimum de g est $g(2) = 4 - 2 \ln 2 = 2(2 - \ln 2) > 0$ (car $\ln 2 < 1$): $g(x) \geq g(2) > 0$ pour tout $x > 0$.

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	$4 - 2 \ln 2$	$+\infty$

Partie II

1. a) $\ln x \rightarrow -\infty$, donc $\ln x (2 - \ln x) \rightarrow (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$: l'axe des ordonnées ($x = 0$) est **asymptote verticale**.

b) $f(x) = x \left(1 + 2 \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x}\right)$; par croissances comparées, $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 \rightarrow 0$. Donc $f(x) \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$; puis $f(x) - x = \ln x (2 - \ln x) \rightarrow (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$: **branche parabolique de direction $\Delta : y = x$** .

2. $f'(x) = 1 + \frac{2}{x} - \frac{2 \ln x}{x} = \frac{x+2-2 \ln x}{x} = \frac{g(x)}{x} > 0$: f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

x	0	1	e^2	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$	$-\infty$	1	e^2	$+\infty$

x	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$2 - \ln x$	+	+	0	-
$f(x) - x$	-	0	0	-

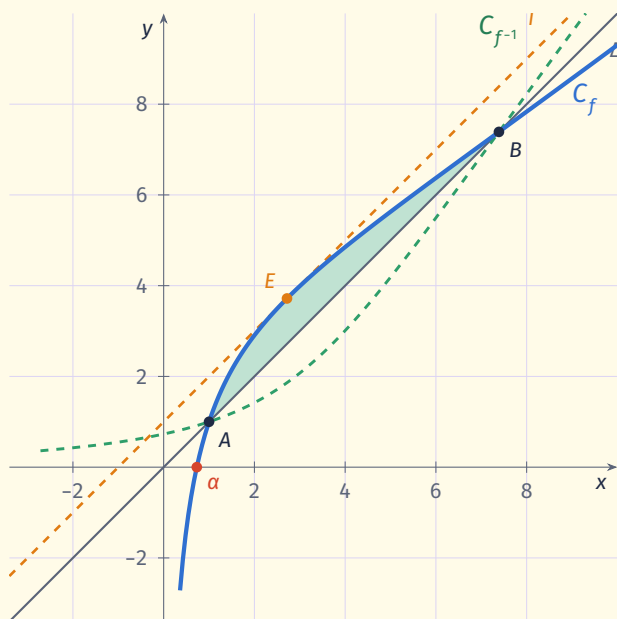
3. a) $f(x) - x = 2 \ln x - (\ln x)^2 = \ln x (2 - \ln x)$ (tableau ci-dessus) : C_f est **au-dessus** de Δ sur $]1, e^2[$, au-dessous sur $]0, 1[$ et sur $]e^2, +\infty[$; elles se coupent en $A(1, 1)$ et $B(e^2, e^2)$.

b) $f(e) = e + 2 - 1 = e + 1$ et $f'(e) = \frac{g(e)}{e} = \frac{e}{e} = 1$: $T : y = (x - e) + e + 1$, soit $T : y = x + 1$ (parallèle à Δ). Et $f(x) - (x + 1) = -[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 1] = -(\ln x - 1)^2 \leq 0$: C_f est au-dessous de T , avec contact au seul point $E(e, e + 1)$.

4. $f'(x) = 1 + \frac{2-2 \ln x}{x}$, donc $f''(x) = \frac{-\frac{2}{x} \times x - (2 - 2 \ln x)}{x^2} = \frac{2(\ln x - 2)}{x^2}$, du signe de $\ln x - 2$: C_f est concave sur $]0, e^2[$ et convexe sur $[e^2, +\infty[$. f'' s'annule en changeant de signe en e^2 : **$B(e^2, e^2)$ est un point d'inflexion**; la courbe y traverse Δ avec la pente $f'(e^2) = 1 - \frac{2}{e^2} \approx 0,73$.

5. f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ contient 0 : l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α . Comme $f(0,7) \approx -0,14 < 0$ et $f(0,75) \approx 0,09 > 0$: $0,7 < \alpha < 0,75$ ($\alpha \approx 0,73$).

6. Voir la figure : C_f (bleu) passe par A , E et B , sous la tangente T (orange); l'aire de la partie III est hachurée.



Partie III

1. a) f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$: c'est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$, qui admet une réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) $f(e) = e + 1$ et $f'(e) = 1 \neq 0$: f^{-1} est dérivable en $e + 1$, et

$$(f^{-1})'(e + 1) = \frac{1}{f'(e)} = \boxed{1}.$$

c) $C_{f^{-1}}$ (vert, en tirets) est la symétrique de C_f par rapport à Δ ; elle passe par A, B et $E'(e + 1, e)$, et admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $-\infty$.

2. a) Récurrence : $u_0 = e \in [e, e^2]$; si $e \leq u_n \leq e^2$, comme f est croissante, $f(e) \leq f(u_n) \leq f(e^2)$, soit $e < e + 1 \leq u_{n+1} \leq e^2$. b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \ln u_n (2 - \ln u_n) \geq 0$, car $1 \leq \ln u_n \leq 2$: (u_n) est croissante.

c) Croissante et majorée par e^2 , (u_n) converge vers un réel $\ell \in [e, e^2]$. Comme f est continue sur $[e, e^2]$ et $f([e, e^2]) \subset [e, e^2]$, on a $f(\ell) = \ell$, soit $\ln \ell (2 - \ln \ell) = 0$: $\ell \in \{1, e^2\}$. Or $\ell \geq e$: $\lim u_n = e^2$.

3. a) Par parties ($u = \ln x$, $v' = 1$) : $\int_1^{e^2} \ln x \, dx = [x \ln x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} dx = 2e^2 - (e^2 - 1) = \boxed{e^2 + 1}$. Puis ($u = (\ln x)^2$, $u' = \frac{2 \ln x}{x}$, $v = x$) :

$$\int_1^{e^2} (\ln x)^2 \, dx = [x(\ln x)^2]_1^{e^2} - 2 \int_1^{e^2} \ln x \, dx = 4e^2 - 2(e^2 + 1) = \boxed{2e^2 - 2}.$$

b) Sur $[1, e^2]$, $f(x) \geq x$: $A = \int_1^{e^2} (f(x) - x) \, dx = 2(e^2 + 1) - (2e^2 - 2) = 4$ u.a. Avec 1 u.a. = 1 cm² :

$A = 4$ cm² : une aire entière, sans e !

■ Corrigé de l'exercice 62

Partie I

1. En $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$ et $xe^x \rightarrow 0$, donc $g(x) = 2e^x - xe^x - 1 \rightarrow \boxed{-1}$. En $+\infty$: $2 - x \rightarrow -\infty$ et $e^x \rightarrow +\infty$, donc $g(x) \rightarrow \boxed{-\infty}$. $g'(x) = -e^x + (2 - x)e^x = \boxed{(1 - x)e^x}$, du signe de $1 - x$; maximum $g(1) = e - 1$.

x	$-\infty$	α	1	β	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	-1	↗	$e - 1$	↘	$-\infty$

2. Sur $] -\infty, 1]$, g est continue, strictement croissante, et $g(]-\infty, 1]) =]-1, e - 1]$ contient 0 : g s'y annule une seule fois, en α . Sur $[1, +\infty[$, g est continue, strictement décroissante, et $g([1, +\infty[) =]-\infty, e - 1] \ni 0$: un seul zéro β . Or $g(-1,2) \approx -0,036 < 0 < g(-1,1) \approx 0,032$ et $g(1,84) \approx 0,007 > 0 > g(1,85) \approx -0,046$. **Signe** : $g(x) > 0$ sur $]\alpha, \beta[$, $g(x) < 0$ sur $] -\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$.

Partie II

1. $e^x \geq 1 + x$ donne $e^x - x \geq 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais, $D_f = \mathbb{R}$.

2. En $-\infty$: $e^x - 1 \rightarrow -1$ et $e^x - x \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$: asymptote $y = 0$ en $-\infty$. En $+\infty$:

$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}} \rightarrow \boxed{1}$ (car $xe^{-x} \rightarrow 0$) : asymptote $D : y = 1$ en $+\infty$. $f(x) - 1 = \frac{x-1}{e^x - x}$ a le signe de $x-1$: C_f est au-dessous de D sur $]-\infty, 1[$, au-dessus sur $]1, +\infty[$; elle coupe D en $K(1, 1)$.

3. a) $f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{(2-x)e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$.

b) $g(\alpha) = 0$ donne $e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$, d'où

$$f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2-\alpha} - 1}{\frac{1}{2-\alpha} - \alpha} = \frac{\alpha - 1}{1 - 2\alpha + \alpha^2} = \boxed{\frac{1}{\alpha - 1}}.$$

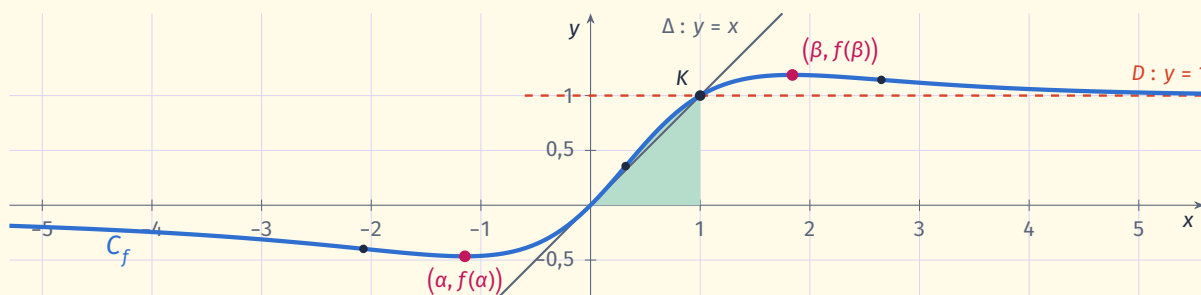
Comme $-2,2 < \alpha - 1 < -2,1$: $-\frac{1}{2,1} < f(\alpha) < -\frac{1}{2,2}$, soit $-0,48 < f(\alpha) < -0,45$. De même $f(\beta) = \frac{1}{\beta-1} \approx 1,19$.

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{\alpha-1}$	$\frac{1}{\beta-1}$	1	

4. a) $f(x) - x = \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x}$ et $e^x - 1 - xe^x + x^2 = (1-x)e^x - (1-x)(1+x) = (1-x)(e^x - 1 - x)$. Or $e^x - 1 - x \geq 0$ (nul seulement en 0) et $e^x - x > 0$: $f(x) - x$ a le signe de $1-x$, sauf en 0 où il est nul. C_f est au-dessus de Δ sur $]-\infty, 1[$ (en la touchant en O), au-dessous sur $]1, +\infty[$; elles se coupent en $K(1, 1)$.

b) $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{g(0)}{1^2} = 1$: la tangente en O est $y = x$, c'est-à-dire Δ ; C_f reste au-dessus de sa tangente de part et d'autre de O .

5. Les trois points d'inflexion ont pour abscisses environ $-2,07$; $0,32$; $2,65$ (points noirs).



Partie III

1. h est continue et strictement croissante sur $I = [\alpha, \beta]$: c'est une bijection de I sur $J = [f(\alpha), f(\beta)] = \left[\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\beta-1}\right]$. $1 = f(1)$ avec $1 \in]\alpha, \beta[$ et $f'(1) = \frac{g(1)}{(e-1)^2} = \frac{1}{e-1} \neq 0$: h^{-1} est dérivable en 1 et $(h^{-1})'(1) = \boxed{e-1}$.

2. a) $[0, 1] \subset [\alpha, \beta]$, où f est strictement croissante, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On a $0 < u_0 < 1$; si $0 < u_n < 1$, alors $f(0) < f(u_n) < f(1)$, soit $0 < u_{n+1} < 1$.

b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$ d'après II.4 (car $u_n \in]0, 1[$) : (u_n) est croissante.

c) Croissante et majorée par 1, elle converge vers $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; f est continue sur $[0, 1]$ et $f([0, 1]) = [0, 1]$, donc $f(\ell) = \ell$, d'où $\ell \in \{0, 1\}$ (II.4) : $\lim u_n = 1$. (Convergence lente : $u_7 \approx 0,93$, car $f'(1) = \frac{1}{e-1} \approx 0,58$.)

3. a) $v'(x) = e^x - 1$ et $v > 0$: $f = \frac{v'}{v}$ a pour primitive $\ln v$. b) $f \geq 0$ sur $[0, 1]$: $A_1 = \int_0^1 f(x) dx = \left[\ln(e^x - x)\right]_0^1 = \ln(e-1)$ u.a. ; ici 1 u.a. = 4 cm^2 , donc $A_1 = 4 \ln(e-1) \approx 2,17 \text{ cm}^2$ (en vert). Et $f(x) \geq x$ sur $[0, 1]$: $A_2 = \int_0^1 (f(x) - x) dx = \ln(e-1) - \frac{1}{2}$ u.a., soit $A_2 = 4 \ln(e-1) - 2 \approx 0,17 \text{ cm}^2$: la mince lunule entre C_f et sa tangente Δ .

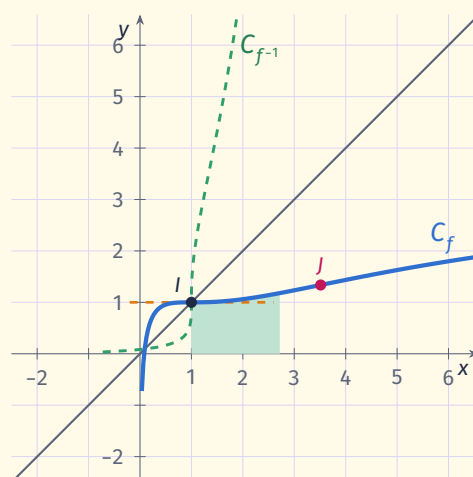
■ Corrigé de l'exercice 63

Partie I

1. $g'(x) = e^{x-1} - 1 < 0 \iff x < 1$: g décroît sur $]-\infty, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$; son minimum est $g(1) = 0$. Donc $g(x) \geq 0$, et $g(x) = 0$ seulement en 1 (monotonie stricte de part et d'autre).

2. a) $h'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$: h croît sur $]0, 2]$, décroît sur $[2, +\infty[$. En 0^+ , $2 \ln x \rightarrow -\infty$; en $+\infty$, $h(x) = x \left(2 \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} - 1 \right) \rightarrow -\infty$. Maximum : $h(2) = 2 \ln 2 - 1 \approx 0,39 > 0$.

b) Sur $]0, 2]$, h est continue, strictement croissante, de $-\infty$ à $h(2) > 0$: un seul zéro, et c'est 1 car $h(1) = 0$. Sur $[2, +\infty[$, h est continue, strictement décroissante, de $h(2) > 0$ à $-\infty$: un seul zéro β ; $h(3,5) \approx 0,0055 > 0 > h(3,6) \approx -0,038$ donne $3,5 < \beta < 3,6$. Signe : $h > 0$ sur $]1, \beta[$, $h < 0$ sur $]0, 1[\cup]\beta, +\infty[$.



C_f (bleu), $C_{f^{-1}}$ (vert), tangente $y = 1$ en I (orange) et aire de III.3.

Partie II

1. En 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$ et $e^{1-x} \rightarrow e$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$: asymptote verticale $x = 0$. En $+\infty$:

$\ln x \rightarrow +\infty$, $e^{1-x} \rightarrow 0$: $f(x) \rightarrow +\infty$; $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{e^{1-x}}{x} \rightarrow 0$: **branche parabolique de direction** (Ox) .

2. $f'(x) = \frac{1}{x} - e^{1-x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{e^{x-1} - x}{x e^{x-1}} = \frac{g(x)}{x e^{x-1}} \geq 0$, nul seulement en 1 : f est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$. $f(1) = 0 + e^0 = 1$ et $f'(1) = 0$: la tangente en $I(1, 1)$ est **horizontale**, d'équation $y = 1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$

3. a) $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + e^{1-x} = \frac{x^2 e^{1-x} - 1}{x^2}$. Pour $x > 0$, comme $\ln$ est strictement croissante : $x^2 e^{1-x} > 1 \iff \ln(x^2 e^{1-x}) > 0 \iff 2 \ln x + 1 - x > 0$, c'est-à-dire $h(x) > 0$: $f''(x)$ a le signe de $h(x)$.

b) f'' s'annule en changeant de signe en 1 et en β : C_f est concave sur $]0, 1]$, convexe sur $[1, \beta]$, concave sur $[\beta, +\infty[$. Points d'inflexion : $I(1, 1)$, où la tangente est horizontale (la courbe la traverse), et $J(\beta, f(\beta))$. De $h(\beta) = 0$ on tire $\ln \beta = \frac{\beta-1}{2}$ et $\beta^2 e^{1-\beta} = 1$, soit $e^{1-\beta} = \frac{1}{\beta^2}$:

$$f(\beta) = \ln \beta + e^{1-\beta} = \frac{\beta-1}{2} + \frac{1}{\beta^2} \approx 1,34.$$

4. Voir la figure en tête de corrigé : C_f « s'aplatit » autour de I , puis croît lentement (branche parabolique).

Partie III

1. a) f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, de $-\infty$ à $+\infty$ (II.1) : c'est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $J = \mathbb{R}$.

b) Pour $y \neq 1$, on pose $x = f^{-1}(y)$; alors

$$\frac{f^{-1}(y) - 1}{y - 1} = \frac{x - 1}{f(x) - 1}.$$

Si $y \rightarrow 1$, alors $x \rightarrow 1$ (f^{-1} est continue) et $\frac{f(x)-1}{x-1}$ tend vers $f'(1) = 0$ en restant positif (f croissante) : le quotient tend vers $+\infty$. f^{-1} n'est pas dérivable en 1 : $C_{f^{-1}}$ a une **tangente verticale** en l .

c) $C_{f^{-1}}$ est la symétrique de C_f par rapport à Δ (vert, en tirets, sur la figure du début).

2. a) $u_0 = 2 \in]1, 2]$; si $1 < u_n \leq 2$, comme f est strictement croissante, $1 = f(1) < u_{n+1} \leq f(2) = \ln 2 + e^{-1} \approx 1,06 < 2$.

b) Soit $\psi(x) = f(x) - x$ sur $[1, +\infty[$: $\psi'(x) = \frac{1}{x} - 1 - e^{1-x} < 0$ (car $\frac{1}{x} \leq 1$ et $e^{1-x} > 0$), donc ψ est strictement décroissante, et $\psi(1) = 0$: $\psi(x) < 0$, i.e. $f(x) < x$, pour $x > 1$. Ainsi $u_{n+1} - u_n = \psi(u_n) < 0$: (u_n) est décroissante.

c) Décroissante et minorée par 1, (u_n) converge vers $\ell \in [1, 2]$; f est continue sur $[1, 2]$ et $f([1, 2]) \subset [1, 2]$, donc $f(\ell) = \ell$, $\psi(\ell) = 0$ et $\lim u_n = 1$. Convergence foudroyante : $u_1 \approx 1,061$, $u_2 \approx 1,000\,035$; la tangente horizontale en l « écrase » l'escalier.

3. Sur $[1, e]$, $f \geq 1 > 0$. Par parties, $\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx = e - (e - 1) = 1$; et $\int_1^e e^{1-x} \, dx = [-e^{1-x}]_1^e = 1 - e^{1-e}$. $A = (2 - e^{1-e})$ u.a. = $4(2 - e^{1-e}) \text{ cm}^2 \approx 7,28 \text{ cm}^2$.

■ Corrigé de l'exercice 64

1. a) En $-\infty$: $x^2 e^x \rightarrow 0$ (croissances comparées) et $e^x \rightarrow 0$, donc $f_m(x) \rightarrow 0$: **asymptote** $y = 0$. En $+\infty$: $f_m(x) \rightarrow +\infty$ et $\frac{f_m(x)}{x} = (x - \frac{m}{x})e^x \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction (Oy) .

b) $f_m(x) - f_p(x) = (p - m)e^x \neq 0$: aucun point commun. Si $m < p$, C_m est **au-dessus** de C_p : les courbes s'empilent sans se toucher.

2. $f'_m(x) = (x^2 + 2x - m)e^x = [(x + 1)^2 - (1 + m)]e^x$.

• $m < -1$: $f'_m > 0$, f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

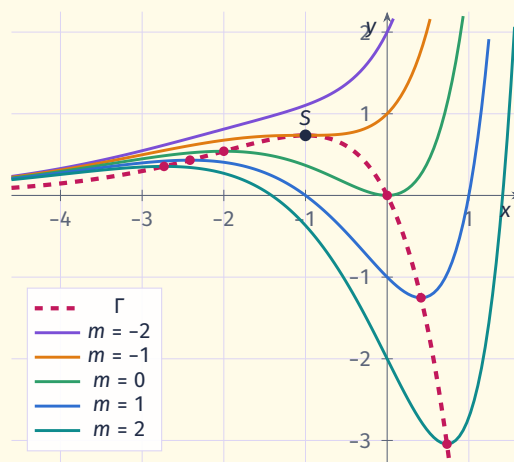
• $m = -1$: $f'_{-1}(x) = (x + 1)^2 e^x \geq 0$, nul seulement en -1 : f_{-1} est strictement croissante ; tangente horizontale en $S(-1, \frac{2}{e})$, qui est un point d'inflexion car $f''_{-1}(x) = (x + 1)(x + 3)e^x$ y change de signe.

• $m > -1$: $x_1 = -1 - \sqrt{1 + m} < x_2 = -1 + \sqrt{1 + m}$; f_m croît sur $]-\infty, x_1]$, décroît sur $[x_1, x_2]$, croît sur $[x_2, +\infty[$: maximum local en x_1 , minimum local en x_2 .

3. a) Une tangente horizontale en $M(x, y)$ impose $f'_m(x) = 0$, soit $m = x^2 + 2x$, et alors $y = (x^2 - x^2 - 2x)e^x = -2xe^x$: le paramètre m a disparu !

b) $\gamma'(x) = -2(1 + x)e^x$: γ croît sur $]-\infty, -1]$, décroît sur $[-1, +\infty[$, maximum $\gamma(-1) = \frac{2}{e}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma = -\infty$, $\gamma(0) = 0$.

c) Soit $M_0(x_0, \gamma(x_0))$ et $m_0 = x_0^2 + 2x_0$: $f'_{m_0}(x_0) = 0$ et $f_{m_0}(x_0) = \gamma(x_0)$, donc M_0 est un point de C_{m_0} à tangente horizontale ; d'après 1.b, M_0 n'est sur aucune autre courbe. Comme $m_0 =$



Les C_m s'empilent sans se couper ; leurs sommets (points rouges) glissent tous sur Γ (tirets) ; pour $m = -1$, le sommet S de Γ est un point d'inflexion à tangente horizontale.

$(x_0 + 1)^2 - 1 \geq -1$: si $x_0 < -1$, alors $m_0 > -1$ et $x_0 = -1 - \sqrt{1 + m_0}$: **maximum local** ; si $x_0 > -1$, $x_0 = -1 + \sqrt{1 + m_0}$: **minimum local** ; si $x_0 = -1$, $m_0 = -1$: ni l'un ni l'autre (inflexion). Les extremums décrivent Γ privée de son sommet $S(-1, \frac{2}{e})$: maximums sur la branche montante ($x < -1$), minimums sur la branche descendante ($x > -1$).

4. a) La tangente au point d'abscisse a est $y = f'_m(a)(x - a) + f_m(a)$; elle passe par O si et seulement si $f_m(a) = a f'_m(a)$, soit (on simplifie par $e^a > 0$)

$$a^2 - m = a(a^2 + 2a - m) \iff m(a - 1) = a^3 + a^2 = a^2(a + 1).$$

Pour $a = 1$, cela donne $0 = 2$: impossible. Donc $a \neq 1$ et $m = \varphi(a) = \frac{a^2(a + 1)}{a - 1}$.

b) $\varphi'(a) = \frac{(3a^2 + 2a)(a - 1) - (a^3 + a^2)}{(a - 1)^2} = \frac{2a(a^2 - a - 1)}{(a - 1)^2} = \frac{2a(a - \Phi)(a - \Phi')}{(a - 1)^2}$. $\varphi(a) = a^2 \cdot \frac{a+1}{a-1} \rightarrow +\infty$ en $\pm\infty$; en $1^\pm$, $a^2(a + 1) \rightarrow 2$ et $a - 1 \rightarrow 0^\pm$: $\varphi \rightarrow \pm\infty$. Avec $\Phi^2 = \Phi + 1$ et $\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$:

$$\varphi(\Phi) = \frac{\Phi^2 \cdot \Phi^2}{1/\Phi} = \Phi^5, \text{ et } \Phi^5 = \Phi(\Phi + 1)^2 = \Phi(3\Phi + 2) = 3\Phi^2 + 2\Phi = 5\Phi + 3 = \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2} \approx 11,09.$$

Le même calcul (seule $a^2 = a + 1$ sert) donne $\varphi(\Phi') = \Phi'^5 = 5\Phi' + 3 = \frac{11 - 5\sqrt{5}}{2} \approx -0,09$.

a	$-\infty$	Φ'	0	1	Φ	$+\infty$
$\varphi'(a)$	-	0	+	0	-	+
$\varphi(a)$	$+\infty$	$\frac{11-5\sqrt{5}}{2}$	0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

c) On note $m_1 = \frac{11-5\sqrt{5}}{2} \approx -0,09$ et $m_2 = \frac{11+5\sqrt{5}}{2} \approx 11,09$. Des abscisses a distinctes donnent des points distincts : le nombre cherché est le nombre de solutions de $\varphi(a) = m$, qu'on lit sur le tableau (chaque intervalle de stricte monotonie en donne au plus une) :

m	$]-\infty, m_1[$	m_1	$]m_1, 0[$	0	$]0, m_2[$	m_2	$]m_2, +\infty[$
nombre de points	1	2	3	2	1	2	3

Exemple : pour $m = 0$, ce sont $a = 0$ (tangente $y = 0$) et $a = -1$ (tangente $y = -\frac{x}{e}$).

Le nombre d'or gouverne les seuils : $m_1 = \Phi'^5$ et $m_2 = \Phi^5$.

■ Corrigé de l'exercice 65

Partie A

- Pour $x > 0$: $0 < e^{-x} < 1$, donc $1 - e^{-x} \in]0, 1[$ et $\ln(1 - e^{-x}) < 0$: $f(x)$ existe et $f(x) > 0$. En 0^+ , $1 - e^{-x} \rightarrow 0^+$ et $f(x) \rightarrow +\infty$: asymptote $x = 0$; en $+\infty$, $1 - e^{-x} \rightarrow 1$ et $f(x) \rightarrow 0$: asymptote $y = 0$.
- $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = -\frac{1}{e^x - 1} < 0$ et $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} > 0$: f est strictement décroissante de $+\infty$ à 0, et C_f est **convexe**.
- a) $e^{-f(x)} = 1 - e^{-x}$, donc $1 - e^{-f(x)} = e^{-x}$ et $f(f(x)) = -\ln(e^{-x}) = x$.
b) f envoie $]0, +\infty[$ dans lui-même (A1). Tout $y > 0$ s'écrit $y = f(f(y))$: f est surjective ; si $f(a) = f(b)$, alors $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$: f est injective. C'est une bijection, et $f \circ f = \text{id}$ signifie $f^{-1} = f$. Donc $C_f = C_{f^{-1}}$, qui est la symétrique de C_f par rapport à Δ : C_f est symétrique par rapport à Δ .
c) $f(x) = x \iff e^{-x} = 1 - e^{-x} \iff e^{-x} = \frac{1}{2} \iff x = \ln 2$. $f'(\ln 2) = -\frac{1}{2-1} = -1$: tangente

$y = -x + 2 \ln 2$. En général, si $f^{-1} = f$ et $f(a) = a$, alors $f'(a) = (f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(a)}$, d'où $f'(a)^2 = 1$; ici $f' < 0$, donc $f'(\ln 2) = -1$: la tangente en Ω est perpendiculaire à Δ .

Partie B

1. a) Pour $x > 0$, $v = \frac{1}{1-e^{-x}} > 1$, $\ln v = f(x)$, $1 - \frac{1}{v} = e^{-x}$ et $v - 1 = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}$. Comme $v \neq 1$, les inégalités sont strictes : $e^{-x} < f(x) < \frac{1}{e^x - 1}$.

b) Donc $1 < e^x f(x) < \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$:

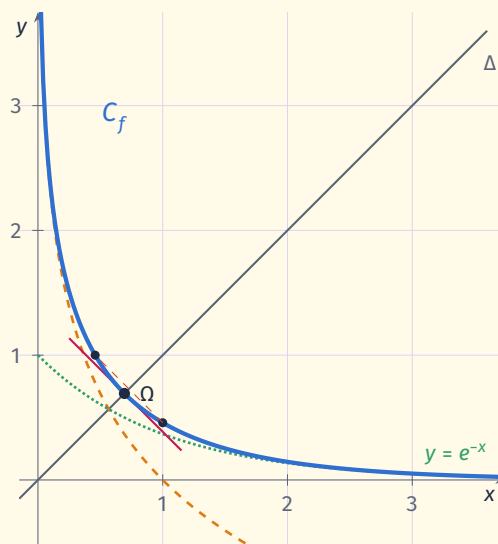
$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x f(x) = 1$ (gendarmes) : en $+\infty$, $f(x)$ « se comporte comme » e^{-x} .

2. a) $x < (1+x)(1-e^{-x}) \iff (1+x)e^{-x} < 1 \iff 1+x < e^x$, vrai pour $x \neq 0$.

b) $f(x) + \ln x = \ln \frac{x}{1-e^{-x}}$. Comme $e^{-x} > 1-x$, on a $0 < 1 - e^{-x} < x$: le quotient dépasse 1 et $f(x) + \ln x > 0$. Et a) donne $\frac{x}{1-e^{-x}} < 1+x$, d'où $f(x) + \ln x < \ln(1+x)$.

Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + \ln x) = 0$: C_f et la courbe L de $x \mapsto -\ln x$ sont **asymptotes** en 0 (C_f au-dessus). C'est le reflet de B.1 par la symétrie d'axe Δ : en $+\infty$, C_f « colle » à la courbe de $x \mapsto e^{-x}$, dont la réciproque est $x \mapsto -\ln x$.

3. Figure ci-contre.



Les points $(1; 0,459)$ et $(0,459; 1)$, symétriques par rapport à Δ , portent le cycle de C_1 .

Partie C

1. $u_1 = f(1) = -\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) = -\ln \frac{e-1}{e} = 1 - \ln(e-1) \approx 0,459$ et $u_2 = f(f(1)) = 1$. Plus généralement $u_{n+2} = f(f(u_n)) = u_n$: la suite est **2-périodique**, $u_{2p} = u_0$ et $u_{2p+1} = u_1$. Si (u_n) converge vers ℓ , les suites constantes (u_{2p}) et (u_{2p+1}) tendent vers ℓ , donc $u_0 = u_1 = f(u_0)$, i.e. $u_0 = \ln 2$; réciproquement, $u_0 = \ln 2$ donne une suite constante. **(u_n) converge si et seulement si $u_0 = \ln 2$** ; pour $u_0 = 1$, elle oscille entre 1 et 0,459 et diverge.

2. a) $k'(x) = \frac{1+f'(x)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \frac{e^x - 2}{2(e^x - 1)}$: k décroît sur $\left[\frac{1}{2}, \ln 2\right]$ et croît sur $[\ln 2, 1]$ (on a $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$ car $2 < e < 4$). Minimum : $k(\ln 2) = \ln 2 > \frac{1}{2}$. Aux bornes : $k(1) = 1 - \frac{\ln(e-1)}{2} < 1$ (car $e-1 > 1$), et B.2 en $x = \frac{1}{2}$ donne $f\left(\frac{1}{2}\right) < \ln \frac{3}{2} - \ln \frac{1}{2} = \ln 3$, d'où $k\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{4} + \frac{\ln 3}{2} < \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ (car $\ln 3 < \frac{3}{2} \iff 9 < e^3$). Donc $k(I) \subset [\ln 2, 1] \subset I$.

b) $k''(x) = \frac{e^x}{2(e^x - 1)^2} > 0$: k' croît, donc $k'\left(\frac{1}{2}\right) \leq k'(x) \leq k'(1)$ sur I . Or $k'(1) = \frac{e-2}{2(e-1)} \leq \frac{1}{3} \iff 3e-6 \leq 2e-2 \iff e \leq 4$ ✓, et $k'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}-2}{2(\sqrt{e}-1)} \geq -\frac{1}{3} \iff 5\sqrt{e} \geq 8 \iff e \geq 2,56$ ✓. Ainsi $|k'(x)| \leq \frac{1}{3}$ sur I .

c) Par récurrence $w_n \in I$ (car $k(I) \subset I$), et $k(\ln 2) = \ln 2$ avec $\ln 2 \in I$. L'inégalité des accroissements finis donne $|w_{n+1} - \ln 2| = |k(w_n) - k(\ln 2)| \leq \frac{1}{3} |w_n - \ln 2|$, d'où $|w_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - \ln 2) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ (car $\ln 2 \geq \frac{1}{2}$) : $\lim w_n = \ln 2$. En réalité, c'est bien plus rapide ($k'(\ln 2) = 0$) : $w_1 \approx 0,7293$, $w_2 \approx 0,69378$, $w_3 \approx 0,6931474$. **Moyenner x et $f(x)$ supprime l'oscillation.**

■ Corrigé de l'exercice 66

1. $f'_n(x) = 1 + \frac{n}{x} > 0$: f_n est continue, strictement croissante, de $-\infty$ (en 0^+) à $+\infty$; c'est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, et $f_n(x) = 0$ a une unique solution x_n . Comme $f_n(e^{-1/n}) = e^{-1/n} - 1 < 0 = f_n(x_n) < 1 = f_n(1)$: $e^{-1/n} < x_n < 1$.

2. a) $f_{n+1}(x_n) = x_n + (n+1) \ln x_n = f_n(x_n) + \ln x_n = \ln x_n < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$; f_{n+1} étant croissante, $x_n < x_{n+1}$: (x_n) est strictement croissante.

b) $e^{-1/n} \rightarrow 1$: par encadrement, $\lim x_n = 1$.

3. a) $n \ln x_n = -x_n$, d'où $\ln x_n = -\frac{x_n}{n}$ et $x_n = e^{-x_n/n}$.

b) On pose $t_n = \frac{x_n}{n} \rightarrow 0$ ($t_n > 0$). Alors $n(1 - x_n) = n(1 - e^{-t_n}) = x_n \times \frac{e^{-t_n} - 1}{-t_n} \rightarrow 1 \times 1$:

$$\lim n(1 - x_n) = 1.$$

4. a) $A(t) = 1 - e^{-t} - t + \frac{t^2}{2}$: $A(0) = 0$ et $A'(t) = e^{-t} - 1 + t \geq 0$ (car $e^s \geq 1 + s$ avec $s = -t$), donc $A \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. $B(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} - 1 + e^{-t}$: $B(0) = 0$ et $B'(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t} = A(t) \geq 0$, donc $B \geq 0$. Chaque inégalité se déduit de la précédente par intégration : c'est la méthode « en cascade ».

b) Avec $t = t_n$ et en multipliant par n : $x_n - \frac{x_n^2}{2n} \leq n(1 - x_n) \leq x_n - \frac{x_n^2}{2n} + \frac{x_n^3}{6n^2}$. On retranche 1 et on multiplie par n :

$$n(x_n - 1) - \frac{x_n^2}{2} \leq n(n(1 - x_n) - 1) \leq n(x_n - 1) - \frac{x_n^2}{2} + \frac{x_n^3}{6n}.$$

Comme $n(x_n - 1) \rightarrow -1$ (3.b) et $x_n \rightarrow 1$, les deux bornes tendent vers $-1 - \frac{1}{2}$; par encadrement,

$$\lim n(n(1 - x_n) - 1) = -\frac{3}{2} \quad \text{ce qui suggère} \quad x_n \approx 1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} \text{ pour } n \text{ grand.}$$

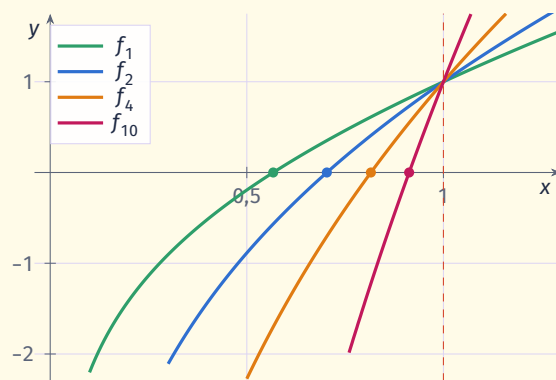
5. a) Pour $x \in [0, 1]$, $-\frac{1}{n} \leq -\frac{x}{n} \leq 0$, donc $e^{-1/n} \leq h_n(x) \leq 1$: $h_n([0, 1]) \subset [0, 1]$; et $|h'_n(x)| = \frac{1}{n} e^{-x/n} \leq \frac{1}{n}$.

b) Par récurrence $v_k \in [0, 1]$, et $h_n(x_n) = x_n$ (3.a). L'inégalité des accroissements finis donne $|v_{k+1} - x_n| = |h_n(v_k) - h_n(x_n)| \leq \frac{1}{n} |v_k - x_n|$, d'où $|v_k - x_n| \leq \frac{1}{n^k} (1 - x_n)$. Or $1 - x_n < 1 - e^{-1/n} \leq \frac{1}{n}$ (car $e^{-s} \geq 1 - s$) : $|v_k - x_n| \leq \frac{1}{n^{k+1}}$.

c) $\frac{1}{10^{k+1}} \leq 10^{-6} \iff k \geq 5$: cinq itérations suffisent. $v_1 \approx 0,904\,837$, $v_2 \approx 0,913\,489$, $v_3 \approx 0,912\,699$, $v_4 \approx 0,912\,771$, $v_5 \approx 0,912\,765$: $x_{10} \approx 0,912\,765$ à 10^{-6} près.

n	x_n	$n(1 - x_n)$	$n(n(1 - x_n) - 1)$
1	0,567 14	0,432 86	-0,567 1
10	0,912 77	0,872 35	-1,276 5
100	0,990 15	0,985 26	-1,473 8
$+\infty$	1	1	-1,5

Les trois colonnes convergent, de plus en plus lentement : la troisième n'est qu'à 0,03 de sa limite pour $n = 100$.



Les zéros $x_1 < x_2 < x_4 < x_{10}$ s'accumulent vers 1.

1

Le plan d'étude en une page

Huit étapes, **toujours dans cet ordre** : chacune s'appuie sur les résultats des précédentes.

1 Domaine et symétries

Question Pour quels réels x l'expression $f(x)$ existe-t-elle ? Peut-on réduire l'intervalle d'étude ?

Outil Dénominateur $\neq 0$, radicande ≥ 0 , $\ln u$ exige $u > 0$. Parité : $f(-x)$; axe $x = a$: $f(2a - x) = f(x)$; centre $\Omega(a, b)$: $f(2a - x) + f(x) = 2b$; période T .

Piège Dire « paire » sans vérifier que D_f est symétrique par rapport à 0.

Voir **Partie 1 · Les bases** : « Notion de fonction », « Parité et symétries » ; **Partie 2 · Limites et dérivées** : « Périodicité et symétries ».

2 Limites aux bornes

Question Que devient $f(x)$ en $\pm\infty$ et de part et d'autre de chaque valeur interdite ?

Outil Opérations sur les limites. Formes indéterminées : terme de plus haut degré, quantité conjuguée, nombre dérivé, croissances comparées.

Piège Pour $\ell/0$ ($\ell \neq 0$), étudier le **signe** du dénominateur ; ∞/∞ est une F.I., pas 1.

Voir **Partie 2 · Limites et dérivées** : « Les formes indéterminées » ; **Partie 3 · L'étude complète** : « Croissances comparées ».

4 Dérivée et signe

Question Où f est-elle dérivable ? Signe de $f'(x)$?

Outil Dériver, **factoriser** $f'(x)$, tableau de signes. Si le signe résiste : une **fonction auxiliaire** g (souvent le numérateur de f'), étudiée à part ; son zéro α est encadré par le TVI.

Piège Là où $\sqrt{u}$ ou $|u|$ s'annule : taux d'accroissement à droite et à gauche.

Voir **Partie 2 · Limites et dérivées** : « Dérivée et variations » ; **Partie 3 · L'étude complète** : « Fonction auxiliaire et signe ».

3 Branches infinies

Question Comment C_f se comporte-t-elle à l'infini ?

Outil $f \rightarrow \pm\infty$ en a : $x = a$; $f \rightarrow b$ en $\pm\infty$: $y = b$; sinon $f(x)/x \rightarrow a \neq 0$ et $f(x) - ax \rightarrow b$: $y = ax + b$; $f(x)/x \rightarrow \pm\infty$ ou 0 : branche parabolique de direction (Oy) ou (Ox) . Position : signe de $f(x) - (ax + b)$.

Piège $f(x)/x \rightarrow a$ ne suffit pas : si $f(x) - ax \rightarrow \pm\infty$, branche parabolique de direction $y = ax$.

Voir **Partie 2 · Limites et dérivées** : « Branches infinies » ; **Partie 3 · L'étude complète** : « Branches infinies : le bilan ».

5 Tableau de variations

Question Comment f varie-t-elle ? Quels extremums ? Combien de solutions pour $f(x) = k$?

Outil Signe de $f' \rightarrow$ flèches ; limites et valeurs **exactes** des extremums. f continue et strictement monotone sur I : bijection de I sur $f(I)$, donc $f(x) = k$ a une seule solution si $k \in f(I)$.

Piège $f'(x_0) = 0$ sans changement de signe : pas d'extremum ($x \mapsto x^3$ en 0).

Voir **Partie 1 · Les bases** : « Variations et extremums » ; **Partie 3 · L'étude complète** : « Continuité et TVI ».

6 Dérivée seconde, concavité

Question Courbe tournée vers le haut ou vers le bas ?

Outil $f'' \geq 0$ sur I : convexe, au-dessus de ses tangentes ; $f'' \leq 0$: concave, au-dessous. f'' s'annule **en changeant de signe** en x_0 : point d'inflexion, la courbe y traverse sa tangente.

Piège $f''(x_0) = 0$ ne suffit pas : $x \mapsto x^4$ n'a pas d'inflexion en 0. Ne pas confondre le signe de f' et celui de f'' .

Voir **Partie 2 · Limites et dérivées** : « Concavité et points d'inflexion ».

8 Tracé de la courbe

Question Le tracé respecte-t-il **toutes** les étapes ?

Outil Repère et unités ; asymptotes en pointillés ; points et tangentes ; puis la courbe, guidée par les variations, la position relative et la concavité. Courbe de f^{-1} : symétrique par rapport à $y = x$.

Piège Couper une asymptote verticale ; une pointe là où la tangente est horizontale.

Voir **Partie 2 · Limites et dérivées** : « Plan d'étude : trois modèles » ; **Partie 3 · L'étude complète** : « Une étude complète type examen ».

7 Points particuliers, tangentes

Question Que faut-il placer avant de tracer ?

Outil $f(0)$, solutions de $f(x) = 0$; tangente $y = f'(a)(x - a) + f(a)$; tangentes horizontales, demi-tangentes verticales ; centre ou axe de symétrie ; points communs avec une asymptote.

Piège La tangente utilise $f'(a)$ **et** $f(a)$; un taux de limite infinie donne une demi-tangente **verticale**.

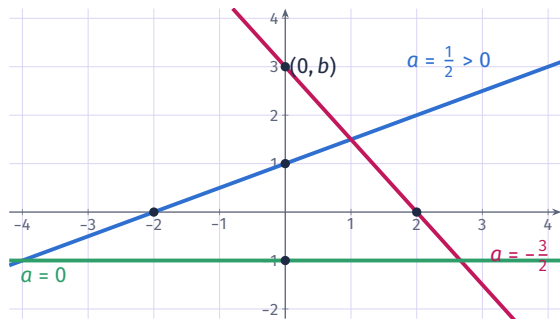
Voir **Partie 2 · Limites et dérivées** : « Nombre dérivé et tangente » ; **Partie 1 · Les bases** : « Résolutions graphiques ».

2

L'atlas des courbes

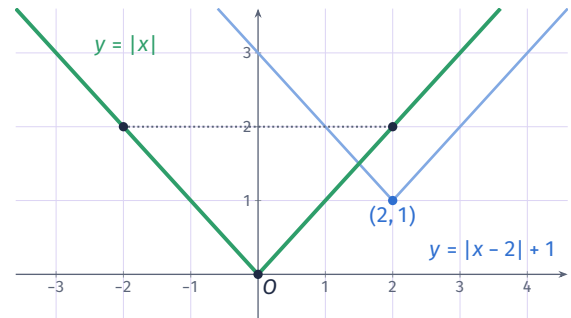
Trente courbes de référence : **1 à 10** (tronc commun), **11 à 20** (1^{re} Bac), **21 à 30** (2^e Bac PC). **Asymptotes en pointillés rouges**, **tangentes en violet**, points remarquables (•).

Tronc commun 1 • Fonctions affines $x \mapsto ax + b$



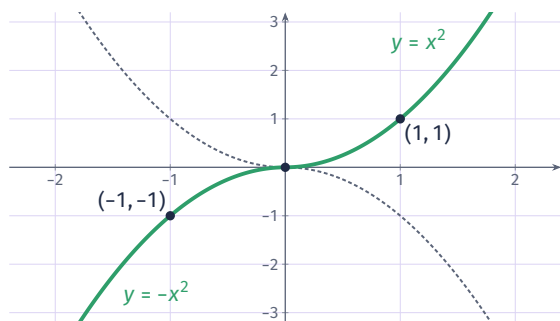
- $D = \mathbb{R}$; droite de pente a , qui coupe (Oy) en $(0, b)$.
- $a > 0$: croissante ; $a < 0$: décroissante ; $a = 0$: constante.
- Si $a \neq 0$: zéro $-\frac{b}{a}$; du signe de a à droite de ce zéro.

Tronc commun 2 • Valeur absolue $x \mapsto |x|$



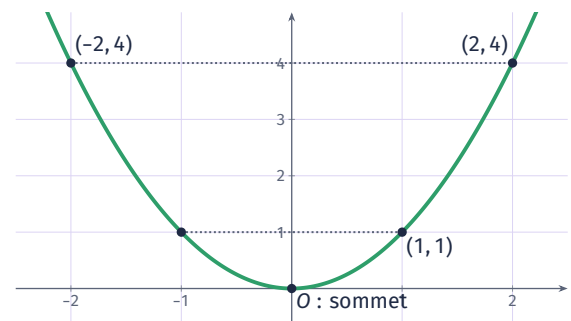
- $D = \mathbb{R}$, paire ; $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x \leq 0$.
- Décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$.
- Minimum 0 en 0 ; $y = |x - a| + b$: même « V », de sommet (a, b) .

Tronc commun 3 • Demi-paraboles $x \mapsto x|x|$



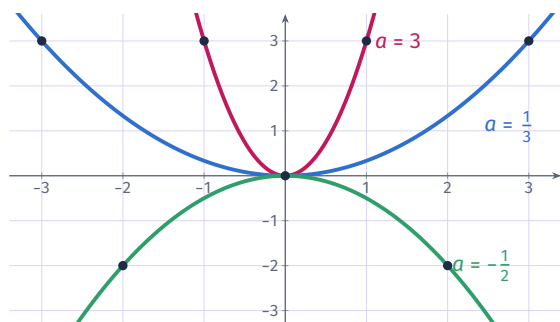
- $D = \mathbb{R}$, impaire ; $x|x| = x^2$ si $x \geq 0$, $x|x| = -x^2$ si $x < 0$.
- Strictement croissante sur $\mathbb{R}$: deux demi-paraboles.
- Pour tout réel m , l'équation $x|x| = m$ a une unique solution.

Tronc commun 4 • Fonction carré $x \mapsto x^2$



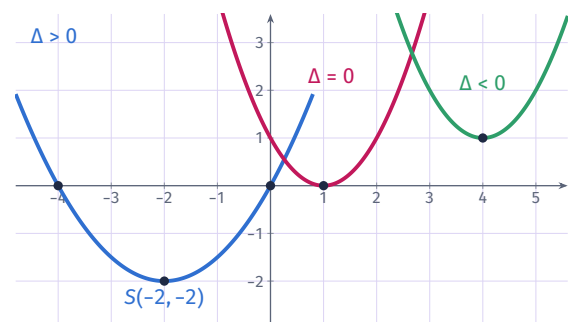
- $D = \mathbb{R}$, paire ; parabole de sommet O , d'axe (Oy) ; min 0.
- Décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$.
- $x^2 = k$: deux solutions $\pm\sqrt{k}$ si $k > 0$, aucune si $k < 0$.

Tronc commun 5 • Paraboles $y = ax^2$ $a \neq 0$



- Paire ; parabole de sommet O et d'axe (Oy) .
- $a > 0$: tournée vers le haut, min 0 ; $a < 0$: vers le bas, max 0.
- Plus $|a|$ est grand, plus la parabole est resserrée.

Tronc commun 6 • Trinômes, $a > 0$ $ax^2 + bx + c$



- Sommet $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$: minimum ; décroît puis croît.
- $\Delta > 0$: deux racines ; $\Delta = 0$: racine double ; $\Delta < 0$: aucune.
- Du signe de a , sauf entre les racines.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Tronc commun

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

1^{re} Bac

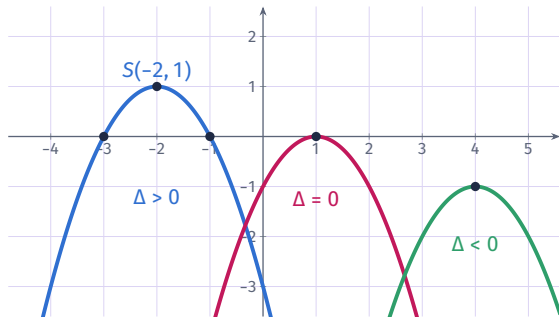
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

2^e Bac PC

vignettes 7 à 12

Tronc commun 7 • Trinômes, $a < 0$

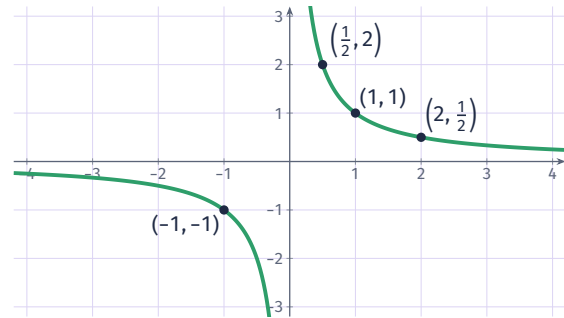
$$ax^2 + bx + c$$



- ▶ Sommet $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$: maximum ; croît puis décroît.
- ▶ Si $\Delta \geq 0$: racines $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, de somme $-\frac{b}{a}$, de produit $\frac{c}{a}$.
- ▶ $\Delta < 0$: partout du signe de a (ici < 0).

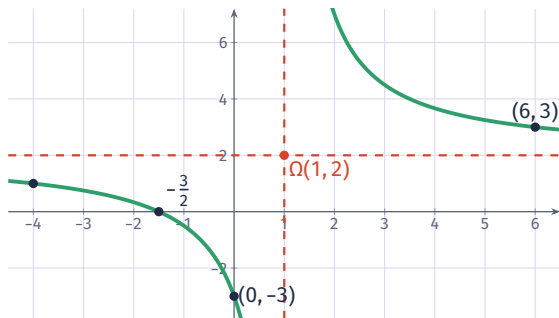
Tronc commun 8 • Fonction inverse

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$



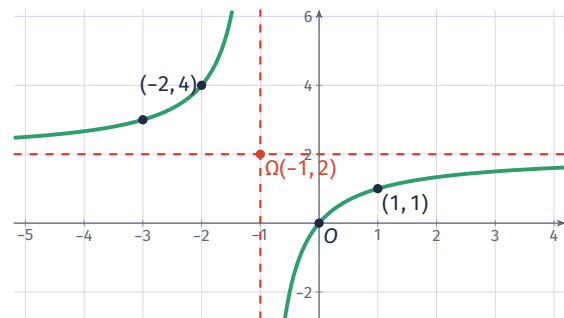
- ▶ $D = \mathbb{R}^*$, impaire ; asymptotes : les deux axes.
- ▶ Décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (pas sur $\mathbb{R}^*$).
- ▶ $\frac{1}{x} = k$: une solution $\frac{1}{k}$ si $k \neq 0$, aucune si $k = 0$.

Tronc commun 9 • Homographique, $ad - bc < 0$ $\frac{2x+3}{x-1}$



- ▶ $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f(x) = 2 + \frac{5}{x-1}$; $ad - bc = -5 < 0$.
- ▶ Décroissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
- ▶ Asymptotes $x = 1$, $y = 2$; centre de symétrie $Q(1, 2)$.

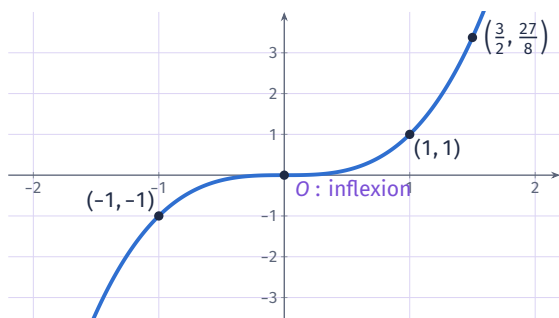
Tronc commun 10 • Homographique, $ad - bc > 0$ $\frac{2x}{x+1}$



- ▶ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $f(x) = 2 - \frac{2}{x+1}$; $ad - bc = 2 > 0$.
- ▶ Croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$; passe par O .
- ▶ Asymptotes $x = -1$, $y = 2$; centre de symétrie $Q(-1, 2)$.

1^{re} Bac 11 • Fonction cube

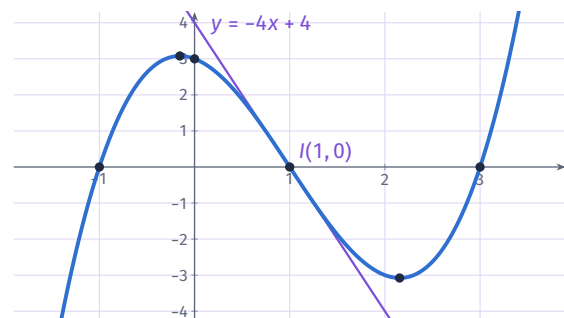
$$x \mapsto x^3$$



- ▶ $D = \mathbb{R}$, impaire ; $f'(x) = 3x^2 \geq 0$: croissante.
- ▶ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty$; branches paraboliques de direction (Oy) .
- ▶ $f''(x) = 6x$: inflexion en O , à tangente horizontale.

1^{re} Bac 12 • Cubique à 3 racines

$$x^3 - 3x^2 - x + 3$$



- ▶ $f(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$: trois racines -1 , 1 et 3 .
- ▶ $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$: extremums $\pm \frac{16\sqrt{3}}{9}$ en $1 \mp \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
- ▶ $f''(x) = 6x - 6$: inflexion $I(1, 0)$, centre de symétrie.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Tronc commun

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

1^{re} Bac

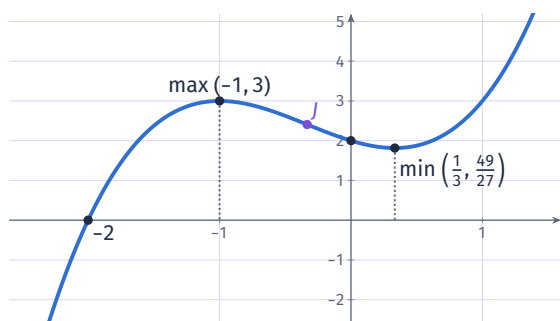
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

2^e Bac PC

vignettes 13 à 18

1^{re} Bac 13 · Cubique à 1 racine

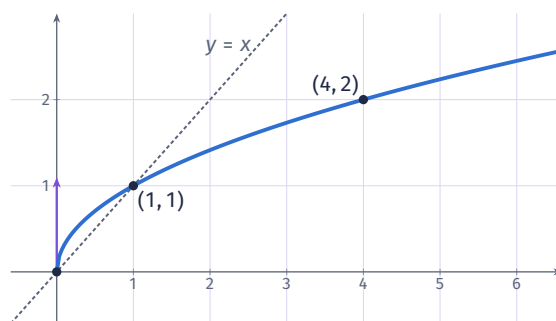
$$x^3 + x^2 - x + 2$$



- ▶ $f(x) = (x+2)(x^2 - x + 1)$: seule racine -2 (second facteur : $\Delta = -3$).
- ▶ $f'(x) = (x+1)(3x-1)$: max 3 en -1 , min $\frac{49}{27} > 0$ en $\frac{1}{3}$.
- ▶ Inflexion $J(-\frac{1}{3}, \frac{65}{27})$: centre de symétrie.

1^{re} Bac 14 · Racine carrée

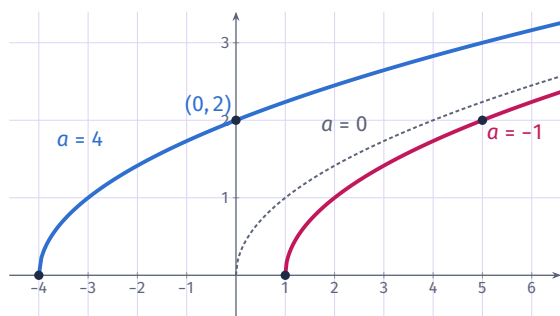
$$x \mapsto \sqrt{x}$$



- ▶ $D = [0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ sur $]0, +\infty[$: croissante.
- ▶ Non dérivable en 0 : demi-tangente verticale en O.
- ▶ $\frac{\sqrt{x}}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$: branche parabolique de direction (Ox) .

1^{re} Bac 15 · Translatées de $\sqrt{x}$

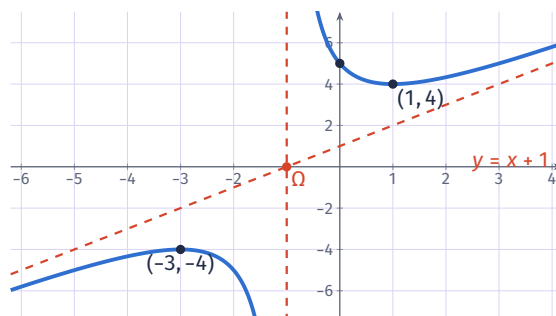
$$x \mapsto \sqrt{x+a}$$



- ▶ $D = [-a, +\infty[$; translatée de la courbe de $\sqrt{x}$ par $-a\vec{i}$.
- ▶ $(\sqrt{x+a})' = \frac{1}{2\sqrt{x+a}} > 0$: croissante.
- ▶ Demi-tangente verticale en $(-a, 0)$; branche parabolique de direction (Ox) .

1^{re} Bac 16 · Asymptote oblique

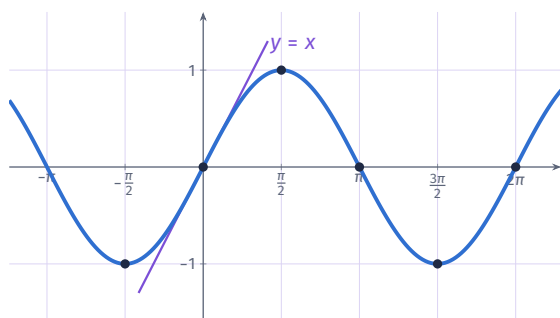
$$\frac{x^2+2x+5}{x+1}$$



- ▶ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x+1}$.
- ▶ $f'(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$: max local -4 en -3 , min local 4 en 1 .
- ▶ Asymptotes $x = -1$ et $y = x + 1$; centre $\Omega(-1, 0)$; C_f au-dessus de $y = x + 1$ ssi $x > -1$.

1^{re} Bac 17 · Sinus

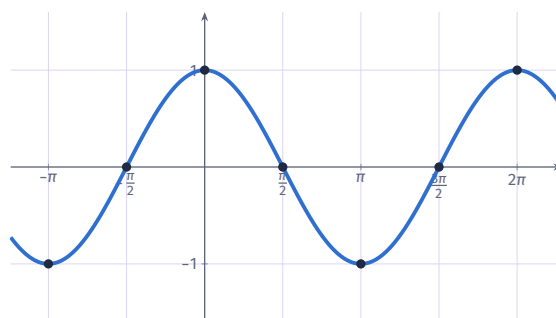
$$x \mapsto \sin x$$



- ▶ $D = \mathbb{R}$, impaire, 2π -périodique ; $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- ▶ $\sin' = \cos$: croît sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, décroît sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
- ▶ Inflexion en O, de tangente $y = x$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1^{re} Bac 18 · Cosinus

$$x \mapsto \cos x$$



- ▶ $D = \mathbb{R}$, paire, 2π -périodique ; $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.
- ▶ $\cos' = -\sin$: décroît sur $[0, \pi]$, croît sur $[\pi, 2\pi]$.
- ▶ Max 1 en $2k\pi$, min -1 en $\pi + 2k\pi$; zéros : $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Tronc commun

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

1^{re} Bac

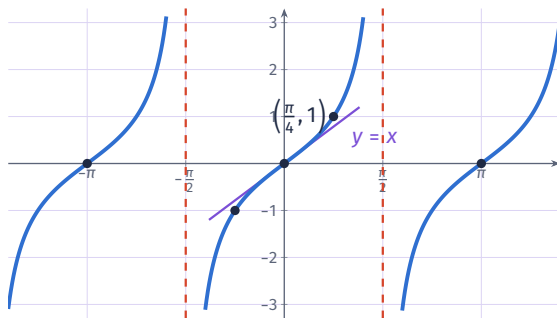
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

2^e Bac PC

vignettes 19 à 24

1^{re} Bac 19 · Tangente

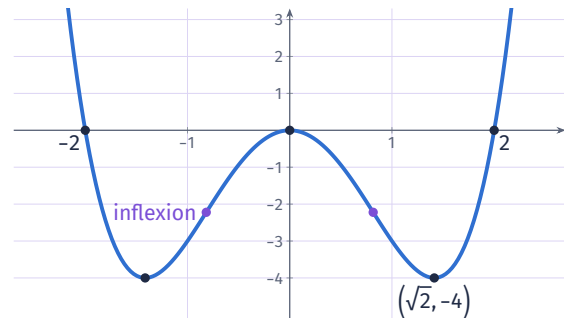
$x \mapsto \tan x$



- ▶ $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$, impaire, π -périodique.
- ▶ $\tan' x = 1 + \tan^2 x > 0$: croissante sur chaque $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.
- ▶ Asymptotes $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; tangente $y = x$ en O .

1^{re} Bac 20 · Bicarrée en « W »

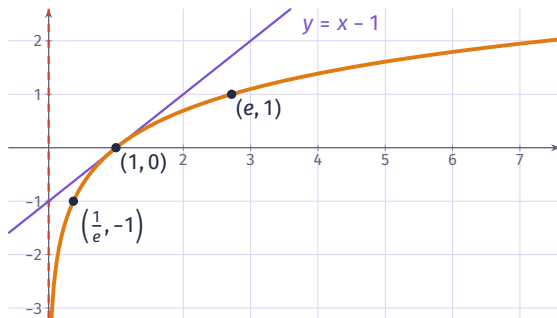
$x^4 - 4x^2$



- ▶ $D = \mathbb{R}$, paire ; $f(x) = x^2(x-2)(x+2)$: racines 0, ± 2 .
- ▶ $f'(x) = 4x(x^2 - 2)$: min -4 en $\pm\sqrt{2}$, max local 0 en 0.
- ▶ $f''(x) = 12x^2 - 8$: inflexions en $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, d'ordonnée $-\frac{20}{9}$.

2^e Bac PC 21 · Logarithme népérien

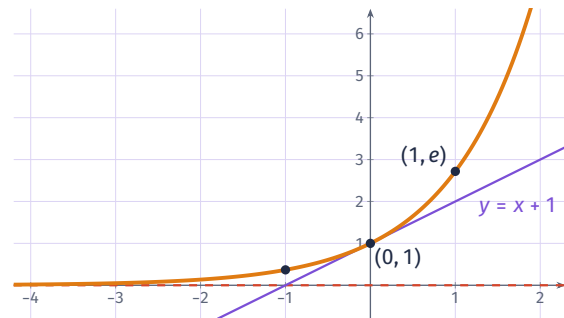
$x \mapsto \ln x$



- ▶ $D =]0, +\infty[$; $\ln' x = \frac{1}{x} > 0$; $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.
- ▶ $\ln x \rightarrow -\infty$ en 0^+ : asymptote $x = 0$; $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$: branche parabolique de direction (Ox) .
- ▶ Concave : sous sa tangente $y = x - 1$ en $(1, 0)$.

2^e Bac PC 22 · Exponentielle

$x \mapsto e^x$



- ▶ $D = \mathbb{R}$; $\exp' = \exp > 0$; $e^0 = 1$, $e \approx 2,72$; $e^x > 0$.
- ▶ $e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$: asymptote $y = 0$; $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction (Oy) .
- ▶ Convexe : au-dessus de sa tangente $y = x + 1$.

2^e Bac PC 23 · Produit $x \ln x$

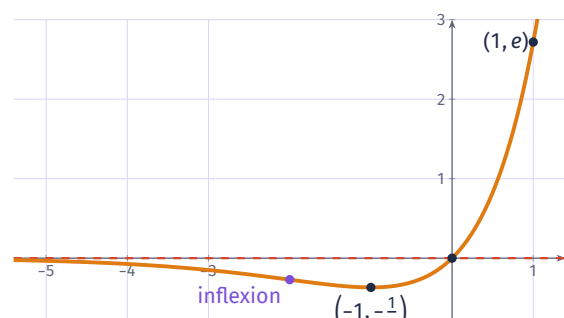
$x \mapsto x \ln x$



- ▶ $D =]0, +\infty[$; $f'(x) = \ln x + 1$: min $-\frac{1}{e}$ en $\frac{1}{e}$; racine 1.
- ▶ $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ : on prolonge par $f(0) = 0$; convexe.
- ▶ Demi-tangente verticale en O ; $\frac{f(x)}{x} = \ln x \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction (Oy) .

2^e Bac PC 24 · Produit xe^x

$x \mapsto xe^x$



- ▶ $f'(x) = (x+1)e^x$: min $-\frac{1}{e}$ en -1 ; seule racine 0.
- ▶ $xe^x \rightarrow 0$ en $-\infty$: asymptote $y = 0$; en $+\infty$: branche parabolique de direction (Oy) .
- ▶ $f''(x) = (x+2)e^x$: inflexion en $(-2, -\frac{2}{e^2})$.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Tronc commun

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

1^{re} Bac

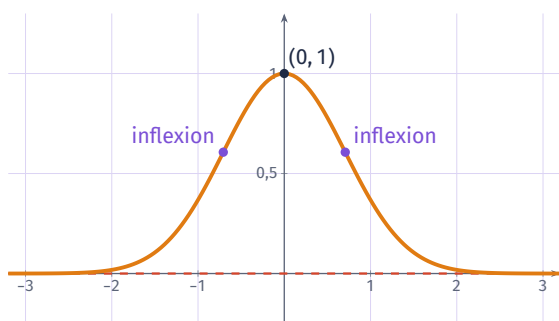
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

2^e Bac PC

vignettes 25 à 30

2^e Bac PC 25 • Courbe en cloche

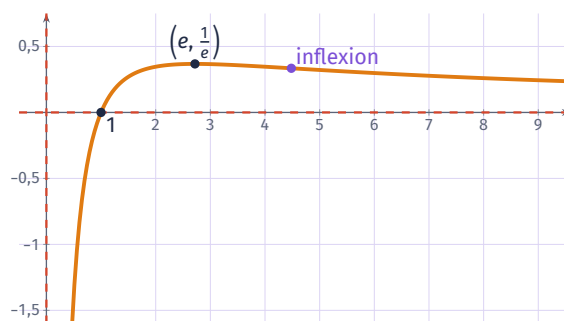
$$x \mapsto e^{-x^2}$$



- $D = \mathbb{R}$, paire ; $f'(x) = -2xe^{-x^2}$: max 1 en 0.
- $0 < f(x) \leq 1$; $e^{-x^2} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: asymptote $y = 0$.
- $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$: inflexions $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$.

2^e Bac PC 26 • Quotient $\frac{\ln x}{x}$

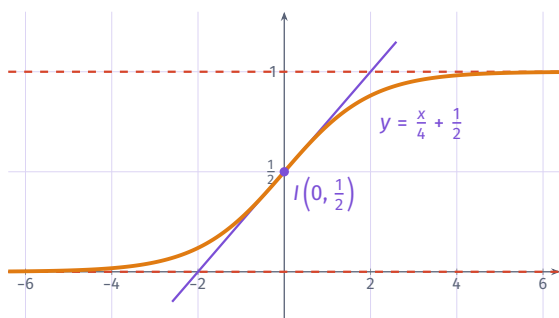
$$x \mapsto \frac{\ln x}{x}$$



- $D =]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$: max $\frac{1}{e}$ en e ; racine 1.
- $f \rightarrow -\infty$ en 0^+ : asymptote $x = 0$; $f \rightarrow 0$ en $+\infty$: asymptote $y = 0$.
- $f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$: inflexion en $x = e^{\frac{3}{2}}$.

2^e Bac PC 27 • Sigmoide

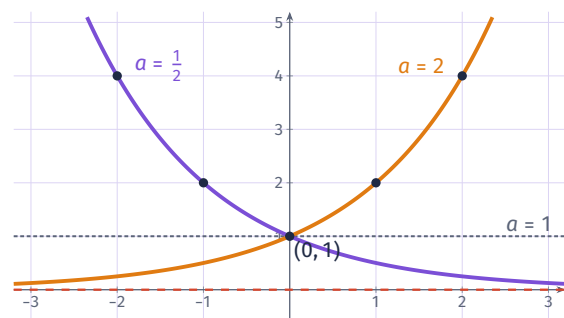
$$x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$$



- $D = \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$: croissante ; $0 < f(x) < 1$.
- Asymptotes $y = 0$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$.
- $f(-x) + f(x) = 1$: $I(0, \frac{1}{2})$ centre et inflexion, tangente $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$.

2^e Bac PC 28 • Exponentielles de base a

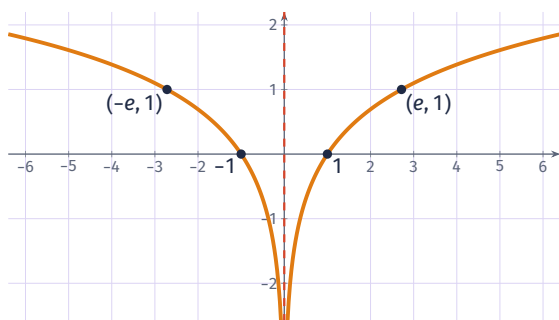
$$x \mapsto a^x$$



- $a^x = e^{x \ln a}$ ($a > 0$) ; $(a^x)' = a^x \ln a$; passe par $(0, 1)$.
- $a > 1$: croissante, $a^x \rightarrow 0$ en $-\infty$; $0 < a < 1$: décroissante, $a^x \rightarrow 0$ en $+\infty$.
- $(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$: courbes symétriques par rapport à (Oy) .

2^e Bac PC 29 • Logarithme de $|x|$

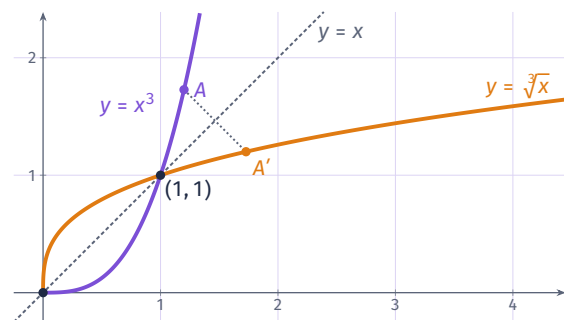
$$x \mapsto \ln |x|$$



- $D = \mathbb{R}^*$, paire ; $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$; racines ± 1 .
- Décroissante sur $] -\infty, 0[$, croissante sur $] 0, +\infty[$.
- $\ln |x| \rightarrow -\infty$ en 0 : asymptote $x = 0$; branches paraboliques de direction (Ox) .

2^e Bac PC 30 • Réciproques

$$x^3 \text{ et } \sqrt[3]{x}$$



- Réciproque de $x \mapsto x^3$ sur $[0, +\infty[$: $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.
- Symétrie par rapport à $y = x$: $A(a, b) \leftrightarrow A'(b, a)$.
- $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ si $x > 0$; demi-tangente verticale en O .

3

Le formulaire du livret

Limites usuelles ($n \in \mathbb{N}^*$)

En $+\infty$: x^n et $\sqrt[n]{x} \rightarrow +\infty$; $\frac{1}{x^n}$ et $\frac{1}{\sqrt[n]{x}} \rightarrow 0$. En $-\infty$: $x^n \rightarrow +\infty$ (n pair) ou $-\infty$ (n impair).

En 0^+ : $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$; en 0^- : $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$.

Polynôme, fraction rationnelle en $\pm\infty$: limite du **quotient des termes de plus haut degré**.

En 0 : $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, $\frac{\tan x}{x} \rightarrow 1$, $\frac{1-\cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Opérations sur les limites (ℓ, ℓ' réels)

Somme : $\ell + (\pm\infty) = \pm\infty$; $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(+\infty) + (-\infty)$: **F.I.**

Produit (règle des signes) : $\ell \times \infty = \infty$ si $\ell \neq 0$; $\infty \times \infty = \infty$; $0 \times \infty$: **F.I.**

Quotient : $\frac{\ell}{\infty} = 0$; $\frac{\ell}{0^\pm} = \infty$ si $\ell \neq 0$; $\frac{\infty}{\ell} = \infty$; $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$: **F.I.**

Composée : $u(x) \rightarrow b$ et $v(x) \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow b \Rightarrow v(u(x)) \rightarrow \ell$.

Comparaison : $u \leq f \leq v$ et $u, v \rightarrow \ell \Rightarrow f \rightarrow \ell$; $f \geq u$ et $u \rightarrow +\infty \Rightarrow f \rightarrow +\infty$; $|f - \ell| \leq v$ et $v \rightarrow 0 \Rightarrow f \rightarrow \ell$.

Formes indéterminées : les réflexes

Les quatre formes : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

Réflexes : factoriser par le terme dominant ; quantité conjuguée ; simplifier par $(x - a)$; reconnaître un nombre dérivé $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \rightarrow f'(a)$; changer de variable ($X = x - a$, $\frac{1}{x}$, $\ln x$...) ; croissances comparées.

Dérivées usuelles

k (constante)	0	$\sin x$	$\cos x$
x^n ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$n x^{n-1}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
x^r ($r \in \mathbb{Q}$)	$r x^{r-1}$	e^x	e^x
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; pour $x > 0$: $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$.			

Symétries et transformations

Pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et : axe $x = a$: $f(2a - x) = f(x)$; centre $\Omega(a, b)$: $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Paire : axe (Oy) ; impaire : centre O ; T-périodique : étude sur une période.

$y = f(x - a) + b$: translatée de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$; $|f|$: on replie la partie sous (Ox) ; $f(|x|)$: partie $x \geq 0$ et sa symétrique par rapport à (Oy).

Règles de dérivation

$$(u + v)' = u' + v' \quad (ku)' = ku' \quad (uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u' u^{n-1} \quad (\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{2\sqrt[n]{u}} \quad (u > 0)$$

$$(v \cdot u)' = u' \times v' \cdot u \quad (f(ax + b))' = a f'(ax + b)$$

$$(\ln u)' = (\ln |u|)' = \frac{u'}{u} \quad (e^u)' = u' e^u$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \text{ si } f'(f^{-1}(y)) \neq 0.$$

Tangente, variations, extremums

Tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$; $f(a+h) \approx f(a) + h f'(a)$.

Demi-tangentes : limites de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ à droite et à gauche (différentes : point anguleux ; infinies : demi-tangente verticale).

$f' > 0$ sur I (sauf en des points isolés) : f strictement croissante ; $f' < 0$: décroissante ; $f' = 0$: constante.

Extremum en a intérieur à I : f' s'annule en a en **changeant de signe**.

Branches infinies

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	asymptote verticale $x = a$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$	asymptote horizontale $y = b$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$: on calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\frac{f(x)}{x} \rightarrow \pm\infty$: branche parabolique de direction (Oy)

$\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$: branche parabolique de direction (Ox)

$\frac{f(x)}{x} \rightarrow a \neq 0$ et $f(x) - ax \rightarrow b$: asymptote oblique $y = ax + b$

$\frac{f(x)}{x} \rightarrow a \neq 0$ et $f(x) - ax \rightarrow \pm\infty$: branche parabolique de direction $y = ax$

Position de C_f et de (D) : $y = ax + b$: signe de $f(x) - (ax + b)$. Si $f(x) = ax + b + g(x)$ avec $g \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: (D) est asymptote.

Concavité, inflexion

$f'' \geq 0$ sur I : C_f **convexe** (au-dessus de ses tangentes) ; $f'' \leq 0$: **concave** (au-dessous).

Point d'inflexion en a : f'' s'annule en a en changeant de signe (ou f' admet un extremum en a) ; la tangente y **traverse** la courbe.

Logarithme népérien

$\ln$: dérivable sur $]0, +\infty[$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, strictement croissante.

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

$$\ln(a^r) = r \ln a \quad (r \in \mathbb{Q}) \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a \quad (a, b > 0)$$

$$\ln a = \ln b \iff a = b \quad \ln a < \ln b \iff a < b$$

$$\ln x > 0 \iff x > 1$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1); \log x = \log_{10} x.$$

$$\text{Limites : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Inégalité : $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$ (égalité en 1).

Exponentielle népérienne

$$e^x > 0; e^x = y \iff x = \ln y \quad (y > 0); \ln(e^x) = x, e^{\ln y} = y.$$

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad (e^a)^r = e^{ra}$$

$$e^a = e^b \iff a = b \quad e^a < e^b \iff a < b$$

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$$

$(e^x)' = e^x$; courbes de $\exp$ et $\ln$ symétriques par rapport à $y = x$.

$$\text{Limites : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Inégalité : $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x (égalité en 0).

Croissances comparées ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

En $+\infty$: $\ln x \ll x^n \ll e^x$ (le plus fort impose sa limite).

Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

I stable par f et $u_0 \in I$: $u_n \in I$ pour tout n ; f croissante sur I : (u_n) monotone; monotone et bornée : convergente; f continue et I fermé : la limite $\ell \in I$ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Valeurs à connaître

$$\begin{array}{lll} e \approx 2,718 & \frac{1}{e} \approx 0,368 & e^2 \approx 7,389 \\ \sqrt{e} \approx 1,649 & \ln 2 \approx 0,693 & \ln 3 \approx 1,099 \\ \ln 5 \approx 1,609 & \ln 10 \approx 2,303 & \pi \approx 3,1416 \\ \sqrt{2} \approx 1,414 & \sqrt{3} \approx 1,732 & \sqrt{5} \approx 2,236 \end{array}$$

Continuité, TVI, réciproque

f continue en a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle; celle de $[a, b]$ est un segment $[m, M]$.

TVI : f continue sur $[a, b]$ et k compris entre $f(a)$ et $f(b)$: l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans $[a, b]$; **une seule** si f est strictement monotone. $f(a)f(b) < 0$: une racine dans $]a, b[$; encadrement par dichotomie.

Images : f continue strictement croissante : $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$, $f(]a, b[) =]\lim_a f, \lim_b f[$.

Réciproque : f continue, strictement monotone sur I : bijection de I sur $J = f(I)$; f^{-1} est continue, de même sens de variation, et $C_{f^{-1}}$ est la symétrique de C_f par rapport à $y = x$. $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$ ($x \in I, y \in J$).

Racine n -ième : réciproque de $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$: $\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x$ ($x, y \geq 0$).

Plan d'étude d'une fonction

- 1. Domaine** ; parité, périodicité (réduire l'étude).
- 2. Limites** aux bornes de D_f .
- 3. Continuité, dérivabilité** aux points délicats.
- 4. Dérivée** et son signe (fonction auxiliaire).
- 5. Tableau de variations** complet.
- 6. Branches infinies** et positions relatives.
- 7. Dérivée seconde** : concavité, inflexions.
- 8. Points utiles** : axes, tangentes remarquables.
- 9. Tracé** : asymptotes, points, tangentes, courbe.

Les réflexes des 20 fiches

- Valeurs d'une fraction : $\Delta(y) \geq 0$ (fiche 2).
- Paramètre : isoler m , $g(x) = m$ (fiche 7).
- Cubique : $P(\alpha)P(\beta) < 0$ (fiche 8).
- Tangente issue de P : inconnue a (fiche 11).
- a^b ou b^a : étudier $\frac{\ln x}{x}$ (fiche 14).
- Signe illisible : g auxiliaire, $g(\alpha) = 0$ (fiche 15).
- Distance : étudier d^2 (fiche 19).

Bon courage ! La régularité bat le talent. Maths Olympiad

4

Mon bilan**Les exercices des parties 1, 2, 3 et 6**

Partie	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Tronc commun Partie 1 · Les bases	1 à 16	/ 16	
1^{re} Bac Partie 2 · Limites et dérivées	17 à 36	/ 20	
2^e Bac PC Partie 3 · L'étude complète	37 à 60	/ 24	
2^e Bac PC Partie 6 · Grands problèmes	61 à 66	/ 6	

Partie 5 · Questions de concours

Série	Questions	Score	2 ^e essai
Série 1 · Généralités et courbes	1 à 10	/ 40	/ 40
Série 2 · Transformations	11 à 20	/ 40	/ 40
Série 3 · Limites et asymptotes	21 à 30	/ 40	/ 40
Série 4 · Dérivées et variations	31 à 40	/ 40	/ 40
Série 5 · Fonctions ln et exp	41 à 50	/ 40	/ 40
Série 6 · Défis de concours	51 à 60	/ 40	/ 40

Conseil : refais dans une semaine les exercices et les questions ratés, sans regarder le corrigé.

Et maintenant : **les sujets d'examen et de concours**

Maths Olympiad