

Livret spécial

Graphiques de fonctions

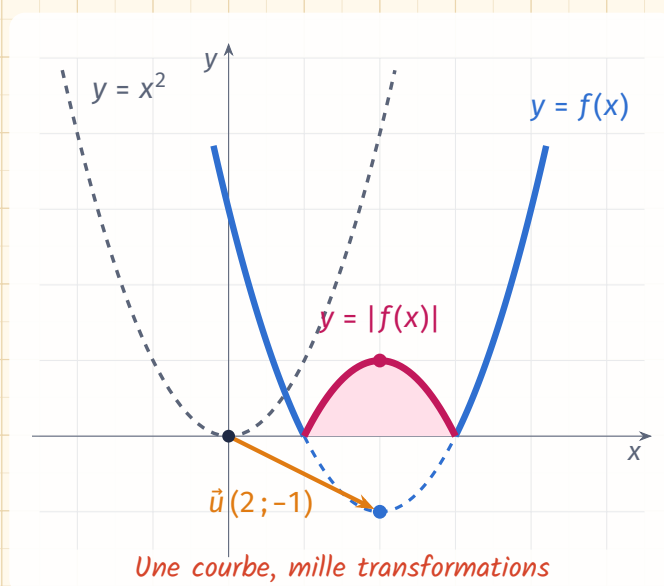
Méthodes, astuces et pièges : de la base au concours

La règle d'or

$y = f(x - a) + b$:
la courbe de f translatée
du vecteur $\vec{u}(a; b)$

Défi de concours

Combien de solutions
à l'équation $\sin x = \frac{x}{8}$?



★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours illustré

20 fiches méthodes

126 exercices corrigés

Galerie des pièges

Sommaire

Par où commencer ? tests de niveau

1	Par où commencer ?	4
2	Test 1 · Tronc commun	4
3	Test 2 · 1 ^{re} Bac	5
4	Test 3 · 2 ^e Bac	6
5	Corrigés des tests	7

Partie 1 · Lire et transformer tronc commun

1	Lire une courbe	9
2	Les courbes de référence	10
3	Symétries d'une courbe	14
4	Transformer une courbe	15
5	Valeur absolue et courbes	17
6	Résoudre graphiquement	19
7	L'essentiel de la partie 1	21
8	Exercices de la partie 1	22
9	Corrigés de la partie 1	28

Partie 2 · Analyser une courbe 1^{re} Bac

1	Limites lues sur une courbe	36
2	Continuité et partie entière	37
3	Tangentes et nombre dérivé	39
4	Courbe de f et courbe de f'	41
5	Symétries et périodicité	43
6	Courbes construites à partir de f	45
7	L'essentiel de la partie 2	48
8	Exercices de la partie 2	49
9	Corrigés de la partie 2	56

Partie 3 · Les courbes du Bac 2^e Bac

1	Branches infinies	66
2	Convexité et inflexion	67
3	Continuité, bijection, réciproque	69
4	Les courbes de $\ln$ et $\exp$	71
5	Suites récurrentes en images	72
6	Aires et courbes	74
7	L'essentiel de la partie 3	77
8	Exercices de la partie 3	78
9	Corrigés de la partie 3	86

Partie 4 · Méthodes, astuces, pièges 20 fiches

1	La chaîne de transformations	97
2	Lire l'expression sur la courbe	98
3	$ f(x) $, $f(x)$ et $f(f(x))$	99
4	Lignes brisées et valeurs absolues	100
5	Max et min de deux fonctions	101
6	Compter avec une droite mobile	102
7	Équations « impossibles »	103
8	Partie entière : marches et scies	104
9	La courbe de $1/f$	105
10	Les courbes de f^2 , $\sqrt{f}$ et f^3	106
11	Reconnaître f , f' et f''	107
12	Centres et axes cachés	108
13	Périodicité : $ \sin $ et compagnie	109
14	Courbes « implicites »	110
15	Asymptotes : position express	111
16	Branches paraboliques	112
17	Convexité : tangentes et cordes	113
18	La courbe de la réciproque	114
19	Suites : escalier et escargot	115
20	Lire une aire sur un graphique	116

Partie 5 · Questions de concours 60 QCM

1	Série 1 · Lire une courbe	117
2	Série 2 · Transformations	119
3	Série 3 · $ x $ et partie entière	120
4	Série 4 · Asymptotes et tangentes	122
5	Série 5 · Dérivées et réciproque	124
6	Série 6 · $\ln$, $\exp$ et défis	126
7	Grille des réponses	128
8	Corrigés des questions	129

Partie 6 · Grands problèmes 6 problèmes

1	Lire, tracer, discuter	138
2	Exponentielle et logarithme	140
3	Corrigés des grands problèmes	143

Galleries, formulaire et bilan

1	La galerie des transformations	152
2	La galerie des pièges	155
3	Le formulaire des graphiques	158
4	Mon bilan	160

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau des devoirs et de l'examen.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

■ **Définition** : à savoir par cœur.

■ **Propriété / Théorème** : les outils.

■ **Méthode** : la démarche pas à pas.

■ **Exemple** : un calcul entièrement rédigé.

■ **Piège** : l'erreur classique à éviter.

■ **Astuce de concours** ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Le livret contient 6 parties : la partie 1 (tronc commun), la partie 2 (1^{re} Bac) et la partie 3 (2^e Bac) donnent chacune un cours illustré, des exercices sur 4 niveaux et leurs corrigés ; la partie 4 rassemble 20 fiches « méthode, astuce, piège » ; la partie 5 propose 60 questions de concours à choix multiples, souvent graphiques ; la partie 6 réunit de grands problèmes de synthèse. **Parcours conseillé** : en tronc commun, partie 1 puis les fiches marquées TC ; en 1^{re} Bac, parties 1 et 2 ; en 2^e Bac, tout le livret. Les onglets colorés sur le bord droit des pages indiquent la partie.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé.

La carte du livret

Tests

Par où commencer ?

3 tests de 10 questions, barème et orientation. p. 4

Partie 1 · TC

Lire et transformer

Cours illustré, exercices 1 à 18. p. 9

Partie 2 · 1^{re} Bac

Analyser une courbe

Cours illustré, exercices 19 à 38. p. 36

Partie 3 · 2^e Bac

Les courbes du Bac

Cours illustré, exercices 39 à 60. p. 66

Partie 4 · Fiches

Méthodes, astuces et pièges

20 fiches d'une page, avec « À toi ! ». p. 97

Partie 5 · QCM

Questions de concours

60 QCM en 6 séries, grille et barème. p. 117

Partie 6 · Problèmes

Grands problèmes

6 grands problèmes (exercices 61 à 66). p. 138

Annexes

Galeries et formulaire

Transformations, pièges, formulaire et bilan. p. 152

Trois parcours selon ta classe

Tronc commun test 1 → partie 1 → fiches 1 à 6 → séries de QCM 1 et 2 → problème 61.

1^{re} Bac test 2 → révision rapide de la partie 1 → partie 2 → fiches 6 à 15 → séries 3 et 4 → problèmes 62 et 63.

2^e Bac test 3 → partie 3 → fiches 7, 11 et 16 à 20 → séries 5 et 6 → problèmes 64 à 66 → galeries et formulaire avant l'examen.

1 Par où commencer ?

Pour savoir par où commencer, passe le **test de niveau** de ta classe : **10 questions** posées presque toutes sur une figure, à traiter en **15 minutes**.

1 • Choisis ton test

Tronc commun : test 1

1^{re} Bac : tests 1 et 2

2^e Bac : les trois tests

2 • Lis la figure

Réponses courtes ; un

Vrai ou faux ? se justifie en une ligne.

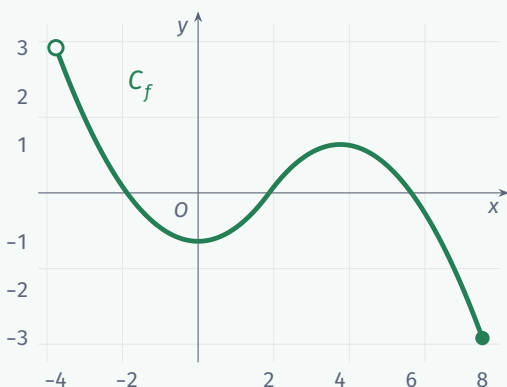
3 • Corrige-toi

Corrigés et orientation page 7.

2 Test 1 • Tronc commun

Tronc commun 15 minutes • sans calculatrice ni cours • 1 point par question • un carreau = une unité

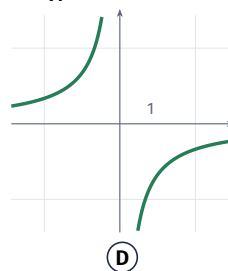
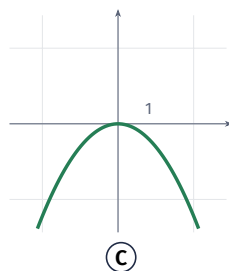
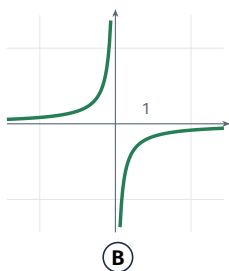
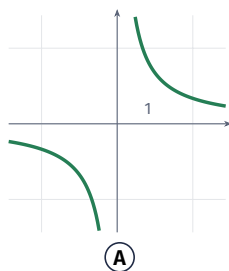
Lecture graphique • questions 1 à 7



Courbe C_f d'une fonction f : le disque plein est un point de C_f , le cercle vide n'en est pas un.

- 1 Lire l'ensemble de définition D_f .
- 2 Lire $f(0)$ et $f(4)$.
- 3 Lire tous les antécédents de 0 par f .
- 4 Donner le sens de variation de f sur D_f .
- 5 **Vrai ou faux ?** « Le minimum de f sur D_f est -1 . »
- 6 Pour quels réels m l'équation $f(x) = m$ a-t-elle une seule solution ?
- 7 Combien de solutions a l'équation $|f(x)| = 2$?

8 Courbe de référence QCM Laquelle de ces courbes représente la fonction $x \mapsto -\frac{2}{x}$?



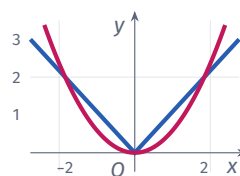
9 Transformation

On pose $g(x) = f(-x) + 2$, où f est la fonction de la figure ci-dessus. Quel est le minimum de g , et en quel réel est-il atteint ?

Indice : suis le point de C_f où f atteint son minimum.

10 Inéquation

En bleu, $C_f : y = |x|$; en rose, $C_g : y = \frac{x^2}{2}$. Résoudre graphiquement $g(x) < f(x)$.



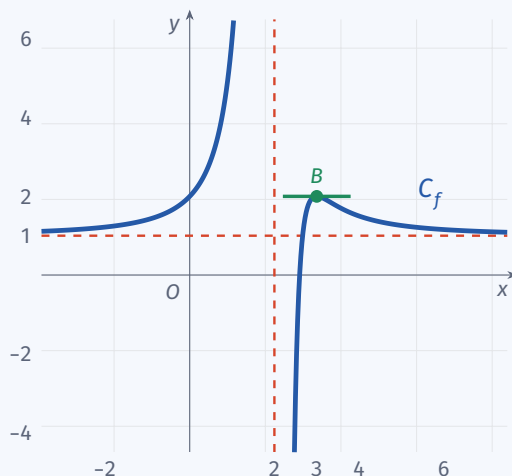
Temps écoulé ? Pose le crayon et corrige-toi page 7.

Mon score : ____ / 10

3

Test 2 · 1^{re} Bac1^{re} Bac 15 minutes · sans calculatrice ni cours · 1 point par question · un carreau = une unité

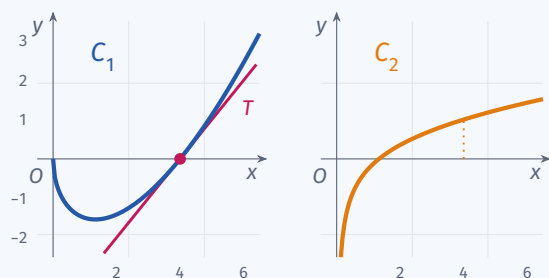
Limites et tangentes · questions 1 à 4



Ci-contre, la courbe C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, ses deux asymptotes (en pointillés rouges) et sa tangente horizontale au point B (en vert).

- 1 Lire $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.
- 2 Lire les équations des deux asymptotes de C_f .
- 3 Lire $f(3)$ et $f'(3)$, puis donner le signe de $f'(4)$.
- 4 **Vrai ou faux ?** « La courbe de $g = \frac{1}{f}$ a pour asymptote la droite d'équation $x = 2$. »

f et f' · questions 5 et 6



L'une des courbes est celle d'une fonction f définie sur $[0; +\infty[$, l'autre celle de sa dérivée f' . La droite T est tangente à C_1 au point $(4; 0)$.

- 5 Lire la pente de la tangente T .
- 6 Laquelle des deux courbes est celle de f' ? Justifier.

Période · questions 9 et 10

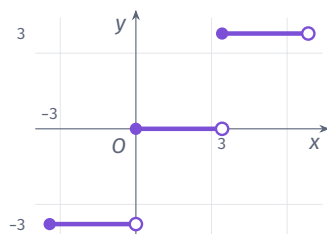


La courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et *périodique* : le motif se répète indéfiniment.

- 9 Lire la plus petite période T de f , puis calculer $f(2027)$.
- 10 Calculer $f'(9,5)$.

7 Partie entière

QCM Cet escalier est la courbe de la fonction $x \mapsto$:



- (A) $E(\frac{x}{3})$ (B) $3E(x)$ (C) $3E(\frac{x}{3})$ (D) $\frac{1}{3}E(3x)$

8 Centre de symétrie

QCM La courbe de la fonction $f(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 5$ admet un centre de symétrie Ω . Lequel ?

- (A) $\Omega(-2; 1)$ (B) $\Omega(0; 5)$
(C) $\Omega(-1; 0)$ (D) $\Omega(2; 1)$

Indice : pour une fonction polynôme de degré 3, c'est le point où f'' s'annule.

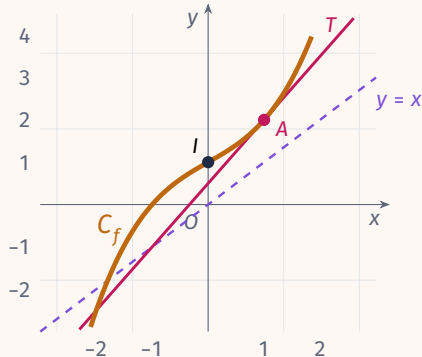
Temps écoulé ? Pose le crayon et corrige-toi page 7.

Mon score : ____ / 10

4

Test 3 · 2^e Bac2^e Bac 15 minutes · sans calculatrice ni cours · 1 point par question · un carreau = une unité

Convexité et réciproque · questions 1 à 4

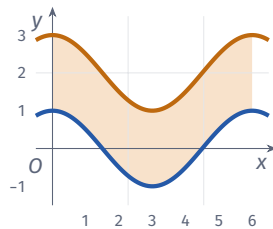


Ci-contre, la courbe C_f d'une fonction f dérivable et strictement croissante, qui réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. La droite T est tangente à C_f en $A(1; 2)$; elle passe par le point $(-1; -1)$.

- 1 Sur quel intervalle C_f est-elle convexe ?
- 2 Lire les coordonnées du point d'inflexion I de C_f .
- 3 Lire $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(2)$.
- 4 Calculer $(f^{-1})'(2)$.

5 Aire lue

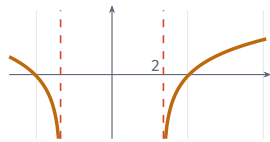
Les deux courbes ont pour équations $y = u(x)$ (en haut) et $y = v(x)$ (en bas). Donner l'aire du domaine colorié, entre les droites $x = 0$ et $x = 6$.



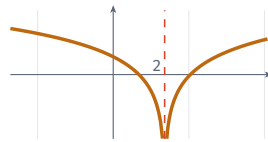
6 Branche parabolique

QCM En $+\infty$, la courbe de la fonction $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ admet :

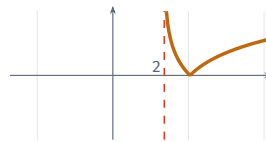
- (A) une asymptote horizontale
- (B) une branche parabolique de direction (Oy)
- (C) une branche parabolique de direction (Ox)
- (D) une branche parabolique de direction $y = x$

7 Logarithme transformé QCM Laquelle de ces courbes représente la fonction $x \mapsto \ln |x - 2|$?

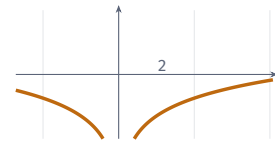
(A)



(B)



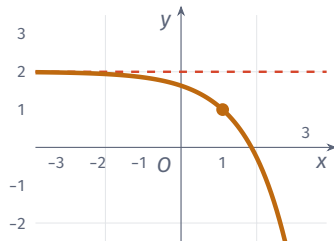
(C)



(D)

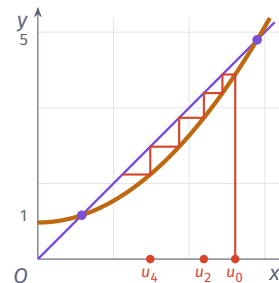
8 Exponentielle transformée

C'est la courbe de la fonction $x \mapsto a - e^{x+b}$; la droite en pointillés est son asymptote. Trouver a et b .



Suite récurrente · questions 9 et 10

$u_0 = 4,5$ et $u_{n+1} = g(u_n)$. On voit la courbe de g , la droite $y = x$ (qui la coupe en $(1; 1)$ et $(5; 5)$) et l'escalier des premiers termes.



- 9 Quel est le sens de variation de (u_n) ?
- 10 Vrai ou faux ? « (u_n) converge vers 5. »

Temps écoulé ? Pose le crayon et corrige-toi page 8.

Mon score : ____ / 10

5

Corrigés des tests

Test 1 · Tronc commun

- 1 $D_f =]-4; 8]$: cercle vide en $(-4; 3)$, disque plein en $(8; -3)$.
- 2 $f(0) = -1$ et $f(4) = 1$
- 3 $-2, 2$ et 6 : C_f coupe l'axe des abscisses en trois points.
- 4 décroissante sur $]-4; 0]$, croissante sur $[0; 4]$, décroissante sur $[4; 8]$
- 5 Faux : -1 n'est qu'un minimum local (en 0) ; le minimum est $f(8) = -3$.
- 6 $m \in [-3; -1[\cup]1; 3[$: la droite $y = m$ coupe C_f une seule fois ; pour $m = 3$, aucune solution (point exclu).
- 7 2 solutions : $|f(x)| = 2 \iff f(x) = 2$ ou $f(x) = -2$: une solution chacune (la partie sous l'axe se replie vers le haut).
- 8 D : hyperbole dans les quadrants 2 et 4, passant par $(1; -2)$ et $(-1; 2)$.
- 9 minimum -1 , atteint en -8 : symétrie par rapport à (Oy) puis translation de $+2$: $(8; -3) \mapsto (-8; -1)$.
- 10 $]-2; 0[\cup]0; 2[$: C_g est sous C_f entre $(-2; 2)$ et $(2; 2)$, mais elles se touchent en O .

Barème : 1 point par question, total sur 10 ; $\frac{1}{2}$ point si une seule des valeurs demandées est juste ; un « Vrai ou faux ? » non justifié vaut 0.

Si tu as raté la question k → relis, dans la partie 1 :

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| Q1 à Q5 → « Lire une courbe » | Q7 → « Valeur absolue et courbes » |
| Q6, Q10 → « Résoudre graphiquement » | Q8 → « Les courbes de référence » |
| Q9 → « Transformer une courbe » | |

Test 2 · 1^{re} Bac

- 1 $+\infty$ et $-\infty$: la courbe longe la droite $x = 2$ vers le haut à gauche, vers le bas à droite.
- 2 $x = 2$ et $y = 1$: car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$.
- 3 $f(3) = 2$, $f'(3) = 0$, $f'(4) < 0$: tangente horizontale en B ; f décroît sur $[3; +\infty[$.
- 4 Faux : $|f| \rightarrow +\infty$ donc $g \rightarrow 0$ en 2 ; la seule asymptote verticale de C_g est en l'unique zéro de f (entre 2 et 3).
- 5 1 : T passe par $(4; 0)$ et par $(5; 1)$.
- 6 C_2 : elle s'annule à l'abscisse du minimum de C_1 , vaut 1 en 4 (pente de T) et tend vers $-\infty$ en 0 (tangente verticale de C_1 en O).
- 7 $C : x \mapsto 3E(\frac{x}{3})$: marches de largeur 3 et de hauteur 3 : l'escalier de E agrandi 3 fois.
- 8 $A : \Omega(-2; 1) : f''(x) = 6x + 12$ s'annule en -2 , et $f(-4 - x) + f(x) = 2$.
- 9 $T = 3$; $f(2027) = 1$: $2027 = 3 \times 675 + 2$, donc $f(2027) = f(2) = 1$.
- 10 $f'(9,5) = 2$: f' est aussi 3-périodique : $f'(9,5) = f'(0,5)$, pente du segment de $(0; 0)$ à $(1; 2)$.

Barème : 1 point par question, total sur 10 ; $\frac{1}{2}$ point si une seule des valeurs demandées est juste ; un « Vrai ou faux ? » non justifié vaut 0.

Si tu as raté la question k → relis, dans la partie 2 :

- | | |
|--|--|
| Q1, Q2 → « Limites lues sur une courbe » | Q6 → « Courbe de f et courbe de f' » |
| Q3, Q5 → « Tangentes et nombre dérivé » | Q7 → « Continuité et partie entière » |
| Q4 → « Courbes construites à partir de f » | Q8 à Q10 → « Symétries et périodicité » |

Test 3 · 2^e Bac

- 1 $[0; +\infty[$: à droite de I , la courbe est au-dessus de ses tangentes ; elle est concave sur $] -\infty; 0]$.
- 2 $I(0; 1)$: la courbe y change de concavité.
- 3 $f^{-1}(0) = -1$ et $f^{-1}(2) = 1$: on lit les antécédents de 0 et de 2.
- 4 $\frac{2}{3} : (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)}$ et $f'(1) = \frac{3}{2}$ est la pente de T .
- 5 12 u.a. : l'écart vertical $u(x) - v(x)$ vaut 2 partout : $\int_0^6 (u(x) - v(x)) dx = 2 \times 6$.
- 6 C : $f(x) \rightarrow +\infty$ mais $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$: branche parabolique de direction (Ox) .
- 7 B : définie pour $x \neq 2$, symétrique par rapport à la droite $x = 2$, nulle en 1 et en 3 (A : $\ln(|x| - 2)$, C : $|\ln(x - 2)|$).
- 8 $a = 2$ et $b = -1$: asymptote $y = a$ en $-\infty$; puis $2 - e^{1+b} = 1$ donne $b = -1$.
- 9 décroissante : entre 1 et 5, la courbe de g est sous la droite $y = x : u_{n+1} = g(u_n) < u_n$.
- 10 Faux : (u_n) décroît et reste au-dessus de 1 : elle converge vers le point fixe 1.

Barème : 1 point par question, total sur 10 ; $\frac{1}{2}$ point si une seule des valeurs demandées est juste ; un « Vrai ou faux ? » non justifié vaut 0.

Si tu as raté la question $k \rightarrow$ relis, dans la partie 3 :

Q1, Q2 $\rightarrow$ « Convexité et inflexion »

Q6 $\rightarrow$ « Branches infinies »

Q3, Q4 $\rightarrow$ « Continuité, bijection, réciproque »

Q7, Q8 $\rightarrow$ « Courbes de $\ln$ et $\exp$ »

Q5 $\rightarrow$ « Aires et courbes »

Q9, Q10 $\rightarrow$ « Suites récurrentes en images »

Ton score $\rightarrow$ par où commencer

	Tronc commun Test 1	1 ^{re} Bac Test 2	2 ^e Bac Test 3
0 à 4 à reprendre	Toute la partie 1 : le cours dans l'ordre, puis les exercices de niveau 1 et 2 (1 à 10). Refais le test une semaine plus tard.	Refais d'abord le test 1. Puis toute la partie 2 : le cours, puis les exercices de niveau 1 et 2 (19 à 29).	Relis les sections signalées par le test 2, puis toute la partie 3 : le cours, puis les exercices de niveau 1 et 2 (39 à 49).
5 à 7 fragile	Les sections signalées de la partie 1, les exercices 6 à 15, puis les fiches 1 à 6 de la partie 4.	Les sections signalées de la partie 2, les exercices 24 à 34, puis les fiches 6 à 13 et 15 de la partie 4.	Les sections signalées de la partie 3, les exercices 44 à 55, puis les fiches 16 à 20 de la partie 4.
8 à 10 acquis	Les exercices 11 à 18, les questions 1 à 20 de la partie 5 et le problème 61 de la partie 6. En 1 ^{re} Bac : passe au test 2.	Les exercices 35 à 38, les questions 21 à 40 de la partie 5, les problèmes 62 et 63 de la partie 6. En 2 ^e Bac : passe au test 3.	Niveau concours : les exercices 56 à 60, les questions 41 à 60 de la partie 5, les problèmes 64 à 66 de la partie 6.

Les fiches qui prolongent les tests : test 1 $\rightarrow$ « La chaîne de transformations » (1), « $|f(x)|$, $f(|x|)$ et $|f(|x|)|$ » (3), « Compter avec une droite mobile » (6) ; test 2 $\rightarrow$ « Partie entière : marches et scies » (8), « La courbe de $1/f$ » (9), « Reconnaître f , f' et f'' » (11), « Centres et axes cachés » (12) ; test 3 $\rightarrow$ « Branches paraboliques » (16), « La courbe de la réciproque » (18), « Suites : escalier et escargot » (19), « Lire une aire sur un graphique » (20).

Et ensuite ? Les annexes réunissent la galerie des transformations, la galerie des pièges et le formulaire des graphiques : garde-les sous la main pendant tout le livret.

Partie 1 · Lire et transformer

Tronc commun : lire une courbe, courbes de référence, symétries, transformations, résolution graphique

Tronc commun **Objectif** : tout **lire** sur une courbe, reconnaître les courbes de référence, les **transformer** et s'en servir pour **résoudre** des équations et des inéquations presque sans calcul. **Fil rouge** : trois courbes reviennent d'une section à l'autre : la courbe C_f de la section 1, la parabole P et l'hyperbole H de la section 2.

1

Lire une courbe

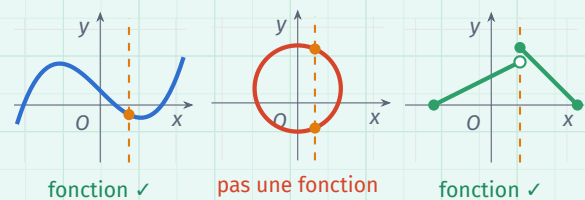
Définition : courbe, point plein, point creux

La **courbe** C_f de f est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ avec $x \in D_f$:

$$M(x; y) \in C_f \iff x \in D_f \text{ et } y = f(x).$$

Un **point plein** • appartient à la courbe ; un **point creux** ○ n'y appartient **pas**.

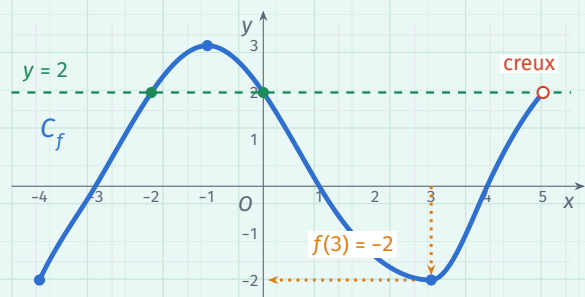
Test de la droite verticale : une courbe représente une fonction $\iff$ **toute droite verticale** la coupe **au plus une fois** (un réel a au plus une image) ; les points creux ne comptent pas.



à gauche, la droite verticale coupe une fois ; au milieu, deux fois (cercle) ; à droite, le point creux $(1; \frac{3}{2})$ est exclu : 1 a une seule image, 2.

Méthode : tout lire sur une courbe

D_f : l'« ombre » de la courbe sur (Ox) ;
extrémité pleine : crochet fermé, creuse : crochet ouvert. **Image de a** : de a sur (Ox) , on va **verticalement** jusqu'à la courbe et on lit l'**ordonnée**. **Antécédents de b** : on trace la droite **horizontale** $y = b$, on lit les **abscisses** des points communs. **Signe** : $f(x) > 0$ là où la courbe est **au-dessus** de (Ox) . **Variations** : de gauche à droite, la courbe monte : f croissante. **Extremums** : le point le plus haut, le plus bas, **s'il est plein**.



la courbe fil rouge C_f ; les points marqués ont des coordonnées entières

Exemple : lecture complète de C_f

- $D_f = [-4, 5[$: point plein en -4 , point creux en 5 : $f(5)$ n'existe pas.
- **Images** : $f(-4) = -2$, $f(-1) = 3$, $f(0) = 2$, $f(3) = -2$.
- **Antécédents** : de 0 : $-3, 1, 4$; de 2 : -2 et 0 **seulement** ; de 3 : -1 ; de 4 : aucun.
- **Variations** : croissante sur $[-4, -1]$, décroissante sur $[-1, 3]$, croissante sur $[3, 5[$.
- **Extremums** : maximum 3 en -1 ; minimum -2 , atteint **deux fois** (en -4 et en 3). Valeurs prises : $f(D_f) = [-2, 3]$.

x	-4	-3	-1	1	3	4	5
f			3				2
signe	-	0	+	0	-	0	+

trait rouge : 5 est exclu ; la valeur 2 n'est pas atteinte en 5

Attention, piège ! le point creux

« 2 a trois antécédents : $-2, 0$ et 5 » est **faux** : le point $(5; 2)$ est creux. Sur $[3, 5[$, f n'a **pas de maximum** : elle s'approche de 2 sans l'atteindre. Un tableau de variations ne fixe pas la courbe : seuls les « sommets » sont imposés.

★ Astuce de concours : deux ombres

D_f est l'ombre de la courbe sur (Ox) , $f(D_f)$ son ombre sur (Oy) : ici $[-2, 3]$, **fermé en 2** , car la valeur 2 , absente en 5 , est atteinte en -2 et en 0 . En QCM, on vérifie toujours les **extrémités**.

2

Les courbes de référence

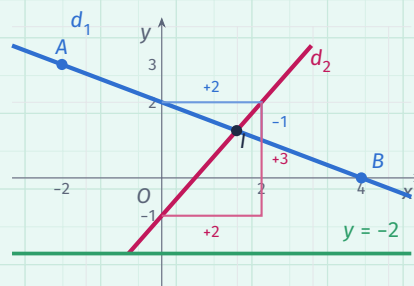
2.1 Les droites

La droite $y = mx + p$

La courbe de $x \mapsto mx + p$ est une **droite non verticale** : p est l'**ordonnée à l'origine** (point $(0; p)$) et m le **coefficient directeur** :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} : \text{« on avance de } 1, \text{ on monte de } m \text{ ».}$$

$m > 0$: elle monte ; $m < 0$: elle descend ; $m = 0$: droite horizontale $y = p$. Deux droites sont **parallèles** $\iff$ même m . Une droite **verticale** $x = c$ n'est pas la courbe d'une fonction.



Exemple : lire puis calculer

d_1 passe par $A(-2;3)$ et $B(4;0)$: $m = \frac{0-3}{4-(-2)} = -\frac{1}{2}$ et elle coupe (Oy) en $(0;2)$: $d_1 : y = -\frac{1}{2}x + 2$.

d_2 coupe (Oy) en $(0;-1)$ et « 2 à droite, 3 en haut » : $m = \frac{3}{2}$, $d_2 : y = \frac{3}{2}x - 1$. Intersection : $-\frac{1}{2}x + 2 = \frac{3}{2}x - 1 \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2}$, puis $y = \frac{5}{4}$: $I(\frac{3}{2}; \frac{5}{4})$, illisible au carreau près : le calcul confirme la lecture.

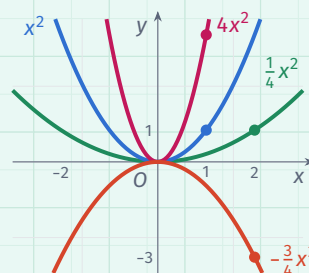
★ Astuce de concours : l'équation « segmentaire »

Une droite qui coupe les axes en $(a;0)$ et $(0;b)$, avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, a pour équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (les deux points la vérifient). Pour $d_1 : \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \iff y = 2 - \frac{x}{2}$, sans calculer de pente.
Piège : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ et non $\frac{\Delta x}{\Delta y}$: on lit d'abord le déplacement **horizontal**.

2.2 Paraboles et trinômes

La parabole $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Elle a pour sommet O et pour axe (Oy) (fonction paire) ; elle passe par $(1;a)$, $(-1;a)$ et $(2;4a)$. $a > 0$: tournée vers le haut, minimum 0 ; $a < 0$: vers le bas, maximum 0. Plus $|a|$ est **grand**, plus elle est **serrée** autour de (Oy) .



Forme canonique et parabole

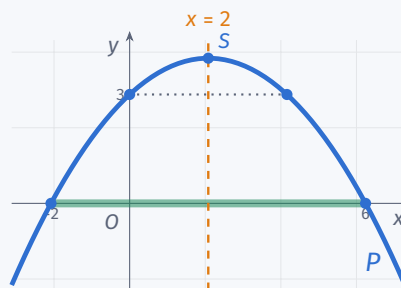
$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. La courbe est la parabole $y = ax^2$ **translatée** du vecteur $\vec{u}(\alpha; \beta)$: sommet $S(\alpha; \beta)$, axe $x = \alpha$. S'il y a deux racines x_1, x_2 , l'axe passe à mi-chemin : $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Exemple : la parabole fil rouge $P : f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$

Forme canonique : $f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 4x) + 3 = -\frac{1}{4}[(x - 2)^2 - 4] + 3 = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 4$: sommet $S(2;4)$, axe $x = 2$; $a < 0$: **maximum** 4.

Racines : $(x - 2)^2 = 16 \iff x - 2 = \pm 4 : x = -2$ ou $x = 6$, d'où $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)(x - 6)$. Contrôle : $\frac{-2+6}{2} = 2 = \alpha$ ✓.

Lecture : $f(0) = f(4) = 3$ (points symétriques par rapport à l'axe) ; $f(x) > 0 \iff x \in]-2, 6[$.



Méthode : tracer une parabole avec quatre repères

1. La forme canonique donne le **sommet** $S(\alpha; \beta)$ et l'**axe** $x = \alpha$. 2. Le point $(0; c)$ et son **symétrique** $(2\alpha; c)$ par rapport à l'axe. 3. Les **racines**, s'il y en a, symétriques elles aussi. 4. Le signe de a fixe l'ouverture. Pour $P : S(2; 4), (0; 3)$ et $(4; 3)$, racines -2 et 6 , ouverture vers le bas.

★ **Astuce de concours : lire a, b, c, Δ sur la parabole**

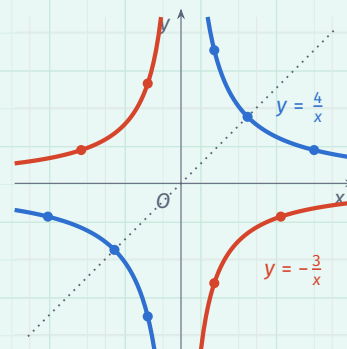
a : tournée vers le haut ou le bas.
 $c = f(0)$: où elle coupe (Oy) . Δ : nombre de points sur (Ox) $(2, 1, 0)$. $b : \alpha = -\frac{b}{2a}$, donc b a le signe de a si le sommet est à gauche de (Oy) , le signe contraire s'il est à droite. Pour $P : a < 0, c = 3 > 0$, sommet à droite donc $b > 0, \Delta = 4 > 0$ ✓.

Attention, piège ! le sommet

Le sommet est en $x = -\frac{b}{2a}$, pas en $x = \frac{b}{2a}$: pour $P, -\frac{1}{2 \times (-1/4)} = 2$. Et l'ordonnée du sommet n'est pas c : c'est $f(\alpha) = 4$, alors que $c = 3$. Enfin, le maximum d'un trinôme sur un **intervalle** n'est atteint au sommet que si α est dans l'intervalle.

2.3 Hyperboles et fonctions homographiques**L'hyperbole $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)**

Définie sur $\mathbb{R}^*$, impaire : deux **branches** symétriques par rapport à O , qui ne coupent jamais les axes.
 $a > 0$: branches dans les quadrants 1 et 3, fonction décroissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$; $a < 0$: quadrants 2 et 4, croissante sur chacun. Elle est aussi symétrique par rapport aux droites $y = x$ et $y = -x$: $(u; v), (v; u)$ et $(-v; -u)$ sont sur la courbe en même temps (car $uv = a$).

**Fonction homographique $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0, ad - bc \neq 0$**

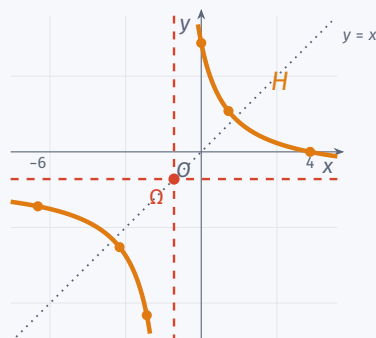
On écrit $f(x) = \alpha + \frac{k}{x - \beta}$ ($\beta = -\frac{d}{c}$ est la valeur interdite, $\alpha = \frac{a}{c}$). La courbe est l'hyperbole $y = \frac{k}{x}$ **translatée** du vecteur $\vec{u}(\beta; \alpha)$: **centre de symétrie** $\Omega(\beta; \alpha)$. Elle ne coupe jamais la droite verticale $x = \beta$ (valeur interdite) ni la droite horizontale $y = \alpha$ (car $\frac{k}{x - \beta} \neq 0$) : ces deux droites, tracées en pointillés, sont les « axes » de l'hyperbole, dont elle se rapproche sans les atteindre (on les appellera **asymptotes** en 1^{re} Bac).

Exemple : l'hyperbole fil rouge $H : h(x) = \frac{4-x}{x+1}$

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $4 - x = -(x + 1) + 5$, donc

$$h(x) = -1 + \frac{5}{x+1} :$$

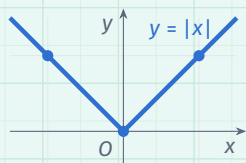
- c'est $y = \frac{5}{x}$ translatée du vecteur $\vec{u}(-1; -1)$: centre $\Omega(-1; -1)$, « axes » $x = -1$ et $y = -1$;
- $k = 5 > 0$: h est décroissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$;
- points : $(0; 4)$, $(4; 0)$, $(1; \frac{3}{2})$, $(-2; -6)$, $(-6; -2)$, $(-3; -\frac{7}{2})$.



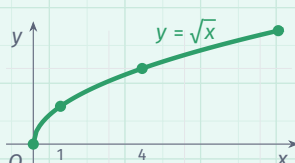
★ **Astuce de concours : le centre et l'axe cachés dans l'équation**

$y = \frac{4-x}{x+1} \iff xy + y = 4 - x \iff xy + x + y + 1 = 5 \iff (x+1)(y+1) = 5$. Avec $X = x + 1$, $Y = y + 1$ (origine en Ω) : $XY = 5$, l'hyperbole $Y = \frac{5}{X}$! Et l'équation $xy + x + y = 4$ ne change pas si l'on échange x et y : H est **symétrique par rapport à la droite $y = x$** (les points $(0; 4)$ et $(4; 0)$, $(-2; -6)$ et $(-6; -2)$ se correspondent).

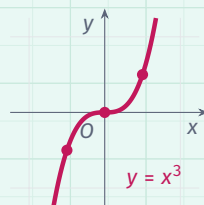
2.4 Trois courbes à reconnaître



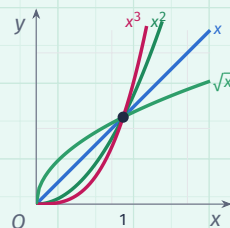
un « V » de sommet O ;
paire ; $|x| = x$ si $x \geq 0$, $-x$ si $x \leq 0$.



une demi-parabole « couchée » ; $D = [0, +\infty[$;
croissante, de plus en plus lentement.



impaire, croissante sur $\mathbb{R}$,
très « plate » près de O , où elle traverse l'axe (Ox) .



toutes passent par $(1; 1)$;
l'ordre s'inverse en $x = 1$.

Comparer $x, x^2, x^3, \sqrt{x}$

Si $0 < x < 1$: $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.

Si $x > 1$: $\sqrt{x} < x < x^2 < x^3$.

(Multiplier par $x \in]0, 1[$ fait **diminuer** :
 $x^2 = x \times x < x$.)

Attention, piège ! « un carré est plus grand »

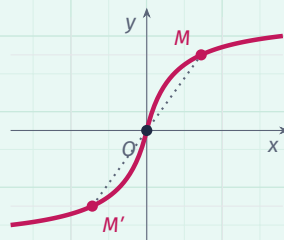
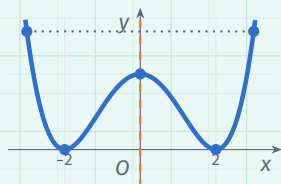
$x^2 > x$ est faux sur $[0, 1]$: $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Et $\sqrt{x}$ n'existe pas pour $x < 0$: la courbe de $\sqrt{x}$ n'a **rien** à gauche de (Oy) .

3

Symétries d'une courbe

Définition : parité (D_f symétrique par rapport à 0)

- **f paire** : $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$
 $\Leftrightarrow C_f$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
- **f impaire** : $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$
 $\Leftrightarrow C_f$ est symétrique par rapport à l'origine O.



À gauche : $p(x) = \frac{(x^2-4)^2}{8}$, paire ; à droite : $q(x) = \frac{3x}{|x|+1}$, impaire : $q(-x) = \frac{-3x}{|x|+1} = -q(x)$, et $M(2;2)$, $M'(-2;-2)$ sont symétriques par rapport à O.

Axe et centre de symétrie (pour tout $x \in D_f$, on suppose $2a - x \in D_f$)

- La droite $x = a$ est un **axe de symétrie** de $C_f \Leftrightarrow f(2a - x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- Le point $\Omega(a; b)$ est un **centre de symétrie** de $C_f \Leftrightarrow f(2a - x) + f(x) = 2b$ pour tout $x \in D_f$.

Pourquoi ? Le symétrique de $M(x; y)$ par rapport à la droite $x = a$ est $M'(2a - x; y)$; par rapport à Ω , c'est $M''(2a - x; 2b - y)$ (Ω est le milieu de $[MM'']$). On écrit que ces points sont encore sur C_f .

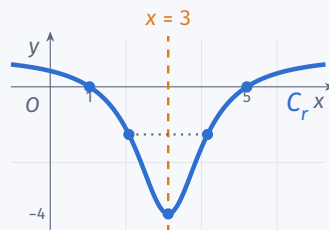
Méthode : le changement de repère

On place l'origine en $\Omega(a; b)$: $X = x - a$, $Y = y - b$. L'équation $y = f(x)$ devient $Y = g(X)$. Si g est **paire**, la droite $x = a$ est un axe ; si g est **impaire**, Ω est un centre.
 Une seule parité à étudier.

Exemple : un axe : $r(x) = \frac{x^2-6x+5}{x^2-6x+10}$

$x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 > 0 : D_r = \mathbb{R}$. **Calcul** : $(6 - x)^2 - 6(6 - x) = x^2 - 6x$, donc $r(6 - x) = r(x)$: la droite $x = 3$ est un axe de symétrie ($2a = 6$).

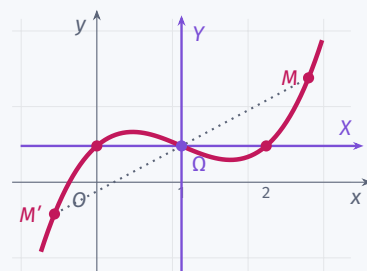
Repère : avec $X = x - 3 : r = \frac{X^2-4}{X^2+1} = 1 - \frac{5}{X^2+1}$, fonction paire de X ✓. Comme $X^2 + 1 \geq 1 : r \geq 1 - 5 = -4$, **minimum** -4 en $x = 3$; zéros 1 et 5 ($X = \pm 2$) ; $r(2) = r(4) = -\frac{3}{2}$.



Exemple : un centre : $c(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

On remarque $c(x) = x(x-1)(x-2) + 1$. **Calcul :** $c(2-x) = (2-x)(1-x)(-x) + 1 = -x(x-1)(x-2) + 1$, donc $c(2-x) + c(x) = 2$: $\Omega(1; 1)$ est un centre de symétrie ($2a = 2, 2b = 2$).

Repère : $X = x - 1, Y = y - 1$: $Y = (X+1)X(X-1) = X^3 - X$, fonction **impaire** de X ✓. Les points $(0; 1), (1; 1), (2; 1)$ sont alignés sur la droite $y = 1$, et M, M' sont symétriques par rapport à Ω .

**Attention, piège ! avant tout calcul**

Si D_f n'est pas symétrique (par rapport à 0, ou à a), il n'y a **ni parité ni axe** $x = a$: $x \mapsto \sqrt{x+3}$ n'est ni paire ni impaire, sans calcul. Si f n'est pas constante, C_f n'a **jamais d'axe horizontal** : le symétrique de $M(x; y)$ par rapport à $y = b$ est $M'(x; 2b - y)$, à la verticale de M (test de la droite verticale). Si f est impaire et $0 \in D_f$, alors $f(0) = 0$.

★ Astuce de concours : deviner a avant de calculer

Trinôme : axe au milieu des racines.

Homographique : centre $\Omega(\beta; \alpha)$. **Produit** $x(x-1)(x-2)$: centre au milieu des racines, $x = 1$. $|x-u| + |x-v|$: axe $x = \frac{u+v}{2}$. On ne fait ensuite **qu'un** calcul, $f(2a-x)$, pour confirmer. Une courbe symétrique se trace sur la **moitié** du domaine.

4

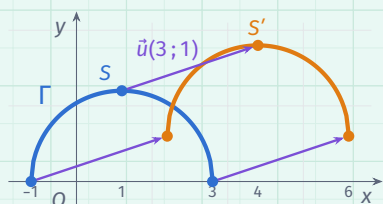
Transformer une courbe

Courbe de base : $f(x) = \sqrt{3+2x-x^2} = \sqrt{4-(x-1)^2}$ sur $D_f = [-1, 3]$; si $y = f(x)$, alors $(x-1)^2 + y^2 = 4$ et $y \geq 0$: C_f est le **demi-cercle** Γ de centre $(1; 0)$ et de rayon 2, d'extrémités $P(-1; 0), Q(3; 0)$ et de sommet $S(1; 2)$.

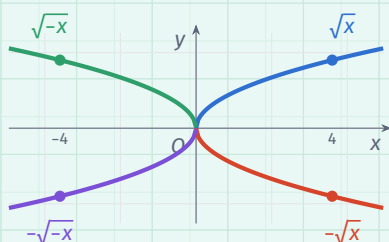
Translations, symétries, dilatations : le point $M(x; y)$ de C_f devient...

Nouvelle courbe	$M(x; y)$ devient	$S(1; 2)$ devient	Transformation
$y = f(x) + b$	$(x; y + b)$	$(1; 2 + b)$	translation de vecteur $(0; b)$
$y = f(x - a)$	$(x + a; y)$	$(1 + a; 2)$	translation de vecteur $(a; 0)$ (à droite si $a > 0$)
$y = f(x - a) + b$	$(x + a; y + b)$	$(1 + a; 2 + b)$	translation de vecteur $\vec{u}(a; b)$
$y = -f(x)$	$(x; -y)$	$(1; -2)$	symétrie d'axe (Ox)
$y = f(-x)$	$(-x; y)$	$(-1; 2)$	symétrie d'axe (Oy)
$y = -f(-x)$	$(-x; -y)$	$(-1; -2)$	symétrie de centre O
$y = k f(x)$	$(x; ky)$	$(1; 2k)$	dilatation verticale ($k > 0$) : ordonnées $\times k$
$y = f(kx)$	$(\frac{x}{k}; y)$	$(\frac{1}{k}; 2)$	dilatation horizontale ($k > 0$) : abscisses $\div k$

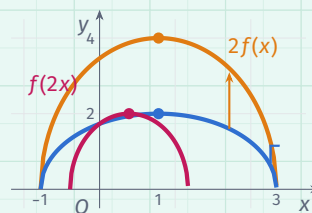
Pourquoi ? $M(x; y) \in C_f \iff y + b = f((x + a) - a) + b \iff M'(x + a; y + b)$ est sur la courbe $y = f(x - a) + b$; de même pour les autres lignes.



translation : $y = f(x - 3) + 1$; P, S, Q deviennent $(2; 1), (4; 3), (6; 1)$



symétries : $(4; 2)$ devient $(4; -2), (-4; 2), (-4; -2)$



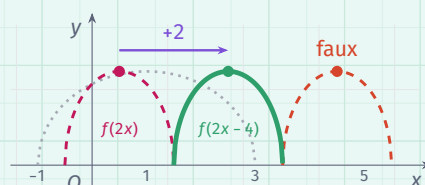
dilations : $f(2x)$ est définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, de sommet $(\frac{1}{2}; 2)$: le centre a bougé

Méthode : la chaîne de transformations

Pour $y = a f(k(x - \alpha)) + \beta$, on part de C_f et l'on fait, dans cet ordre : 1. ce qui est **dans** la parenthèse : $f(kx)$ (dilatation horizontale), puis $f(k(x - \alpha))$ (translation horizontale de α) ; 2. ce qui est **dehors** : multiplier par a (dilatation, et symétrie d'axe (Ox) si $a < 0$), puis ajouter β . **Toujours factoriser d'abord** le coefficient de x dans la parenthèse.

Attention, piège ! $f(2x - 4)$ n'est pas « $f(2x)$ décalée de 4 »

$f(2x - 4) = f(2(x - 2))$: on comprime ($f(2x)$, sommet $(\frac{1}{2}; 2)$), puis on translate de 2 (et non de 4) vers la droite : sommet $(\frac{5}{2}; 2)$, domaine $[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}]$, car $-1 \leq 2x - 4 \leq 3 \iff \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$. **Autres pièges** : $f(x + 3)$ décale vers la **gauche** (vecteur $(-3; 0)$) ; et $-f(x) + 2$ n'est pas $-(f(x) + 2)$: l'ordre « multiplier, puis ajouter » compte.

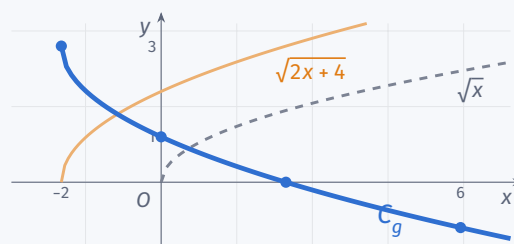


Exemple : $g(x) = 3 - \sqrt{2x + 4}$, à partir de $y = \sqrt{x}$

On écrit $g(x) = -\sqrt{2(x + 2)} + 3$.

1. $\sqrt{2x}$: abscisses divisées par 2 ;
2. $\sqrt{2(x + 2)}$: translation de 2 vers la **gauche** ;
3. $-\sqrt{2(x + 2)}$: symétrie d'axe (Ox) ;
4. $+3$: translation de 3 vers le haut.

Le point $(4; 2)$ de $y = \sqrt{x}$ devient successivement $(2; 2), (0; 2), (0; -2), (0; 1)$: $g(0) = 1$ ✓. De même, $(0; 0) \mapsto (-2; 3), (9; 3) \mapsto (\frac{5}{2}; 0)$ et $(16; 4) \mapsto (6; -1)$.



C_g part de $(-2; 3)$, passe par $(0; 1), (\frac{5}{2}; 0)$ et $(6; -1)$

★ Astuce de concours : suivre trois points, pas toute la courbe

La courbe $y = a f(k(x - \alpha)) + \beta$ ($k > 0$) est l'image de C_f point par point :

$$(x_0; y_0) \mapsto \left(\alpha + \frac{x_0}{k}; a y_0 + \beta \right)$$

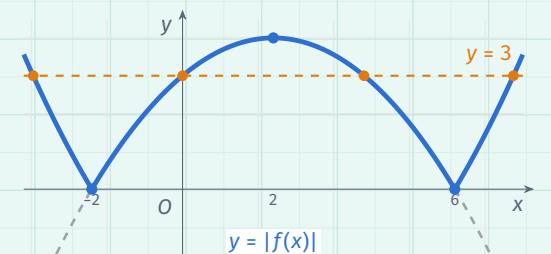
Pour $g(x) = 3 - \sqrt{2x+4}$: $a = -1$, $k = 2$, $\alpha = -2$, $\beta = 3$, et $(16; 4) \mapsto (-2 + 8; -4 + 3) = (6; -1)$ ✓. Dans un QCM « quelle est la bonne courbe ? », on suit les **extrémités** et le **sommet** : trois points suffisent presque toujours à éliminer les mauvaises propositions.

5

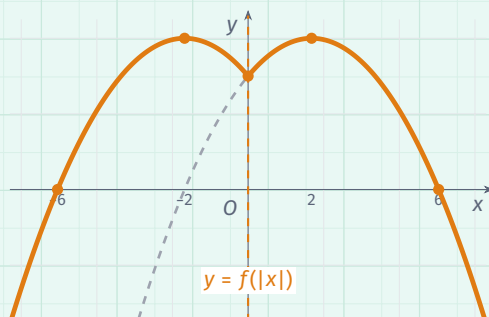
Valeur absolue et courbes

Les courbes de $|f(x)|$ et de $f(|x|)$

- $y = |f(x)|$: on **garde** la partie de C_f située au-dessus de (Ox) et l'on **retourne** (symétrie d'axe (Ox)) la partie située au-dessous : **la courbe ne passe jamais sous (Ox)** .
- $y = f(|x|)$: fonction **paire** ; on garde la partie de C_f où $x \geq 0$, on **efface** celle où $x < 0$, puis on complète par symétrie d'axe (Oy) .



les parties de P sous (Ox) (en pointillés) sont repliées



la partie $x < 0$ de P (en pointillés) est effacée

Exemple : avec la parabole fil rouge $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$

$|f(x)| = 3 \iff f(x) = 3$ ou $f(x) = -3$. $f(x) = 3 \iff x(1 - \frac{x}{4}) = 0 \iff x \in \{0, 4\}$;
 $f(x) = -3 \iff x^2 - 4x - 24 = 0 \iff x = 2 \pm 2\sqrt{7}$. Quatre solutions (points orange, à gauche) :
 $\{2 - 2\sqrt{7}, 0, 4, 2 + 2\sqrt{7}\}$. **Les zéros de $f(|x|)$ sont ± 6 : la racine -2 de f a **disparu** avec la partie $x < 0$. Sommets de $f(|x|)$: $(-2; 4)$ et $(2; 4)$, creux $(0; 3)$ en forme de « M ».**

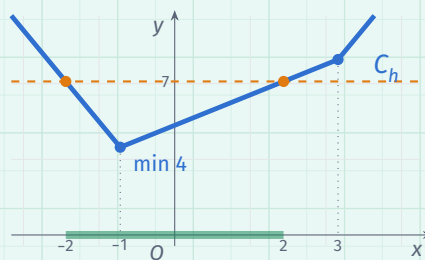
Méthode : fonctions affines par morceaux

1. Repérer les réels où chaque expression sous $| |$ change de signe. 2. Écrire la fonction **sans valeur absolue** sur chaque intervalle (tableau). 3. Tracer : une ligne brisée, dont on calcule les valeurs aux points de cassure et en un point de chaque bout.

Exemple : $h(x) = 2|x+1| + |x-3|$.

x	$x \leq -1$	$-1 \leq x \leq 3$	$x \geq 3$
$2 x+1 $	$-2x-2$	$2x+2$	$2x+2$
$ x-3 $	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$
$h(x)$	$-3x+1$	$x+5$	$3x-1$

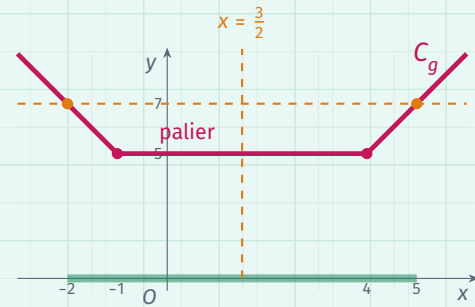
$h(-1) = 4$, $h(3) = 8$: **minimum** 4 en -1 . $h(x) = 7$:
 $-3x+1 = 7$ donne $x = -2$ (convient, $-2 \leq -1$) ; $x+5 = 7$
donne $x = 2$ (convient) ; $3x-1 = 7$ donne $x = \frac{8}{3} > 3$
(rejeté) : $x \in [-2, 2]$, et $h(x) \leq 7 \iff x \in [-2, 2]$.



La fonction $x \mapsto |x - u| + |x - v|$ ($u < v$)

Avec $A(u)$, $B(v)$ et $M(x)$ sur la droite graduée : $|x - u| + |x - v| = MA + MB \geq AB = v - u$, avec égalité si et seulement si $M \in [AB]$. La courbe est une ligne brisée avec un **palier** $y = v - u$ sur $[u, v]$, des pentes -2 et 2 de part et d'autre, et l'axe de symétrie $x = \frac{u+v}{2}$.

Exemple : $g(x) = |x+1| + |x-4|$: palier 5 sur $[-1, 4]$, axe $x = \frac{3}{2}$. $g(x) = 7$: il faut dépasser le palier de 2, soit 1 unité de chaque côté : $x \in \{-2, 5\}$; $g(x) \leq 7 \iff x \in [-2, 5]$.



Attention, piège ! $|f(x)|$ ou $f(|x|)$?

$|f(x)| \geq 0$ toujours, alors que $f(|x|)$ peut être négative (ici pour $|x| > 6$) ; $f(|x|)$ se construit avec la partie $x \geq 0$, **jamais** avec $x \leq 0$. Pour h , le minimum n'est **pas** au milieu de -1 et 3 .

★ Astuce de concours : la pente qui change

Pour $\alpha|x - u| + \beta|x - v|$ ($\alpha, \beta > 0$), la pente vaut $-(\alpha + \beta)$ tout à gauche et augmente de 2α en u , de 2β en v : pour h , $-3, 1, 3$ ✓. Le **minimum** est au point de **plus grand poids** (-1 , poids 2).

6

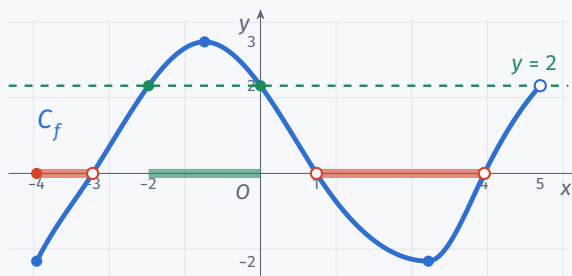
Résoudre graphiquement**Ce que l'on trace, ce que l'on lit**

Problème	On trace	Solutions : les abscisses des points
$f(x) = k$	C_f et la droite horizontale $y = k$	communs
$f(x) \leq k$	C_f et la droite $y = k$	de C_f situés sur ou sous la droite
$f(x) = g(x)$	C_f et C_g	communs aux deux courbes
$f(x) > g(x)$	C_f et C_g	de C_f strictement au-dessus de C_g
$f(x) = m$	la droite $y = m$, qu'on fait glisser	le nombre de points communs

Position relative : on étudie le **signe de la différence** : C_f est au-dessus de C_g sur $I \iff f(x) - g(x) \geq 0$ sur I .

Exemple : avec la courbe fil rouge C_f

- $f(x) = 0 \iff x \in \{-3, 1, 4\}$.
- $f(x) \geq 2 \iff x \in [-2, 0]$ (en vert) : la branche de droite reste sous $y = 2$.
- $f(x) < 0 \iff x \in [-4, -3[\cup]1, 4[$ (en rouge) : -4 est inclus (point plein, $f(-4) < 0$) ; $-3, 1, 4$ sont exclus.

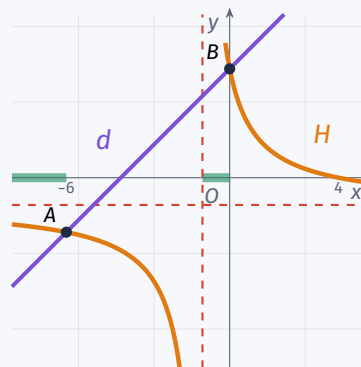
**Exemple : l'hyperbole H et la droite $d : y = x + 4$**

Lecture : deux points communs, $A(-6; -2)$ et $B(0; 4)$. **Calcul :** pour $x \neq -1$, $\frac{4-x}{x+1} = x + 4 \iff 4 - x = x^2 + 5x + 4 \iff x(x+6) = 0$ ✓.

Position : $h(x) - (x + 4) = \frac{-x(x+6)}{x+1}$.

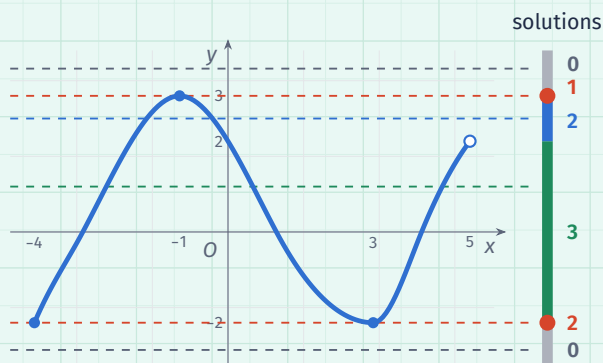
x	$-\infty$	-6	-1	0	$+\infty$		
$-x(x+6)$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$h(x) - (x+4)$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$

H est au-dessus de $d \iff x \in]-\infty, -6[\cup]-1, 0[$ (en vert).



Méthode : le nombre de solutions de $f(x) = m$

On fait **glisser** la droite horizontale $y = m$ de bas en haut et l'on compte ses points communs avec C_f . Le nombre ne change qu'aux **valeurs frontières** : ordonnées des extremums, des extrémités (pleines ou creuses).



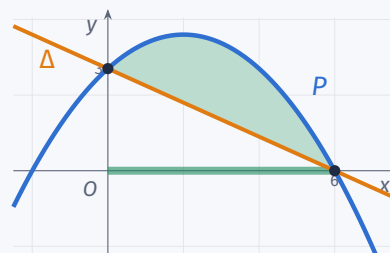
m	solutions de $f(x) = m$
$m < -2$ ou $m > 3$	0
$m = -2$	2 (-4 et 3)
$-2 < m < 2$	3
$2 \leq m < 3$	2 (le point (5; 2) est creux)
$m = 3$	1 ($x = -1$)

Contrôle : pour $m = 2$, on retrouve les deux antécédents -2 et 0 de la section 1.

Exemple : position relative de la parabole P et de la droite $\Delta : y = 3 - \frac{x}{2}$

On étudie le signe de la différence : $f(x) - (3 - \frac{x}{2}) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x = -\frac{x}{4}(x - 6)$.

C'est un trinôme de racines 0 et 6, avec $a = -\frac{1}{4} < 0$: il est **positif entre les racines**. Donc P est **au-dessus** de Δ sur $[0, 6]$ (zone verte), au-dessous ailleurs ; les points communs sont $(0; 3)$ et $(6; 0)$.
Lecture : $f(x) \geq 3 - \frac{x}{2} \iff x \in [0, 6]$.

**Attention, piège ! lire sur (Ox)**

On répond sur (Ox) : « $f(x) \geq 2$ » a pour solutions $[-2, 0]$, pas « $y \geq 2$ ». Les crochets suivent les points : plein, fermé ; creux, ouvert. Une lecture donne des valeurs **approchées** : le point $I(\frac{3}{2}; \frac{5}{4})$ de la section 2 ne se lit pas au carreau près, on **confirme par le calcul**.

★ Astuce de concours : une montée, une descente

Pour compter les solutions d'une équation, on la sépare en deux courbes connues. $\sqrt{x} = 12 - x$: $\sqrt{x}$ est croissante, $12 - x$ décroissante, leurs courbes se coupent **au plus une fois** ; on devine $x = 9$ ($\sqrt{9} = 3 = 12 - 9$) : **une seule** solution, sans élever au carré.

7

L'essentiel de la partie I

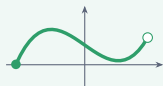
La courbe C_f

$$M(x; y) \in C_f \iff x \in D_f \text{ et } y = f(x)$$

abscisse sur (Ox), image sur (Oy) ; point plein ou point creux ?

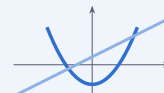
1 · Lire

- D_f = ombre sur (Ox) ; $f(D_f)$ = ombre sur (Oy).
- Image de a : verticale, puis **ordonnée**.
- Antécédents de b : droite $y = b$, puis **abscisses**.
- • point de la courbe ; o point exclu.
- Signe : au-dessus ou au-dessous de (Ox).
- Extremum : le point le plus haut **atteint**.
- Test de la droite verticale : au plus un point.



2 · Courbes de référence

- $y = mx + p$: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.
- $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$: sommet $S(\alpha; \beta)$,
axe $x = \alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
- $y = \alpha + \frac{k}{x - \beta}$: centre $\Omega(\beta; \alpha)$,
« axes » $x = \beta$ et $y = \alpha$.
- $|x|$, $\sqrt{x}$, x^3 ; sur $]0, 1[$: $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.



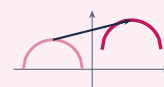
3 · Symétries

- Paire : axe (Oy) ; impaire : centre O.
- Axe $x = a$: $f(2a - x) = f(x)$.
- Centre $\Omega(a; b)$: $f(2a - x) + f(x) = 2b$.
- Repère en Ω : $X = x - a$, $Y = y - b$;
 $Y = g(X)$ paire ou impaire.
- D'abord : D_f est-il symétrique ?



4 · Transformer

- $f(x - a) + b$: vecteur $(a; b)$.
- $-f(x)$: axe (Ox) ; $f(-x)$: axe (Oy) ;
 $-f(-x)$: centre O.
- $k f(x)$: ordonnées $\times k$; $f(kx)$: abscisses $\div k$.
- Ordre : **dedans** puis **dehors**.
- $f(2x - 4) = f(2(x - 2))$: décalage de 2.
- $(x_0; y_0) \mapsto \left(\alpha + \frac{x_0}{k}; \alpha y_0 + \beta\right)$.



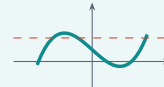
5 · Valeur absolue

- $|f(x)|$: on **replie** le bas vers le haut.
- $f(|x|)$: on garde $x \geq 0$, symétrie d'axe (Oy).
- Par morceaux : tableau sans | |, ligne brisée.
- $|x - u| + |x - v|$: palier $v - u$ sur $[u, v]$.
- Pente : $+2 \times$ poids à chaque cassure.



6 · Résoudre

- $f(x) = k$: points communs avec $y = k$.
- $f(x) > g(x)$: C_f **au-dessus** de C_g .
- Position : signe de $f(x) - g(x)$.
- $f(x) = m$: droite mobile, valeurs frontières.
- Réponse sur (Ox) ; crochets selon plein / creux.



8

Exercices de la partie I

Le plan est muni d'un repère orthonormé (sauf mention contraire). Sur les figures, un carreau vaut une unité ; les points marqués d'un disque ont des coordonnées entières, ou situées au milieu d'un carreau. Programme du tronc commun : ni limites, ni dérivées.

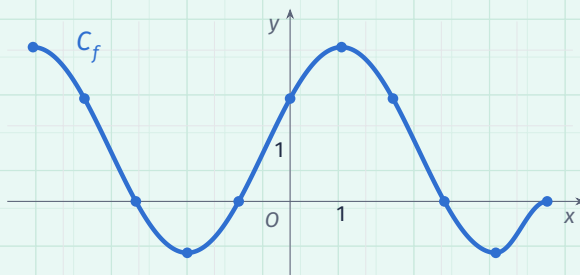
Niveau 1 • Bases ★

Exercice 1 Lire une courbe ★

corrigé p. 28

La courbe C_f ci-contre est celle d'une fonction f (sa formule n'est pas donnée). Ses deux extrémités font partie de la courbe.

- Donner D_f , puis $f(-5)$, $f(-2)$, $f(0)$ et $f(4)$.
- Donner les antécédents de 2, de 3, de -1 et de 4.
- Résoudre graphiquement : $f(x) = 0$; $f(x) > 2$; $f(x) \leq 0$. Dresser le tableau de signes de f .
- Dresser le tableau de variations de f . Quels sont le maximum et le minimum de f ? En quels réels sont-ils atteints ?
- Selon les valeurs du réel m , donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

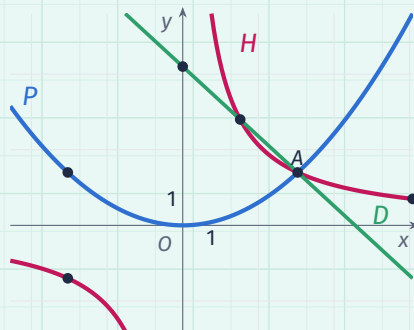


Exercice 2 Parabole, hyperbole et droite ★

corrigé p. 28

On a tracé une parabole $P : y = ax^2$, une hyperbole $H : y = \frac{k}{x}$ et une droite $D : y = px + q$.

- À l'aide des points marqués, déterminer a , k , p et q .
- Vérifier que $A(4, 2)$ appartient aux trois courbes. Calculer les autres points communs à H et D , puis à P et D .
- Donner le symétrique de A par rapport à (Oy) , puis par rapport à O . Sur quelle courbe est chacun d'eux ? Pourquoi ?

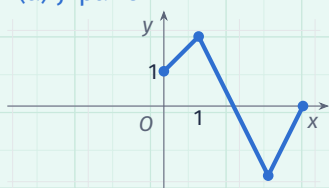
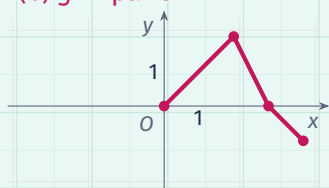
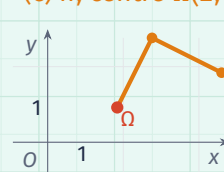


- Résoudre graphiquement, puis par le calcul : $\frac{x^2}{8} \leq \frac{8}{x}$ et $\frac{8}{x} < 6 - x$.

Exercice 3 Compléter une courbe par symétrie ★

corrigé p. 28

On ne connaît qu'une partie de chaque courbe (trait plein). Reproduire chaque figure sur un quadrillage et la compléter.

(a) f paire(b) g impaire(c) h , centre $\Omega(2, 1)$ 

- (a) f est paire sur $[-4, 4]$. Donner $f(-1)$ et $f(-3)$, résoudre $f(x) = 0$, puis dresser le tableau de

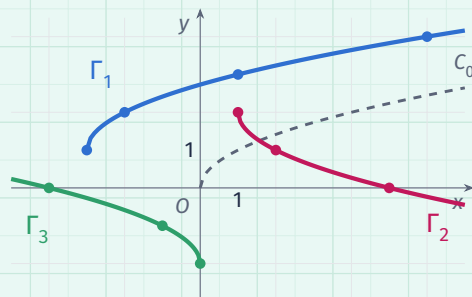
variations de f sur $[-4, 4]$.

- (b) g est impaire sur $[-4, 4]$. Donner $g(-2)$ et $g(-4)$, puis résoudre $g(x) > 0$.
- (c) h est définie sur $[-1, 5]$ et $\Omega(2, 1)$ est centre de symétrie de C_h . Justifier que $h(4-x) = 2-h(x)$, en déduire $h(1)$ et $h(-1)$, puis résoudre $h(x) = 0$.

Exercice 4 De $\sqrt{x}$ à ses transformées ★

corrigé p. 29

En pointillés, la courbe C_0 de $x \mapsto \sqrt{x}$. Chacune des courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ est l'image de C_0 par une translation, précédée éventuellement d'une symétrie par rapport à l'un des axes ; Γ_k est la courbe d'une fonction g_k .



- Préciser ces transformations et donner $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$.
- Ensemble de définition et sens de variation de chaque g_k ?
- Résoudre graphiquement, puis par le calcul : $g_1(x) \leq 3$; $g_2(x) \geq 0$; $g_3(x) > -1$.

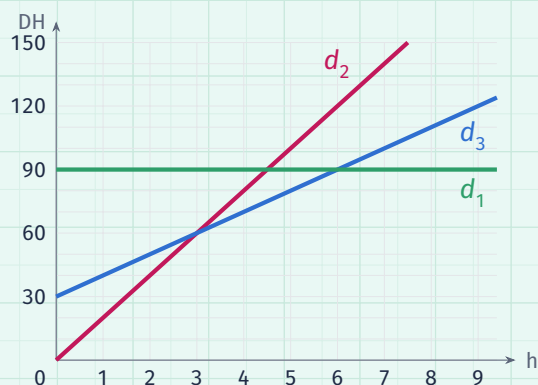
Exercice 5 Le meilleur tarif ★

corrigé p. 29

Une agence d'Agadir loue des trottinettes électriques pour une durée de x heures ($0 \leq x \leq 9$) :

- formule A : 20 DH par heure ;
- formule B : 30 DH de frais, puis 10 DH par heure ;
- formule C : un forfait de 90 DH pour la journée.

Les droites d_1, d_2, d_3 représentent les prix (en DH).



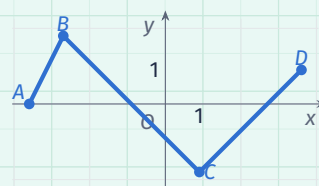
- Associer chaque droite à sa formule.
- Lire les points d'intersection des droites deux à deux, puis les retrouver par le calcul.
- Selon la durée x , quelle est la formule la plus avantageuse ?
- Avec un budget de 70 DH, quelle durée maximale peut-on louer avec chaque formule ?
- On note $m(x)$ le prix payé avec la formule la plus avantageuse. Exprimer $m(x)$ sur $[0, 9]$ (fonction affine par morceaux) et tracer sa courbe.

Niveau 2 · Bac ★★

Exercice 6 Quatre transformations d'une courbe ★★

corrigé p. 30

La fonction f , définie sur $[-4, 4]$, a pour courbe la ligne brisée $ABCD$ ci-contre, avec $A(-4, 0)$, $B(-3, 2)$, $C(1, -2)$ et $D(4, 1)$.



- Lire $f(-3)$, $f(0)$, $f(3)$, les extremums de f , puis résoudre $f(x) = 0$ et $f(x) = 1$.
- On pose $g_1(x) = f(x+2) - 1$, $g_2(x) = -\frac{1}{2}f(x)$, $g_3(x) = f(2x)$ et $g_4(x) = f(-x)$. Pour chacune : ensemble de définition, images des sommets A, B, C, D , maximum et minimum. Tracer les quatre courbes.
- Résoudre $g_3(x) = 1$ et $g_1(x) = 0$ sans calculer d'expression de f .

Exercice 7 Le point de rendez-vous ★★

corrigé p. 30

Trois amis habitent le long d'une route rectiligne, munie d'un repère, aux points d'abscisses -2 , 1 et 3 (en km). Ils cherchent le point de rendez-vous $M(x)$ qui rend minimale la distance totale à parcourir

$$f(x) = |x + 2| + |x - 1| + |x - 3|.$$

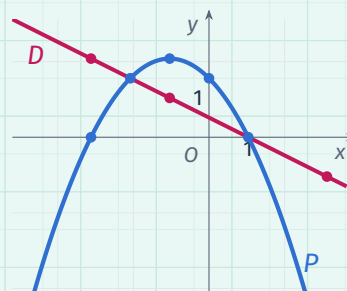
1. Écrire $f(x)$ sans valeur absolue sur $]-\infty, -2]$, $[-2, 1]$, $[1, 3]$ et $[3, +\infty[$. Tracer C_f .
2. Étudier les variations de f . Où placer le rendez-vous ? Quelle est alors la distance totale ?
3. Résoudre $f(x) = 8$ et $f(x) \leq 7$. Selon m , combien l'équation $f(x) = m$ a-t-elle de solutions ?
4. Un quatrième ami habite au point d'abscisse 5 . Montrer que la nouvelle distance totale $g(x) = f(x) + |x - 5|$ est minimale en tout point de $[1, 3]$, et donner ce minimum.

Exercice 8 Produits et quotients lus sur un graphique ★★

corrigé p. 31

La parabole P est la courbe d'un trinôme f , la droite D celle d'une fonction affine g .

1. Lire les solutions de $f(x) = 0$, de $g(x) = 0$ et de $f(x) = g(x)$.
2. Résoudre graphiquement $f(x) \geq g(x)$.



3. À l'aide d'un tableau de signes construit sur la figure, résoudre

$$f(x) \times g(x) \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0.$$

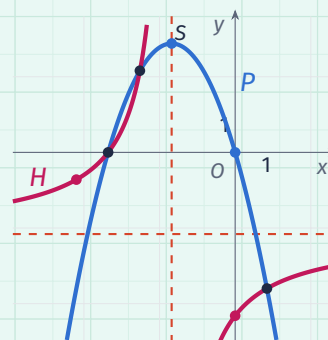
4. Déterminer $f(x)$ et $g(x)$, puis contrôler les réponses de la question 3 par le calcul.

Exercice 9 Retrouver une parabole et une hyperbole ★★

corrigé p. 31

La parabole P , courbe de f , a pour sommet $S(-2, 4)$ et passe par O . L'hyperbole H , courbe de g , a pour « axes » les droites pointillées $x = -2$ et $y = -3$.

1. Justifier que $f(x) = a(x + 2)^2 + 4$, puis trouver a . Justifier que $g(x) = -3 + \frac{k}{x + 2}$, trouver k à l'aide d'un point marqué et écrire $g(x)$ sous la forme d'un quotient.
2. Lire les points communs à P et H . Montrer que, pour $x \neq -2$, $f(x) = g(x) \iff x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = 0$, factoriser et conclure.
3. Résoudre $f(x) \leq g(x)$ et interpréter sur la figure.

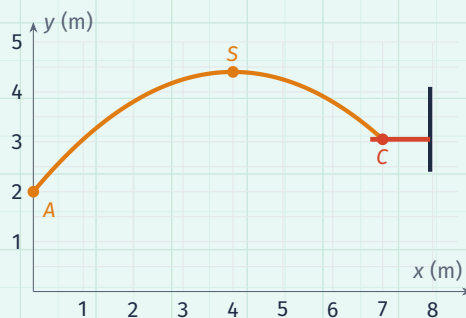


Exercice 10 Le tir au panier ★★

corrigé p. 31

Un basketballer lance le ballon depuis le point $A(0; 2)$. Le centre du ballon décrit un arc de parabole de sommet $S(4; 4,4)$ (unités : le mètre). Le centre du panier est au point $C(7; 3,05)$.

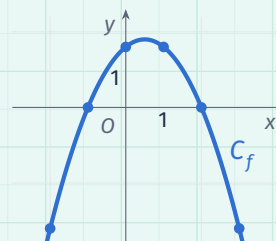
1. Montrer que la trajectoire a pour équation $y = -0,15(x - 4)^2 + 4,4$, puis développer.
2. Le ballon passe-t-il par le centre du panier ?
3. Sans calcul, à quelle autre distance horizontale du tireur le ballon est-il aussi à 3,05 m de haut ?
4. Un défenseur, placé à 1,5 m du tireur, lève les bras jusqu'à 3,2 m. Le ballon passe-t-il au-dessus de ses mains ?
5. Sur quelle distance horizontale le ballon est-il à au moins 3,8 m de haut ?

**Niveau 3 · Approfondissement ★★★****Exercice 11 Courbes de $|f(x)|$ et de $f(|x|)$ ★★★**

corrigé p. 32

La parabole ci-contre est la courbe d'un trinôme f ; elle coupe l'axe des abscisses en -1 et 2 , et passe par $(0, 2)$.

1. Déterminer $f(x)$, sa forme canonique et son sommet.
2. On pose $u(x) = |f(x)|$ et $v(x) = f(|x|)$. Construire C_u et C_v à partir de C_f . Quelle est la parité de v ?
3. Selon le réel m , donner le nombre de solutions de $u(x) = m$, puis de $v(x) = m$. Résoudre $u(x) = 2$ et $v(x) = 2$.
4. Pour quelles valeurs de m les équations $u(x) = m$ et $v(x) = m$ ont-elles le même nombre de solutions ?

**Exercice 12 Une hyperbole et des droites parallèles ★★★**

corrigé p. 32

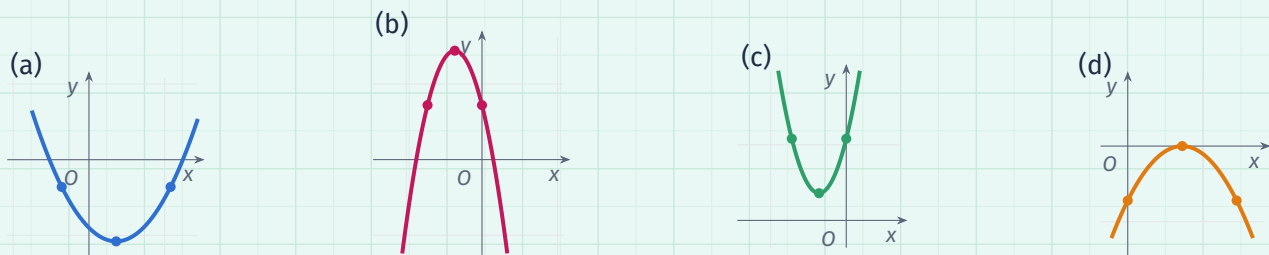
Soit $f(x) = \frac{3x-7}{x-2}$ et, pour tout réel p , la droite $D_p : y = x + p$.

1. Donner D_f et vérifier que $f(x) = 3 - \frac{1}{x-2}$. En déduire que C_f est l'image de l'hyperbole $y = -\frac{1}{x}$ par une translation que l'on précisera, le centre de symétrie Ω de C_f et les variations de f .
2. Montrer que les abscisses des points communs à C_f et D_p sont les solutions de $x^2 + (p-5)x + 7-2p = 0$. Discuter, selon p , le nombre de points communs.
3. Pour $p = 3$ et pour $p = -1$, donner l'unique point commun. Montrer que ces deux points sont symétriques par rapport à Ω . La droite D_1 , qui passe par Ω , coupe-t-elle C_f ?
4. Lorsque D_p coupe C_f en deux points, montrer que leur milieu I est sur la droite $\Delta : x + y = 5$. Que représente Δ pour C_f ?

Exercice 13 Les signes de a, b, c lus sur une parabole ★★★

corrigé p. 33

Chaque figure représente une parabole $y = ax^2 + bx + c$ (sommet et points marqués à coordonnées entières).



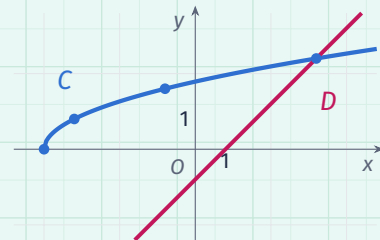
- Pour chaque parabole, lire le signe de a , de c et du discriminant Δ , puis le signe de b (penser à l'abscisse $-\frac{b}{2a}$ du sommet). Présenter les résultats dans un tableau.
- Pour chaque parabole, lire $a + b + c$ et $a - b + c$ (quels points regarder ?). Retrouver l'équation de la parabole (a).
- Vrai ou faux ? Justifier. (i) Si a et c sont de signes contraires, la parabole coupe (Ox) en deux points. (ii) Si $c > 0$, alors $\Delta < 0$. (iii) Si $a > 0$ et $a + b + c < 0$, la parabole coupe (Ox) en deux points d'abscisses $x_1 < 1 < x_2$.

Exercice 14 Racine carrée et solution parasite ★★★

corrigé p. 33

Soit $f(x) = \sqrt{x+5}$, de courbe C , et la droite $D : y = x-1$.

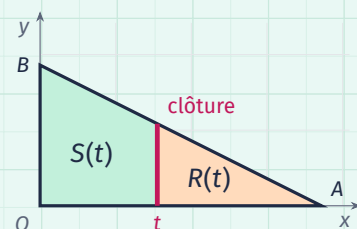
- Donner D_f et le sens de variation de f . Par quelle translation passe-t-on de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ à C ? Vérifier les points marqués.
- Lire la solution de $f(x) = x-1$. Résoudre ensuite l'équation en élevant au carré : quelle solution est « parasite » ? À quelle droite correspond-elle sur la figure ?
- Résoudre $f(x) \geq x-1$, puis $f(x) \geq |x-1|$.

**Exercice 15 Une clôture mobile ★★★**

corrigé p. 34

Un champ a la forme du triangle rectangle OAB , avec $O(0,0)$, $A(6,0)$ et $B(0,3)$ (unité : 10 m). Une clôture parallèle à (OB) le coupe selon la droite $x = t$, avec $t \in [0, 6]$; on note $S(t)$ l'aire de la parcelle de gauche et $R(t)$ celle de la parcelle de droite (en unités d'aire).

- Montrer que la clôture coupe $[AB]$ au point d'ordonnée $3 - \frac{t}{2}$. En déduire que $R(t) = \frac{1}{4}(6-t)^2$, puis que $S(t) = 3t - \frac{t^2}{4}$.
- Par quelle translation passe-t-on de la parabole $y = \frac{1}{4}x^2$ à la courbe de R ? Comment obtient-on ensuite la courbe de S ? Tracer les deux courbes sur $[0, 6]$.
- Où placer la clôture pour que les deux parcelles aient la même aire ? Est-ce au milieu de $[OA]$?
- On veut que l'aire de la parcelle de gauche soit comprise entre 5 et 8 unités d'aire : résoudre ce problème graphiquement, puis par le calcul.



Niveau 4 · Concours ★★★★★

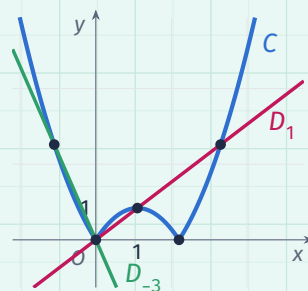
Exercice 16 La droite qui pivote ★★★★★

corrigé p. 34

On note C la courbe de $x \mapsto |x^2 - 2x|$ et, pour m réel, D_m la droite $y = mx$. On étudie l'équation

$$(E_m) : |x^2 - 2x| = mx.$$

1. Montrer que 0 est solution de (E_m) pour tout m . Interpréter.
2. Pour $x \neq 0$, montrer que $(E_m) \iff s(x) = m$, où $s(x) = \frac{|x^2 - 2x|}{x}$. Simplifier $s(x)$ pour $x > 0$ et pour $x < 0$. Que représente $s(x)$ pour le point M de C d'abscisse x ?
3. Tracer la courbe de s , puis donner, selon m , le nombre de solutions de (E_m) . Contrôler sur la figure avec D_1 et D_{-3} .
4. Pour $0 < m < 2$, donner les solutions de (E_m) .

**Exercice 17 Remonter une transformation ★★★★★**

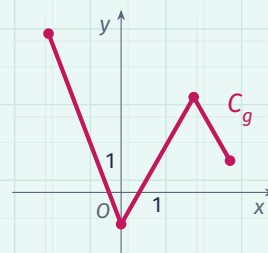
corrigé p. 35

On ne connaît pas f , mais on sait que, pour tout $x \in [-2, 3]$,

$$g(x) = 2f(1 - x) + 1,$$

et la courbe de g est la ligne brisée ci-contre, de sommets $(-2, 5)$, $(0, -1)$, $(2, 3)$ et $(3, 1)$.

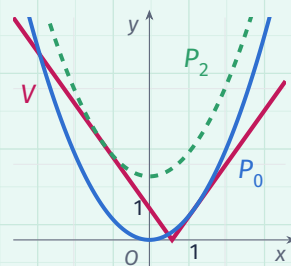
1. Exprimer $f(t)$ à l'aide de g (poser $x = 1 - t$). En déduire D_f .
2. Calculer $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$, puis tracer C_f . Par quelles transformations passe-t-on de C_g à C_f ?
3. Sans utiliser C_f : donner le maximum et le minimum de f , puis résoudre $f(x) = 0$ et $f(x) > 0$.

**Exercice 18 Une parabole qui glisse sur un V ★★★★★**

corrigé p. 35

On note V la courbe de $x \mapsto |2x - 1|$ et, pour m réel, P_m la parabole $y = x^2 + m$ (figure : P_0 et P_2).

1. Montrer que les abscisses des points communs à P_m et V sont les solutions de $h(x) = m$, avec $h(x) = |2x - 1| - x^2$.
2. Écrire $h(x)$ sans valeur absolue sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$, sous forme canonique. Dresser le tableau de variations de h et tracer sa courbe.
3. Selon m , donner le nombre de points communs à P_m et V .
4. Pour quelles valeurs de m la parabole P_m est-elle strictement au-dessus de V ? Résoudre $x^2 = |2x - 1|$.

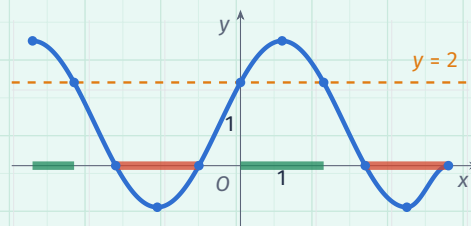


9

Corrigés de la partie I

■ Corrigé de l'exercice 1

1. $D_f = [-5, 5]$; $f(-5) = 3$, $f(-2) = -1$, $f(0) = 2$, $f(4) = -1$.
2. On trace la droite horizontale $y = b$ et on lit les abscisses des points communs. Antécédents de 2 : $-4, 0, 2$; de 3 : -5 et 1 ; de -1 : -2 et 4 ; de 4 : **aucun** (4 dépasse le maximum).
3. $f(x) = 0 \iff x \in \{-3, -1, 3, 5\}$. C_f est strictement au-dessus de $y = 2$ pour $x \in [-5, -4[\cup]0, 2[$ (en vert ; $-4, 0, 2$ exclus).
 $f(x) \leq 0 \iff x \in [-3, -1] \cup [3, 5]$ (en rouge).



x	-5	-2	1	4	5
f(x)	3	-1	3	-1	0

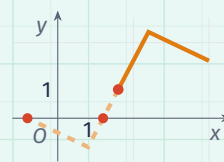
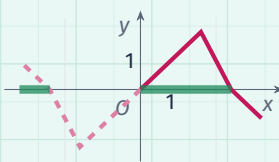
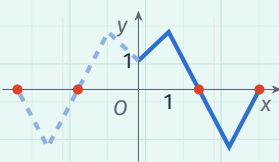
x	-5	-3	-1	3	5
f(x)	+	0	-	+	0

4. Tableau ci-dessus. Maximum 3 , atteint en -5 et en 1 ; minimum -1 , atteint en -2 et en 4 .
5. On fait glisser la droite $y = m$: $m < -1$: 0 solution ; $m = -1$: 2 ; $-1 < m \leq 0$: 4 ; $0 < m < 3$: 3 ; $m = 3$: 2 ; $m > 3$: 0. (Pour $m = 0$, la solution $x = 5$ est l'extrémité de la courbe.)

■ Corrigé de l'exercice 2

1. $A(4, 2) \in P$: $16a = 2$, $a = \frac{1}{8}$ (contrôle : $(-4, 2)$). $A \in H$: $k = 4 \times 2 = 8$ (contrôle : $(2, 4)$, $(8, 1)$, $(-4, -2)$). D passe par $(0, 6)$ et A : $p = \frac{2-6}{4} = -1$, $q = 6$: $D : y = 6 - x$.
2. $\frac{16}{8} = 2$, $\frac{8}{4} = 2$, $6 - 4 = 2$ ✓. $H \cap D$: pour $x \neq 0$, $\frac{8}{x} = 6 - x \iff x^2 - 6x + 8 = 0 \iff (x-2)(x-4) = 0$: le second point est $(2, 4)$. $P \cap D$: $\frac{x^2}{8} = 6 - x \iff x^2 + 8x - 48 = 0 \iff (x-4)(x+12) = 0$: le second point est $(-12, 18)$, hors de la figure.
3. $A'(-4, 2) \in P$ car $x \mapsto \frac{x^2}{8}$ est paire (P symétrique par rapport à (Oy)) ; $A''(-4, -2) \in H$ car $x \mapsto \frac{8}{x}$ est impaire (H symétrique par rapport à O).
4. $\frac{x^2}{8} \leq \frac{8}{x}$: si $x < 0$, $\frac{x^2}{8} \geq 0 > \frac{8}{x}$, jamais ; si $x > 0$, on multiplie par $8x > 0$: $x^3 \leq 64 \iff x \leq 4$. $S =]0, 4]$ (P sous H). $\frac{8}{x} < 6 - x$: si $x > 0$, $8 < 6x - x^2 \iff (x-2)(x-4) < 0 \iff 2 < x < 4$; si $x < 0$, multiplier par x change le sens : $8 > 6x - x^2 \iff (x-2)(x-4) > 0$, vrai pour tout $x < 0$. $S =]-\infty, 0[\cup]2, 4[$: la branche de gauche de H est entièrement sous D .

■ Corrigé de l'exercice 3



1. (a) On symétrise par rapport à (Oy) (pointillés). $f(-1) = f(1) = 2$, $f(-3) = f(3) = -2$; $f(x) = 0 \iff x \in \{-4, -2, 2, 4\}$. f décroît sur $[-4, -3]$, croît sur $[-3, -1]$, décroît sur $[-1, 0]$, croît sur $[0, 1]$, décroît sur $[1, 2]$, croît sur $[2, 3]$, décroît sur $[3, 4]$.

$[0, 1]$, décroît sur $[1, 3]$, croît sur $[3, 4]$: maximum 2 (en ± 1), minimum -2 (en ± 3), et $f(0) = 1$ est un minimum « local ».

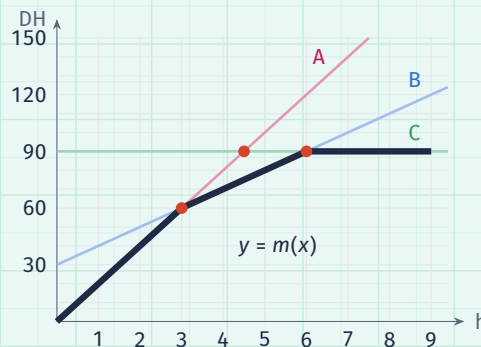
- (b) Symétrie de centre O : $g(-2) = -g(2) = -2$, $g(-4) = -g(4) = 1$. Sur $[0, 4]$, $g(x) > 0 \iff x \in]0, 3[$; pour $x < 0$, $g(x) > 0 \iff g(-x) < 0 \iff -x \in]3, 4[$. $S = [-4, -3[\cup]0, 3[$.
- (c) Le milieu de $M(x, h(x))$ et $M'(4-x, h(4-x))$ doit être $\Omega(2, 1)$: $\frac{h(x)+h(4-x)}{2} = 1$, d'où $h(4-x) = 2-h(x)$.
 $h(1) = 2-h(3) = -1$, $h(-1) = 2-h(5) = 0$. Sur $[-1, 1]$, $h(x) = -\frac{x+1}{2} \leq 0$, nul seulement en -1 ; sur $[1, 2]$, $h(x) = 2x-3$: $h(x) = 0 \iff x \in \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$.

■ Corrigé de l'exercice 4

- Γ_1 commence en $(-3, 1)$, image de O : translation de vecteur $(-3, 1)$ (contrôle : $(4, 2) \mapsto (1, 3)$, $(9, 3) \mapsto (6, 4)$) : $g_1(x) = \sqrt{x+3} + 1$. Γ_2 : symétrie d'axe (Ox) (courbe de $-\sqrt{x}$), puis translation de vecteur $(1, 2)$: $g_2(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ (points $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(5, 0)$). Γ_3 : symétrie d'axe (Oy) (courbe de $\sqrt{-x}$), puis translation de vecteur $(0, -2)$: $g_3(x) = \sqrt{-x} - 2$ (points $(0, -2)$, $(-1, -1)$, $(-4, 0)$).
- $D_{g_1} = [-3, +\infty[$, g_1 croissante ; $D_{g_2} = [1, +\infty[$, g_2 décroissante (le signe $-$ renverse) ; $D_{g_3} =]-\infty, 0]$, g_3 décroissante (si $a < b \leq 0$, alors $-a > -b \geq 0$ et $\sqrt{-a} > \sqrt{-b}$).
- $g_1(x) \leq 3 \iff \sqrt{x+3} \leq 2 \iff 0 \leq x+3 \leq 4 \iff x \in [-3, 1]$ (Γ_1 sous $y = 3$ jusqu'au point $(1, 3)$). $g_2(x) \geq 0 \iff \sqrt{x-1} \leq 2 \iff x \in [1, 5]$. $g_3(x) > -1 \iff \sqrt{-x} > 1 \iff -x > 1 \iff x < -1$.

■ Corrigé de l'exercice 5

- d_2 passe par O (prix proportionnel) : formule A, $y = 20x$. d_3 part de $(0, 30)$: formule B, $y = 30 + 10x$. d_1 est horizontale : formule C, $y = 90$.
- $20x = 30 + 10x \iff x = 3$: $(3, 60)$; $30 + 10x = 90 \iff x = 6$: $(6, 90)$; $20x = 90 \iff x = 4,5$: $(4,5; 90)$.
- On regarde la droite **la plus basse** : A si $x \leq 3$, B si $3 \leq x \leq 6$, C si $x \geq 6$ (égalité aux bornes).

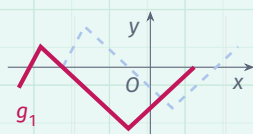


- A : $20x \leq 70 \iff x \leq 3,5$ (3 h 30) ; B : $30 + 10x \leq 70 \iff x \leq 4$ h ; C : impossible ($90 > 70$). Avec ce budget, B est la meilleure.
- $m(x) = 20x$ sur $[0, 3]$; $m(x) = 10x + 30$ sur $[3, 6]$; $m(x) = 90$ sur $[6, 9]$: c'est la ligne brisée épaisse de la figure (le « bas » des trois droites).

■ Corrigé de l'exercice 6

1. Sur $[-4, -3]$, $f(x) = 2x + 8$; sur $[-3, 1]$, $f(x) = -x - 1$; sur $[1, 4]$, $f(x) = x - 3$. $f(-3) = 2$, $f(0) = -1$, $f(3) = 0$; maximum 2 (en -3), minimum -2 (en 1). $f(x) = 0 \iff x \in \{-4, -1, 3\}$; $f(x) = 1 \iff x \in \left\{-\frac{7}{2}, -2, 4\right\}$.
2. Le point $M(x, y)$ de C_f devient : $(x - 2, y - 1)$ pour g_1 ; $\left(x, -\frac{y}{2}\right)$ pour g_2 ; $\left(\frac{x}{2}, y\right)$ pour g_3 ; $(-x, y)$ pour g_4 .

	domaine	image de A	de B	de C	de D	maximum	minimum
g_1	$[-6, 2]$	$(-6, -1)$	$(-5, 1)$	$(-1, -3)$	$(2, 0)$	1 en -5	-3 en -1
g_2	$[-4, 4]$	$(-4, 0)$	$(-3, -1)$	$(1, 1)$	$\left(4, -\frac{1}{2}\right)$	1 en 1	-1 en -3
g_3	$[-2, 2]$	$(-2, 0)$	$\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -2\right)$	$(2, 1)$	2 en $-\frac{3}{2}$	-2 en $\frac{1}{2}$
g_4	$[-4, 4]$	$(4, 0)$	$(3, 2)$	$(-1, -2)$	$(-4, 1)$	2 en 3	-2 en -1

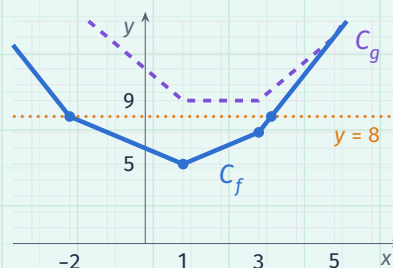


3. $g_3(x) = 1 \iff f(2x) = 1 \iff 2x \in \left\{-\frac{7}{2}, -2, 4\right\} \iff x \in \left\{-\frac{7}{4}, -1, 2\right\}$ (on **divise** les abscisses par 2). $g_1(x) = 0 \iff f(x + 2) = 1 \iff x + 2 \in \left\{-\frac{7}{2}, -2, 4\right\} \iff x \in \left\{-\frac{11}{2}, -4, 2\right\}$.

Remarque. Dans $f(2x)$, le 2 agit « à l'envers » : la courbe est **comprimée** horizontalement (abscisses divisées par 2), alors que $2f(x)$ l'étire verticalement.

■ Corrigé de l'exercice 7

1. Si $x \leq -2$: $f(x) = -(x + 2) - (x - 1) - (x - 3) = -3x + 2$; si $-2 \leq x \leq 1$: $-x + 6$; si $1 \leq x \leq 3$: $x + 4$; si $x \geq 3$: $3x - 2$. $f(-2) = 8$, $f(1) = 5$, $f(3) = 7$.
2. Pentes -3, -1, 1, 3 : f décroît sur $]-\infty, 1]$ et croît sur $[1, +\infty[$. Rendez-vous chez l'ami **du milieu**, en $x = 1$: distance totale minimale **5 km**.
3. $f(x) = 8$: $-3x + 2 = 8$ et $-x + 6 = 8$ donnent $x = -2$; $x + 4 = 8$ donne $4 \notin [1, 3]$; $3x - 2 = 8$ donne $\frac{10}{3} \geq 3$: $S = \left\{-2, \frac{10}{3}\right\}$. $f(-1) = f(3) = 7$ et les variations donnent $f(x) \leq 7 \iff x \in [-1, 3]$. $f(x) = m$: 0 solution si $m < 5$, 1 si $m = 5$, 2 si $m > 5$.



4. Sur $[1, 3]$: $g(x) = (x + 2) + (x - 1) + (3 - x) + (5 - x) = 9$, constante. Sur $[-2, 1]$, $g(x) = -2x + 11 \geq 9$; sur $[3, 5]$, $g(x) = 2x + 3 \geq 9$; au-delà, pentes -4 et 4. Minimum 9, atteint sur **tout** le segment $[1, 3]$.

Remarque. Pour une somme de distances $|x - a_1| + \dots + |x - a_n|$, le minimum est atteint au point **du milieu** (la médiane) : un seul point si n est impair, tout un segment si n est pair.

■ Corrigé de l'exercice 8

- $f(x) = 0 \iff x \in \{-3, 1\}$; $g(x) = 0 \iff x = 1$; $f(x) = g(x) \iff x \in \{-2, 1\}$ (points $(-2; 1,5)$ et $(1, 0)$).
- P est au-dessus de D entre les deux points communs : $f(x) \geq g(x) \iff x \in [-2, 1]$.
- On lit le signe de f (position de P par rapport à (Ox)) et celui de g :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$		
$f(x)$		-	0	+	0	-
$g(x)$		+		+	0	-
$f(x)g(x)$		-	0	+	0	+
$f(x)/g(x)$		-	0	+		+

$$f(x)g(x) \leq 0 \iff x \in]-\infty, -3] \cup \{1\} \quad \text{et} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \iff x \in [-3, 1[\cup]1, +\infty[.$$

- $f(x) = a(x+3)(x-1)$ et $f(-1) = -4a = 2$: $a = -\frac{1}{2}$, $f(x) = -\frac{1}{2}(x+3)(x-1)$. D passe par $(1, 0)$ et $(-1, 1)$: $g(x) = -\frac{1}{2}(x-1)$. Alors $f(x)g(x) = \frac{1}{4}(x+3)(x-1)^2 \leq 0 \iff x+3 \leq 0$ ou $x = 1$ ✓, et, pour $x \neq 1$, $\frac{f(x)}{g(x)} = x+3 \geq 0 \iff x \geq -3$ ✓.

Remarque. Le réel 1 est solution **isolée** pour le produit, mais **exclu** pour le quotient ($g(1) = 0$).

■ Corrigé de l'exercice 9

- Sommet $S(-2, 4)$: $f(x) = a(x+2)^2 + 4$, et $f(0) = 0$ donne $4a + 4 = 0$, $a = -1$. H a pour centre $(-2, -3)$: $g(x) = -3 + \frac{k}{x+2}$, et le point $(0, -6)$ donne $-3 + \frac{k}{2} = -6$, $k = -6$ (contrôle : $g(-5) = -1$). Donc

$$f(x) = -(x+2)^2 + 4 = -x^2 - 4x \quad \text{et} \quad g(x) = -3 - \frac{6}{x+2} = \frac{-3x-12}{x+2}.$$

- On lit $(-4, 0)$, $(-3, 3)$ et $(1, -5)$. Pour $x \neq -2$: $-x^2 - 4x = \frac{-3x-12}{x+2} \iff (-x^2 - 4x)(x+2) = -3x - 12 \iff x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = 0$. Or 1 est racine, et $x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = (x-1)(x^2 + 7x + 12) = (x-1)(x+3)(x+4)$: les trois points lus sont les seuls.
- $f(x) - g(x) = -\frac{(x-1)(x+3)(x+4)}{x+2}$. Tableau de signes (racines $-4, -3, 1$, valeur interdite -2) : $f - g$ est négatif sur $] -\infty, -4[$, sur $] -3, -2[$ et sur $] 1, +\infty[$. Donc

$$f(x) \leq g(x) \iff x \in]-\infty, -4] \cup [-3, -2[\cup [1, +\infty[.$$

P est sous la branche de gauche de H hors de $] -4, -3[$, et sous la branche de droite pour $x \geq 1$. Le signe change aussi en -2 , sans point commun : c'est la valeur interdite qui sépare les deux branches.

■ Corrigé de l'exercice 10

- Sommet $S(4; 4,4)$: $y = a(x-4)^2 + 4,4$, et $A(0; 2)$ donne $16a + 4,4 = 2$, $a = -0,15$. $y = -0,15(x^2 - 8x + 16) + 4,4 = -0,15x^2 + 1,2x + 2$.
- $y(7) = -0,15 \times 9 + 4,4 = 3,05$: **oui**, le tir est réussi.
- La droite $x = 4$ est axe de symétrie de la parabole : le symétrique de 7 est $2 \times 4 - 7 = 1$; en effet $y(1) = 3,05$.

4. $y(1,5) = -0,15 \times 2,5^2 + 4,4 = 3,4625 > 3,2$: le ballon passe environ 26 cm au-dessus des mains.
 5. $y \geq 3,8 \iff (x-4)^2 \leq \frac{0,6}{0,15} = 4 \iff 2 \leq x \leq 6$: sur 4 m, entre 2 m et 6 m du tireur.

■ Corrigé de l'exercice 11

1. $f(x) = a(x+1)(x-2)$ et $f(0) = -2a = 2$: $a = -1$,

$$f(x) = -x^2 + x + 2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} : \text{sommet } \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right).$$

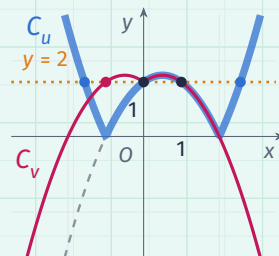
2. C_u : on garde l'arc situé entre -1 et 2 (où $f \geq 0$) et on **retourne** les deux branches extérieures (symétrie d'axe (Ox)). C_v : pour $x \geq 0$, $v(x) = f(x)$; on garde la partie $x \geq 0$ et on la symétrise par rapport à (Oy) : v est **paire**, $v(x) = -x^2 + |x| + 2$, courbe en « M » (maximums $\frac{9}{4}$ en $\pm\frac{1}{2}$, minimum local 2 en 0, zéros ± 2).

3. $u(x) = m$: 0 solution si $m < 0$, 2 si $m = 0$, 4 si $0 < m < \frac{9}{4}$, 3 si $m = \frac{9}{4}$, 2 si $m > \frac{9}{4}$. $v(x) = m$: 2 si $m < 2$, 3 si $m = 2$, 4 si $2 < m < \frac{9}{4}$, 2 si $m = \frac{9}{4}$, 0 si $m > \frac{9}{4}$. $u(x) = 2 \iff f(x) = \pm 2 \iff x(1-x) = 0$ ou $x^2 - x - 4 = 0$, et $v(x) = 2 \iff |x|(1-|x|) = 0$:

$$u(x) = 2 \iff x \in \left\{ \frac{1-\sqrt{17}}{2}, 0, 1, \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right\}$$

$$v(x) = 2 \iff x \in \{-1, 0, 1\}$$

4. On compare intervalle par intervalle ($m < 0$: 0 et 2 ; $0 < m \leq 2$: 4 et 2 ou 3 ; $m \geq \frac{9}{4}$: 3 ou 2 contre 2 ou 0) : les nombres de solutions sont égaux $\iff m = 0$ ou $2 < m < \frac{9}{4}$.



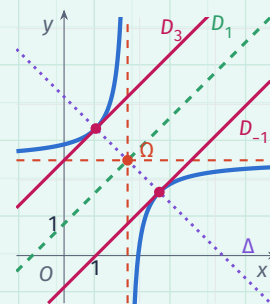
Attention, piège !

$|f(x)|$ agit sur les **ordonnées** (on retourne ce qui est sous (Ox)), $f(|x|)$ sur les **abscisses** (on recopie la partie $x \geq 0$ par symétrie d'axe (Oy)).

■ Corrigé de l'exercice 12

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $3x - 7 = 3(x-2) - 1$, d'où $f(x) = 3 - \frac{1}{x-2}$.

Avec $k(x) = -\frac{1}{x}$: $f(x) = k(x-2) + 3$: C_f est l'image de l'hyperbole $y = -\frac{1}{x}$ par la translation de vecteur (2, 3) ; centre Ω(2, 3), « axes » $x = 2$ et $y = 3$. Comme k est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, f est **croissante** sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.



2. Pour $x \neq 2$: $\frac{3x-7}{x-2} = x + p \iff 3x - 7 = x^2 + (p-2)x - 2p \iff x^2 + (p-5)x + 7 - 2p = 0$, et 2 n'est jamais racine ($4 + 2p - 10 + 7 - 2p = 1$). $\Delta = (p-5)^2 - 4(7-2p) = p^2 - 2p - 3 = (p+1)(p-3)$: **deux** points si $p < -1$ ou $p > 3$; **un** si $p = -1$ ou $p = 3$; **aucun** si $-1 < p < 3$.
 3. $p = 3$: $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x = 1$: point (1, 4). $p = -1$: $x^2 - 6x + 9 = 0$, $x = 3$: point (3, 2). Leur milieu est $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (2, 3) = \Omega$ ✓. D_1 passe par Ω ($2+1=3$), mais $p = 1 \in]-1, 3[$: **aucun** point commun !
 4. $x_l = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{5-p}{2}$ (somme des racines), $y_l = x_l + p = \frac{5+p}{2}$: $x_l + y_l = 5$ ✓. Δ est un **axe de symétrie** de C_f : si $y = 3 - \frac{1}{x-2}$, alors $(X, Y) = (5 - y, 5 - x)$ vérifie $Y = 3 - \frac{1}{X-2}$.

Attention, piège !

Une droite qui passe par le centre d'une hyperbole ne la coupe pas toujours : toutes les droites de pente 1 comprises entre D_{-1} et D_3 , dont D_1 , l'évitent.

■ Corrigé de l'exercice 13

1. a : ouverture ; $c = f(0)$: sur (Oy) ; Δ : points communs avec (Ox) ; b : grâce à $x_S = -\frac{b}{2a}$.

	sommet	a	c	Δ	b	$a + b + c = f(1)$	$a - b + c = f(-1)$
(a)	(1, -3)	+	-	+	-	-3	-1
(b)	(-1, 4)	-	+	+	-	-4	4
(c)	(-1, 1)	+	+	-	+	9	1
(d)	(2, 0)	-	-	0	+	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{2}$

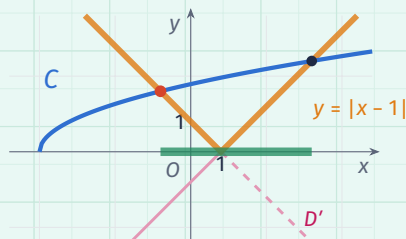
2. $a+b+c$ et $a-b+c$ sont les ordonnées des points d'abscisses 1 et -1. Parabole (a) : $y = a(x-1)^2 - 3$ et (3, -1) donne $4a = 2$: $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 3 = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2}$ ($b = -1 < 0$, $c = -\frac{5}{2} < 0$ ✓).
3. (i) **Vrai** : $ac < 0$ donne $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. (ii) **Faux** : la parabole (b) a $c = 2 > 0$ et $\Delta > 0$. (iii) **Vrai** : avec $f(x) = a(x-a)^2 + \beta$ et $a > 0$, on a $\beta \leq f(1) < 0$, donc $\Delta = -4a\beta > 0$: deux racines $x_1 < x_2$, et f n'est négative qu'entre elles, d'où $x_1 < 1 < x_2$.

★ Astuce de concours : signe de b

Sommet à gauche de (Oy) $\iff a$ et b de même signe ; à droite $\iff$ signes contraires.

■ Corrigé de l'exercice 14

1. $D_f = [-5, +\infty[$, f croissante. C est l'image de la courbe de $\sqrt{x}$ par la translation de vecteur $(-5, 0)$; $f(-5) = 0$, $f(-4) = 1$, $f(-1) = 2$, $f(4) = 3$ ✓.
2. On lit $x = 4$. Au carré : $x + 5 = (x-1)^2 \iff x^2 - 3x - 4 = 0 \iff x \in \{-1, 4\}$. $f(4) = 3 = 4 - 1$ ✓, mais $f(-1) = 2 \neq -2$: -1 est **parasite**, $S = \{4\}$. Élever au carré mélange $f(x) = x-1$ et $f(x) = -(x-1)$: $x = -1$ est l'abscisse du point $(-1, 2)$ où C coupe D' : $y = 1 - x$, symétrique de D par rapport à (Ox) .
3. Si $-5 \leq x < 1$: $x-1 < 0 \leq f(x)$, toujours vrai. Si $x \geq 1$, les deux membres sont positifs : $f(x) \geq x-1 \iff x^2 - 3x - 4 \leq 0 \iff x \in [1, 4]$. $S = [-5, 4]$. $f(x) \geq |x-1| \iff x+5 \geq (x-1)^2$ (deux nombres positifs) $\iff x \in [-1, 4]$: le « V » $y = |x-1|$ est formé de D' et de D .

**Attention, piège !**

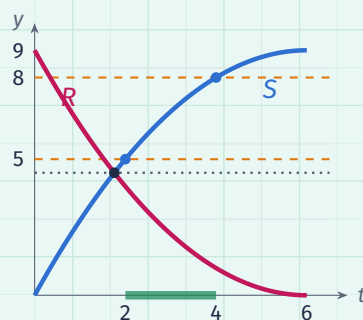
$A = B \Rightarrow A^2 = B^2$, mais la réciproque est fautive : on n'élève au carré que deux membres **positifs** ; sinon, on vérifie les solutions.

■ Corrigé de l'exercice 15

1. (AB) : $y = 3 - \frac{x}{2}$; en $x = t$, l'ordonnée est $\frac{6-t}{2}$. La parcelle de droite est un triangle rectangle de côtés $6 - t$ et $\frac{6-t}{2}$: $R(t) = \frac{1}{4}(6-t)^2$. L'aire de OAB vaut 9 :

$$S(t) = 9 - R(t) = 3t - \frac{t^2}{4}.$$

2. $R(t) = \frac{1}{4}(t-6)^2$: parabole $y = \frac{1}{4}x^2$ translatée du vecteur $(6, 0)$. Comme $S = 9 - R$, la courbe de S est la symétrique de celle de R par rapport à la droite $y = \frac{9}{2}$.



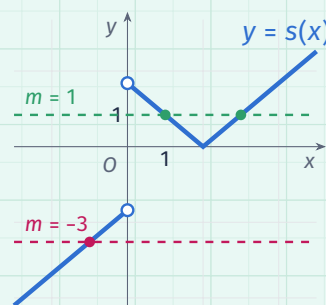
3. Même aire $\Leftrightarrow S(t) = R(t) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (6-t)^2 = 18 \Leftrightarrow t = 6 - 3\sqrt{2}$ ($6 + 3\sqrt{2} > 6$ est exclu) : $t = 6 - 3\sqrt{2} \approx 1,76$, soit une clôture à environ 17,6 m de (OB). Ce n'est **pas** le milieu : $S(3) = \frac{27}{4} = 6,75 \neq 4,5$.
4. $5 \leq S(t) \leq 8 \Leftrightarrow 1 \leq R(t) \leq 4 \Leftrightarrow 4 \leq (6-t)^2 \leq 16 \Leftrightarrow 2 \leq 6-t \leq 4$ (car $6-t \geq 0$)
 $\Leftrightarrow t \in [2, 4]$: la clôture doit être entre 20 m et 40 m de (OB) (en vert sur la figure).

★ Astuce de concours : triangles semblables

Longueurs multipliées par $k \Rightarrow$ aire multipliée par k^2 : $R(t) = 9\left(\frac{6-t}{6}\right)^2$; le milieu ne partage pas l'aire en deux.

■ Corrigé de l'exercice 16

1. $|0-0| = 0 = m \times 0$: 0 est toujours solution. Toutes les droites D_m passent par O, qui est sur C.
2. Pour $x \neq 0$, on divise par x : $(E_m) \Leftrightarrow s(x) = m$. Si $x > 0$: $|x^2 - 2x| = |x| |x-2| = x|x-2|$, donc $s(x) = |x-2|$. Si $x < 0$: x et $x-2$ sont négatifs, $x^2 - 2x = x(x-2) > 0$, donc $s(x) = x-2$. $s(x) = \frac{y_M - 0}{x_M - 0}$ est la **pente de la droite** (OM) : D_m recoupe C en M exactement quand cette pente vaut m .



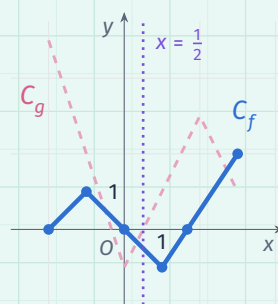
3. Courbe de s (figure) : pour $x < 0$, demi-droite (valeurs < -2) ; pour $x > 0$, V de sommet (2, 0) qui prend deux fois les valeurs de $[0, 2[$ et une fois celles ≥ 2 ((0, 2) exclu). Avec la solution $x = 0$: $m < -2$: $\boxed{2}$; $-2 \leq m < 0$: $\boxed{1}$; $m = 0$: $\boxed{2}$; $0 < m < 2$: $\boxed{3}$; $m \geq 2$: $\boxed{2}$. Contrôle : D_1 donne 0, 1, 3 ; D_{-3} donne 0 et -1 ✓.
4. Pour $0 < m < 2$: $S = \{0, 2 - m, 2 + m\}$.

★ Astuce de concours : faire tourner, puis aplatir

Une droite qui pivote autour de A devient une droite **horizontale** sur la courbe de la pente de (AM).

■ Corrigé de l'exercice 17

1. Avec $x = 1 - t$: $g(1 - t) = 2f(t) + 1$, d'où $f(t) = \frac{g(1 - t) - 1}{2}$.
 $t \in D_f \iff 1 - t \in [-2, 3] \iff t \in [-2, 3]$: $D_f = [-2, 3]$.
2. $f(-2) = \frac{g(3)-1}{2} = 0$; $f(-1) = \frac{g(2)-1}{2} = 1$; $f(0) = \frac{g(1)-1}{2} = 0$;
 $f(1) = \frac{g(0)-1}{2} = -1$; $f(3) = \frac{g(-2)-1}{2} = 2$. f est affine entre ces points : C_f est la ligne brisée $(-2, 0)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(3, 2)$. Chaque point (x, y) de C_g donne $(1 - x, \frac{y-1}{2})$: translation de vecteur $(0, -1)$, ordonnées divisées par 2, puis symétrie d'axe $x = \frac{1}{2}$.
3. $\max f = \frac{5-1}{2} = 2$, atteint en $t = 1 - (-2) = 3$; $\min f = \frac{-1-1}{2} = -1$, atteint en $t = 1 - 0 = 1$.
 $f(t) = 0 \iff g(1 - t) = 1$. Or $g(x) = 1$ pour $x = -\frac{2}{3}$ (sur $[-2, 0]$, $g(x) = -3x - 1$), pour $x = 1$ et pour $x = 3$; donc $f(t) = 0 \iff t \in \left[-2, 0, \frac{5}{3}\right]$.
 Enfin $f(t) > 0 \iff g(1 - t) > 1$, et $g(x) > 1$ pour $x \in \left[-2, -\frac{2}{3}\right[\cup]1, 3]$; donc
 $f(t) > 0 \iff t \in]-2, 0[\cup \left]\frac{5}{3}, 3\right]$.

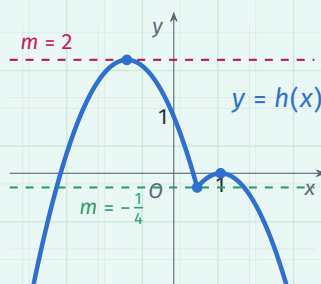


Attention, piège !

Le « $1 - x$ » renverse l'axe des abscisses : le maximum de g , atteint **à gauche** (en -2), devient celui de f , atteint **à droite** (en 3). On remonte les transformations dans l'ordre inverse.

■ Corrigé de l'exercice 18

1. $M(x, y)$ est commun $\iff y = x^2 + m$ et $y = |2x - 1|$
 $\iff x^2 + m = |2x - 1| \iff m = h(x)$.
2. Si $x \leq \frac{1}{2}$: $h(x) = 1 - 2x - x^2 = -(x+1)^2 + 2$; si
 $x \geq \frac{1}{2}$: $h(x) = 2x - 1 - x^2 = -(x-1)^2$. h croît sur
 $]-\infty, -1]$, décroît sur $[-1, \frac{1}{2}]$, croît sur $[\frac{1}{2}, 1]$, décroît
 sur $[1, +\infty[$; $h(-1) = 2$, $h(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, $h(1) = 0$.
3. Droite horizontale $y = m$ sur la courbe de h : $m > 2$:
 0 ; $m = 2$: 1 ; $0 < m < 2$: 2 ; $m = 0$: 3 ; $-\frac{1}{4} < m < 0$:
 4 ; $m = -\frac{1}{4}$: 3 ($-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$) ; $m < -\frac{1}{4}$: 2 .
4. P_m est strictement au-dessus de $V \iff m > h(x)$ pour tout $x \iff m > 2$ (pour $m = 2$, contact en $(-1, 3)$). $x^2 = |2x - 1| \iff h(x) = 0$: $x = 1$, ou $(x+1)^2 = 2$ avec $x \leq \frac{1}{2}$:
 $S = \{-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, 1\}$.



x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
h(x)		2	$-\frac{1}{4}$	0	

★ Astuce de concours : isoler le paramètre

Faire glisser P_m verticalement, c'est faire glisser la droite $y = m$ sur la courbe de h .

Partie 2 · Analyser une courbe

1^{re} Bac : limites et asymptotes, partie entière, tangentes, courbe de f' , symétries et périodicité

1^{re} Bac **Objectif :** lire sur une courbe ce que l'analyse de 1^{re} Bac dit d'une fonction : limites et asymptotes, continuité (et partie entière), nombres dérivés et tangentes, variations à travers la courbe de f' , symétries et périodes, courbes de $\frac{1}{f}$, f^2 et $\sqrt{f}$. **Prérequis :** la partie 1.

1 Limites lues sur une courbe

Définition : limites et asymptotes, vues sur la courbe

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$: quand on part **vers la droite**, les points de C_f se rapprochent autant qu'on veut de la droite $y = b$, **asymptote horizontale** en $+\infty$ (de même en $-\infty$) ;
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$: quand x s'approche de a **par la droite**, la courbe monte sans fin en longeant la droite $x = a$, **asymptote verticale** (de même avec a^- , avec $-\infty$) ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ($a \neq 0$) : l'**écart vertical** entre le point $M(x, f(x))$ de la courbe et le point $P(x, ax + b)$ tend vers 0 : la droite $y = ax + b$ est **asymptote oblique** en $+\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: la courbe finit par passer au-dessus de **toute** droite horizontale $y = A$.

Les asymptotes peuvent **différer** en $-\infty$ et en $+\infty$ (figure ci-dessous).

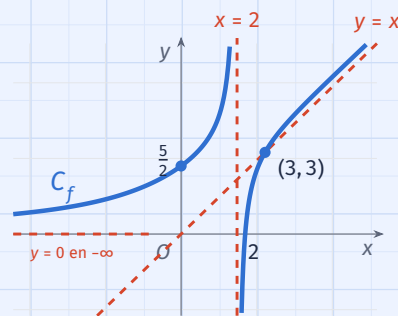
Méthode : lire une limite sur un graphique

1. Repérer **où va** x : $+\infty$, $-\infty$, a^+ ou a^- . 2. Suivre la courbe dans ce sens. 3. Lire **où va l'ordonnée** : un réel (la courbe s'écrase sur une horizontale) ou $\pm\infty$. 4. En un réel a , lire **séparément** les côtés a^- et a^+ .

Exemple : quatre limites lues. Sur la figure ci-contre, on lit :

- en $-\infty$: $f(x) \rightarrow 0$: asymptote horizontale $y = 0$;
- en 2^- : $f(x) \rightarrow +\infty$; en 2^+ : $f(x) \rightarrow -\infty$: asymptote $x = 2$;
- en $+\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$, la courbe longeant la droite $y = x$.

Le calcul confirme, avec $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \sqrt{x^2 + 16} \right) + \frac{1}{2-x}$:
en $-\infty$, $x + \sqrt{x^2 + 16} = \frac{16}{\sqrt{x^2 + 16} - x} \rightarrow 0$; en $+\infty$, $f(x) - x = \frac{8}{\sqrt{x^2 + 16} + x} + \frac{1}{2-x} \rightarrow 0$.



trois asymptotes sur une même courbe

Méthode : position d'une courbe et de son asymptote $\Delta : y = ax + b$

Étudier le **signe de l'écart** $d(x) = f(x) - (ax + b)$: si $d(x) > 0$, C_f est **au-dessus** de Δ ; si $d(x) < 0$, elle est **au-dessous** ; si $d(x) = 0$, c'est un point commun. On colorie la zone entre les deux lignes : une couleur par signe.

Exemple : $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 8x - 4}{x^2 + 4}$: une asymptote traversée, un couloir

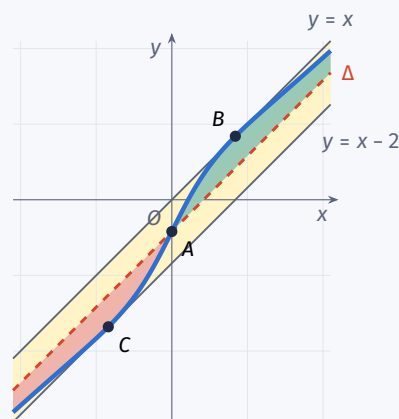
1. **Écriture utile.** $x^3 - x^2 + 8x - 4 = (x^2 + 4)(x - 1) + 4x$,

donc $f(x) = x - 1 + \frac{4x}{x^2 + 4}$.

2. **Asymptote.** $d(x) = \frac{4x}{x^2 + 4} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$ (termes de plus haut degré : $\frac{4}{x}$) : la droite $\Delta : y = x - 1$ est **asymptote** en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. **Position.** $d(x)$ a le signe de x : C_f est **au-dessous** de Δ sur $]-\infty, 0[$, **au-dessus** sur $]0, +\infty[$, et elle la **traverse** en $A(0, -1)$.

4. **Bonus : un couloir.** $1 - d(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+4} \geq 0$ et $1 + d(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2+4} \geq 0$, donc $x - 2 \leq f(x) \leq x$: la courbe reste entre les droites $y = x - 2$ et $y = x$, qu'elle touche en $C(-2, -4)$ et en $B(2, 2)$.

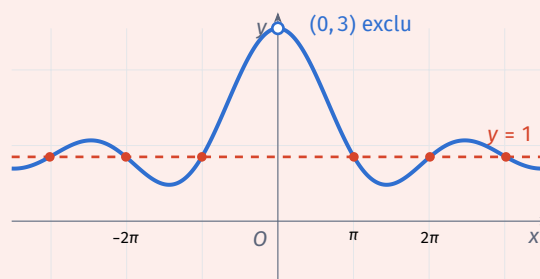


vert : au-dessus de Δ ; rouge : au-dessous

Attention, piège ! Une courbe peut couper son asymptote... et même une infinité de fois.

L'asymptote ne décrit que le comportement **à l'infini** : loin de l'infini, la courbe fait ce qu'elle veut. Ci-dessus, C_f traverse Δ en $A(0, -1)$, et la courbe de la première figure coupe $y = x$ en $(3, 3)$.

Avec $k(x) = 1 + \frac{2 \sin x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$: $\left| \frac{2 \sin x}{x} \right| \leq \frac{2}{|x|} \rightarrow 0$, donc $y = 1$ est asymptote en $\pm\infty$, et $k(x) = 1 \iff \sin x = 0$: la courbe la coupe en **chaque** $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$. En 0, $k(x) \rightarrow 1 + 2 = 3$: le point $(0, 3)$ est **exclu** (cercle vide).

**★ Astuce de concours : éliminer par les asymptotes**

Pour reconnaître la fonction d'une courbe : **valeur interdite** = asymptote verticale ; **limite en $\pm\infty$** = asymptote horizontale ; **un point lu** pour finir. Pour une fraction rationnelle : $\deg(\text{num}) < \deg(\text{dén})$ donne $y = 0$; degrés égaux, $y =$ quotient des coefficients dominants ; un degré d'écart, une asymptote oblique (division).

Exemple : une courbe a pour asymptotes $x = -3$ et $y = 2$ et passe par $(0, -1)$. Parmi $\frac{2x+3}{x+3}$, $\frac{2x-3}{x-3}$, $\frac{2x-3}{x+3}$, la 2^e a l'asymptote $x = 3$, la 3^e l'asymptote $y = 1$, la 1^{re} vaut 1 en 0 : c'est

2 Continuité et partie entière

Définition : continuité

Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant a . f est **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$. f est continue sur un intervalle I si elle l'est en tout point de I : on trace C_f sur I sans lever le crayon.

Admis : polynômes, fractions rationnelles, $\sqrt{x}$, $|x|$, sin, cos, tan sont continues sur tout intervalle de leur domaine, ainsi que leurs sommes, produits, quotients et composées.

Ce qui casse la continuité en a : un **saut** (limites à gauche et à droite différentes) ; un **point isolé** (la limite existe mais diffère de $f(a)$) ; une **asymptote verticale**. Sur les figures : $\bullet$ = point de la courbe ; $\circ$ = point exclu.

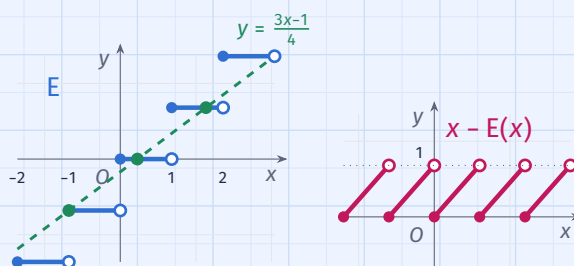
Définition : partie entière

Pour tout réel x , il existe un **unique entier** n tel que $n \leq x < n + 1$: c'est la **partie entière** de x , notée $E(x)$. Ainsi $E(1,8) = 1$, $E(4) = 4$, $E(-1,8) = -2$ (et non -1 !).

Propriétés : $E(x) \leq x < E(x) + 1$, soit $x - 1 < E(x) \leq x$; $E(x + k) = E(x) + k$ pour tout entier k .

La courbe de E est un **escalier** : sur chaque $[n, n + 1[$, $E(x) = n$ (palier horizontal), avec un disque plein à gauche et un cercle vide à droite. E est continue sur chaque $]n, n + 1[$; en n : $\lim_{x \rightarrow n^-} E(x) = n - 1$ et $\lim_{x \rightarrow n^+} E(x) = n = E(n)$: **saut** de 1 (continue à droite seulement).

La courbe de $x - E(x)$ (partie décimale) : sur $[n, n + 1[$, c'est $x - n$, un segment de pente 1 allant de $(n, 0)$ à $(n + 1, 1)$ exclu : des **dents de scie**. $0 \leq x - E(x) < 1$, et $x + 1 - E(x + 1) = x - E(x)$: la fonction est **1-périodique**.



l'escalier de E (et la droite verte de l'astuce) ; les dents de scie

Méthode : tracer la courbe de $x \mapsto E(u(x))$

1. Chercher les x où $u(x)$ est un **entier** k . 2. Entre deux tels points, $E(u(x))$ est **constant** : un palier. 3. Mettre le disque plein à l'extrémité où $u(x) = k$ est atteint, le cercle vide à l'autre (si u décroît, le disque plein passe à **droite**).

Attention, piège ! La partie entière n'est ni impaire ni additive.

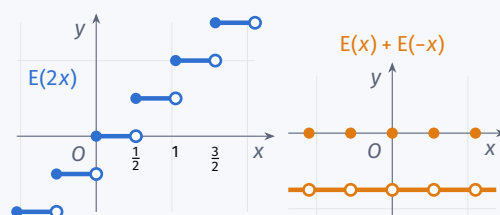
$E(-x) \neq -E(x)$: $E(-2,5) = -3$ mais $-E(2,5) = -2$. $E(x + y) \neq E(x) + E(y)$: $E(0,5 + 0,5) = 1$ mais $E(0,5) + E(0,5) = 0$; seule exception : $E(x + k) = E(x) + k$ si $k \in \mathbb{Z}$. $E(2x) \neq 2E(x)$ ($x = 0,5$). Et E n'est pas l'arrondi : $E(-0,2) = -1$. Enfin, **avoir une limite en a ne suffit pas** pour être continue en a : voir $E(x) + E(-x)$ ci-dessous.

Exemple : les courbes de $E(2x)$ et de $E(x) + E(-x)$

$g(x) = E(2x)$: $2x \in [k, k+1[\iff x \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right[$:
 $g(x) = k$ sur cet intervalle. Des marches **deux fois plus étroites** que celles de E , de même hauteur 1 : $g(0,7) = E(1,4) = 1$, $g(-0,3) = E(-0,6) = -1$.

$h(x) = E(x) + E(-x)$: si $x = n \in \mathbb{Z}$, $h(n) = n - n = 0$.
 Sinon $n < x < n+1$ avec $n = E(x)$, donc $-n-1 < -x < -n$ et $E(-x) = -n-1$: $h(x) = -1$.

La courbe est la droite $y = -1$ **trouée** en chaque entier, plus les **points isolés** $(k, 0)$: $\lim_{x \rightarrow k} h(x) = -1 \neq h(k) = 0$.

**Exemple : raccorder deux morceaux : $f_m(x) = x^2 + m$ si $x < 1$, $f_m(x) = 2\sqrt{x}$ si $x \geq 1$**

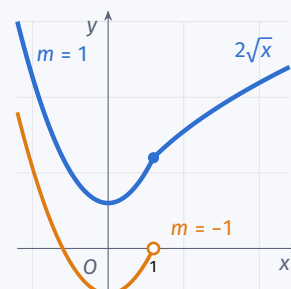
Chaque morceau est continu sur son intervalle ; tout se joue en 1. $f_m(1) = 2\sqrt{1} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_m(x) = 2$,
 tandis que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_m(x) = 1 + m$.

La courbe se recolle si et seulement si

$$f_m \text{ est continue en } 1 \iff 1 + m = 2 \iff \boxed{m = 1};$$

les deux morceaux arrivent alors au **même point** $(1, 2)$.
 Pour $m = -1$: le morceau de gauche arrive en $(1, 0)$, **exclu** (cercle vide), puis la courbe **saut** au point $(1, 2)$ (disque plein) : un saut de hauteur 2.

Méthode : pour une fonction définie par morceaux, comparer en chaque point de raccord la limite à gauche, la limite à droite et la valeur.



$m = 1$: recollée ; $m = -1$: saut

★ Astuce de concours : une équation avec E : l'inconnue utile est l'entier

Résoudre $E(x) = \frac{3x-1}{4}$. Posons $k = E(x) \in \mathbb{Z}$: l'équation donne $x = \frac{4k+1}{3}$, et la condition

$k \leq x < k+1$ devient $3k \leq 4k+1 < 3k+3$, soit $-1 \leq k < 2$. Donc $k \in \{-1, 0, 1\}$ et $S = \left\{-1; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right\}$

: la droite verte coupe l'escalier **trois fois** (figure de E ci-dessus). Graphiquement, la droite ne rencontre une marche que si elle passe entre son disque plein et son cercle vide.

3

Tangentes et nombre dérivé**Le nombre dérivé, lu sur la courbe**

Si f est dérivable en a , $f'(a)$ est la **pente** (coefficient directeur) de la tangente T_a à C_f au point $A(a, f(a))$: $T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Triangle de pente : en partant d'un point de T_a , si l'on avance de Δx , on monte de Δy (on

descend si $\Delta y < 0$) : $f'(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Tangente horizontale $\iff f'(a) = 0$.

Méthode : lire $f(a)$, $f'(a)$ et l'équation de la tangente

1. $f(a)$ est l'**ordonnée** du point de contact. 2. Choisir sur T_a deux points à **coordonnées lisibles** (nœuds du quadrillage) et former $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. 3. Écrire $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, puis **contrôler** avec un troisième point de la droite.

Exemple : tangentes lues sur la courbe de $f(x) = \frac{12}{x^2 + 3}$

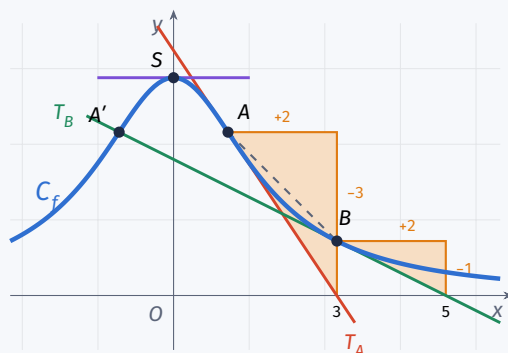
En $A(1, 3)$: T_A passe aussi par $(3, 0)$: on avance de 2, on descend de 3 : $f'(1) = -\frac{3}{2}$ et $T_A : y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$.

En $B(3, 1)$: T_B passe par $(5, 0)$: $f'(3) = -\frac{1}{2}$ et $T_B : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

En $S(0, 4)$: tangente horizontale, $f'(0) = 0$.

Contrôle par le calcul : $f'(x) = \frac{-24x}{(x^2 + 3)^2}$,
d'où $f'(1) = \frac{-24}{16} = -\frac{3}{2}$, $f'(3) = \frac{-72}{144} = -\frac{1}{2}$,
 $f'(0) = 0$ ✓.

Bonus : T_B recoupe la courbe en $A'(-1, 3)$
 $(f(x) = \frac{5-x}{2} \iff (x-3)^2(x+1) = 0)$.



triangles de pente en A et en B ; en pointillés, la corde $[AB]$

Définition : demi-tangentes, point anguleux, demi-tangente verticale

Si $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell_d \in \mathbb{R}$, f est **dérivable à droite** en a , $f'_d(a) = \ell_d$, et C_f a en A une **demi-tangente** de pente ℓ_d (vers la droite) ; de même **à gauche** ($h \rightarrow 0^-$). f est dérivable en $a \iff f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent **et sont égaux**.

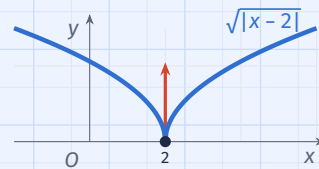
Point anguleux : $f'_g(a) \neq f'_d(a)$: deux demi-tangentes qui font un « coin ».

Demi-tangente verticale : le taux d'accroissement tend vers $\pm\infty$ d'un côté ; f n'est pas dérivable de ce côté.

Demi-tangente verticale : $r(x) = \sqrt{|x-2|}$ en 2. $r(2) = 0$.

Pour $h > 0$: $\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \rightarrow +\infty$; pour $h < 0$: $\frac{\sqrt{-h}}{h} = \frac{-1}{\sqrt{-h}} \rightarrow -\infty$.

Des deux côtés, la courbe arrive en $(2, 0)$ en devenant **verticale** : deux demi-tangentes verticales, toutes deux dirigées vers le haut ; c'est un **point de rebroussement**. (Avec $\sqrt{x}$ en 0, il n'y a qu'un côté.) Ici $r(4-x) = r(x)$: la droite $x = 2$ est un axe de symétrie (section 5).



un rebroussement en $(2, 0)$

Attention, piège ! Pente de la corde $\neq$ pente de la tangente.

Sur la figure de $\frac{12}{x^2+3}$, la corde $[AB]$ a pour pente $\frac{1-3}{3-1} = -1$, mais $f'(1) = -\frac{3}{2}$ et $f'(3) = -\frac{1}{2}$: **une droite qui passe par deux points de la courbe n'est pas une tangente**. Pour lire $f'(a)$, il faut la droite qui « épouse » la courbe en un seul point A , et lire deux points **de cette droite**, jamais deux points de la courbe.

Exemple : le raccord de la section 2, revu à la loupe (avec $m = 1$)

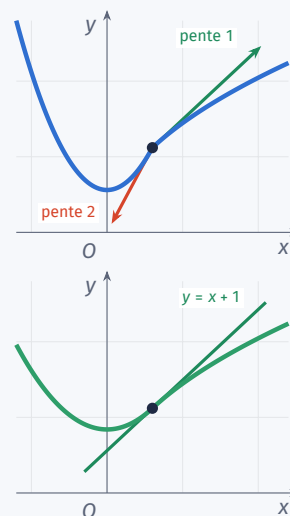
$f(x) = x^2 + 1$ si $x < 1$, $f(x) = 2\sqrt{x}$ si $x \geq 1$;
 $f(1) = 2$.

À gauche : $\frac{(1+h)^2+1-2}{h} = 2+h \rightarrow 2$: $f'_g(1) = 2$,
 demi-tangente $y = 2x$ ($x \leq 1$).

À droite : $\frac{2\sqrt{1+h}-2}{h} = \frac{2}{\sqrt{1+h}+1} \rightarrow 1$: $f'_d(1) = 1$,
 demi-tangente $y = x + 1$ ($x \geq 1$).

$2 \neq 1$: **point anguleux** en $(1, 2)$: recollée, mais avec un coin !

Raccord lisse : remplaçons $x^2 + 1$ par $ax^2 + b$.
 Il faut $a + b = 2$ (continuité) et $2a = 1$ (même pente) : $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$. La fonction égale à $\frac{x^2+3}{2}$ si $x < 1$ et à $2\sqrt{x}$ si $x \geq 1$ est dérivable en 1, de tangente $y = x + 1$.



point anguleux

raccord lisse

★ **Astuce de concours : où la tangente coupe-t-elle les axes ?**

T_a coupe (Oy) au point d'ordonnée $f(a) - af'(a)$ et, si $f'(a) \neq 0$, (Ox) au point d'abscisse $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$. Avec $\frac{12}{x^2+3}$: en $a = 1$, $3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ et $1 + 2 = 3$; en $a = 3$, $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ et $3 + 2 = 5$ ✓.

Si f est **paire**, T_{-a} est la symétrique de T_a par rapport à (Oy) : les deux tangentes se coupent **sur** (Oy) , ici en $(0, \frac{9}{2})$ pour $a = 1$.

4

Courbe de f et courbe de f' **Rappel : dérivée et variations (théorèmes de 1^{re} Bac, admis)**

Soit f dérivable sur un **intervalle** I . Si $f' \geq 0$ sur I , f est croissante sur I ; si $f' \leq 0$, décroissante ; si $f' = 0$, constante (strictement monotone si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points).
 Si f admet un **extremum local** en un point a intérieur à I , alors $f'(a) = 0$; **réciroquement**, si f' s'annule en a **en changeant de signe**, $f(a)$ est un **extremum local**.

Le dictionnaire $C_f \leftrightarrow C_{f'}$ (sur un intervalle)

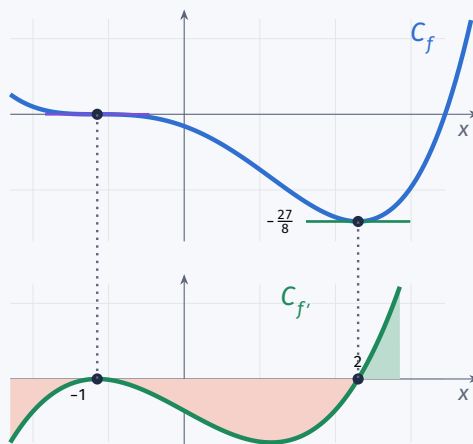
sur la courbe de f	sur la courbe de f'
f croissante (resp. décroissante) sur I	$C_{f'}$ au-dessus (resp. au-dessous) de (Ox) sur I
tangente horizontale au point d'abscisse a	$C_{f'}$ rencontre (Ox) en a
extremum local en a	$C_{f'}$ traverse (Ox) en a (f' change de signe)
tangente horizontale sans extremum	$C_{f'}$ touche (Ox) sans la traverser
pente de la tangente en a	ordonnée du point de $C_{f'}$ d'abscisse a

Exemple : $f(x) = \frac{1}{8}(x+1)^3(x-3)$ et $f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2(x-2)$

Calcul : $f'(x) = \frac{1}{8}[3(x+1)^2(x-3) + (x+1)^3] = \frac{1}{8}(x+1)^2(4x-8) = \frac{1}{2}(x+1)^2(x-2)$.

Lecture croisée :

- $C_{f'}$ est au-dessous de (Ox) sur $]-\infty, 2[$: f **décroît** sur $]-\infty, 2]$; au-dessus sur $]2, +\infty[$: f **croît** ;
- en 2, $C_{f'}$ traverse (Ox) : **minimum** $f(2) = \frac{27 \times (-1)}{8} = -\frac{27}{8}$;
- en -1, $C_{f'}$ **touche** (Ox) sans la traverser : tangente horizontale en $(-1, 0)$, **pas** d'extremum (la courbe traverse l'axe à plat) ;
- $f'(0) = -1$: la tangente au point $(0, -\frac{3}{8})$ a pour pente -1.



Méthode : reconnaître C_f et $C_{f'}$ parmi plusieurs courbes

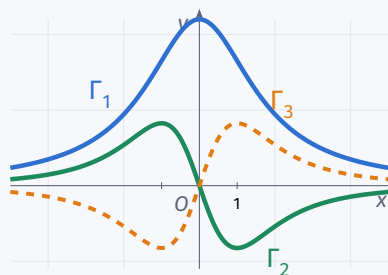
1. Zéros : aux abscisses où une courbe a une tangente horizontale, la courbe candidate pour f' doit couper (ou toucher) (Ox) . **2. Signes :** là où la candidate f monte, la candidate f' doit être au-dessus de (Ox) . **3. Contre-épreuve :** vérifier que les rôles inverses sont impossibles.

Exemple : trois courbes, deux rôles

L'une des courbes est celle de f , une autre celle de f' . Lesquelles ?

- Γ_1 n'a qu'une tangente horizontale, en $x = 0$; Γ_2 et Γ_3 s'annulent seulement en 0 : avec $\Gamma_1 = C_f$, les deux sont candidates.
- Γ_1 monte sur $]-\infty, 0]$: il faut $f' \geq 0$ à gauche de 0. Γ_2 convient, Γ_3 est **éliminée** (signes inversés).
- Inversement, Γ_2 a des tangentes horizontales en $x = \pm 1$, où Γ_1 ne s'annule pas : Γ_1 n'est pas la dérivée de Γ_2 .

Conclusion : $\Gamma_1 = C_f$, $\Gamma_2 = C_{f'}$. (C'est $f(x) = \frac{12}{x^2+3}$ de la section 3 : l'ordonnée $-\frac{3}{2}$ de Γ_2 en 1 est bien la pente lue en A.)



Méthode : reconstruire l'allure de f à partir de la courbe de f'

1. Lire le **signe** de f' (position de $C_{f'}$ par rapport à (Ox)) et ses zéros. **2.** En déduire le **tableau de variations** de f (extremums aux changements de signe). **3.** Placer les points connus ; là où f' est grande, la courbe est raide ; là où f' est constante, f est **affine**. **4.** Tracer en respectant les pentes lues.

Exemple : une dérivée en ligne brisée, avec $f(0) = 0$

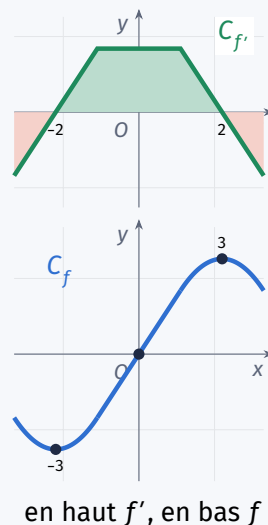
La courbe de f' est la ligne brisée de sommets $(-3, -2), (-1, 2), (1, 2), (3, -2)$; f est définie sur $[-3, 3]$ et $f(0) = 0$.

Signe : f' s'annule en -2 et en 2 : négative sur $[-3, -2[$ et sur $]2, 3]$, positive entre les deux.

Morceaux : sur $[-1, 1]$, $f' = 2$: $f(x) = 2x$ (un segment). Sur $[1, 3]$, $f'(x) = 4 - 2x$: la fonction $-x^2 + 4x - 1$ a cette dérivée et vaut 2 en 1 , donc $f(x) = -x^2 + 4x - 1$; de même $f(x) = x^2 + 4x + 1$ sur $[-3, -1]$.

Bilan : maximum $f(2) = 3$, minimum $f(-2) = -3$, $f(\pm 3) = \pm 2$.

x	-3	-2	2	3	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	-2		3		2
		-3			

**Attention, piège ! Le signe de f' n'est pas le signe de f .**

Ci-dessus, sur $]-2, 0[$, $f'(x) > 0$ (la courbe **monte**) alors que $f(x) < 0$ (elle est **sous** l'axe) : $f(-1) = -2$. De même, un zéro de f' n'est **pas** un zéro de f : $f'(2) = 0$ mais $f(2) = 3$. Et la position de $C_{f'}$ par rapport à C_f ne veut rien dire : seule compte sa position par rapport à (Ox) .

★ Astuce de concours : f' paire $\implies C_f$ symétrique par rapport au point $(0, f(0))$

Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle centré en 0) et f' paire, posons $\varphi(x) = f(x) + f(-x)$: $\varphi'(x) = f'(x) - f'(-x) = 0$, donc φ est constante, égale à $\varphi(0) = 2f(0)$: $f(-x) + f(x) = 2f(0)$. Ci-dessus, $C_{f'}$ est symétrique par rapport à (Oy) , donc C_f est symétrique par rapport à O : le minimum -3 en -2 est le symétrique du maximum 3 en 2 . De même, f' impaire $\implies f$ paire.

5

Symétries et périodicité**Axe et centre de symétrie**

Soit D_f symétrique par rapport à a (si $x \in D_f$, alors $2a - x \in D_f$).

- La droite $x = a$ est un **axe de symétrie** de $C_f \iff f(2a - x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$;
- le point $\Omega(a, b)$ est un **centre de symétrie** de $C_f \iff f(2a - x) + f(x) = 2b$ pour tout $x \in D_f$.

Démonstration analytique (changement de repère). Dans le repère d'origine $\Omega(a, b)$, un point $M(x, y)$ a pour coordonnées $X = x - a$, $Y = y - b$, et $M \in C_f \iff Y = F(X)$ avec $F(X) = f(a + X) - b$. La droite $x = a$ devient l'axe des ordonnées : elle est axe $\iff F$ est **paire** $\iff f(a - X) = f(a + X)$; Ω

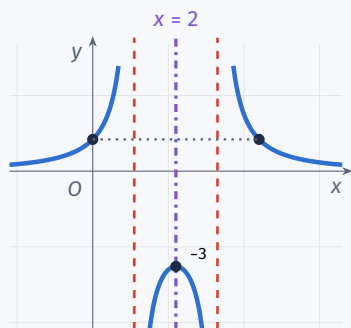
devient l'origine : il est centre $\Leftrightarrow F$ est **impaire** $\Leftrightarrow f(a-x) - b = -(f(a+x) - b)$. Avec $x = a+X$, on obtient les deux égalités encadrées.

Méthode : démontrer une symétrie

1. Vérifier que D_f est symétrique par rapport à a . 2. Calculer $f(2a-x)$ en simplifiant. 3. Comparer avec $f(x)$ (axe) ou calculer $f(2a-x) + f(x)$ (centre). **Pour deviner a et b** : regarder la courbe, ses asymptotes, ses extremums.

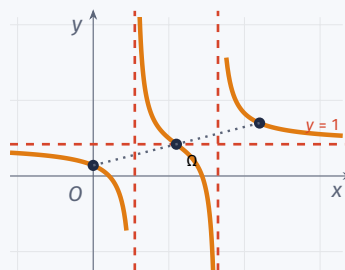
Exemple : un axe et un centre, avec le même dénominateur $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

Axe : $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4x + 3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, symétrique par rapport à 2 ($1 \leftrightarrow 3$). $(4-x)^2 - 4(4-x) = x^2 - 4x$, donc $f(4-x) = f(x)$: la droite $x = 2$ est un axe. Maximum local $f(2) = -3$; $f(0) = f(4) = 1$.



Centre : $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$ sur le même D_f . Comme $(3-x)(1-x) = (x-1)(x-3)$:

$g(4-x) + g(x) = 2 + \frac{(2-x) + (x-2)}{(x-1)(x-3)} = 2$: $\Omega(2, 1)$ est un centre. ($g(0) = \frac{1}{3}$, $g(4) = \frac{5}{3}$.)

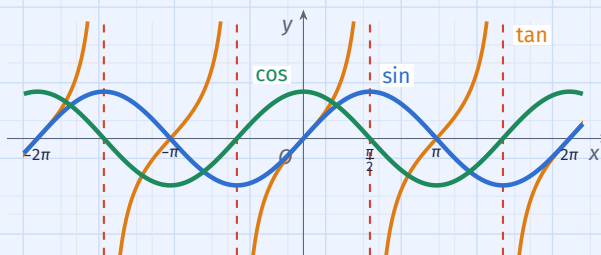


Définition : fonction périodique

Soit $T > 0$. f est T -périodique si, pour tout $x \in D_f$: $x \pm T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$: C_f est invariante par la **translation** de vecteur $T\vec{i}$. **Périodes** ($\omega \neq 0$) : $\sin, \cos$: 2π ; $\tan$: π ; $a \sin(\omega x + \varphi)$ et $a \cos(\omega x + \varphi)$: $\frac{2\pi}{|\omega|}$; $\tan(\omega x + \varphi)$: $\frac{\pi}{|\omega|}$.

Méthode : réduire l'étude

T -périodique : étudier sur un intervalle de longueur T (un **motif**), puis translater de $kT\vec{i}$. Paire ou impaire en plus : étudier sur $[0, \frac{T}{2}]$, compléter par symétrie (axe Oy ou centre O), puis translater.



$\sin$ et $\cos$: période 2π ; $\tan$: période π , asymptotes $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

La courbe de $g(x) = |\sin x|$ (en bas de la figure de l'exemple ci-dessous). $|\sin(x+\pi)| = |-\sin x| = |\sin x|$: g est π -périodique (et paire). Sur $[0, \pi]$, $g = \sin$; ailleurs, on **replie** les arches négatives au-dessus de (Ox) . En π : pente $\cos \pi = -1$ à gauche, $-\cos \pi = 1$ à droite : **point anguleux**, comme en chaque $k\pi$.

Exemple : $f(x) = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$: amplitude, période, décalage

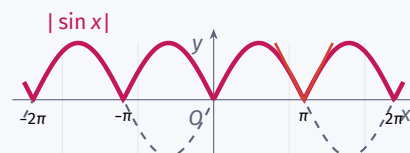
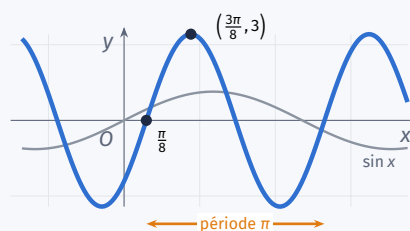
On factorise par $\omega = 2$: $f(x) = 3 \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\right)$.

Amplitude 3 : $-3 \leq f(x) \leq 3$. **Période** $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

Décalage : la courbe de $3 \sin 2x$ est **translatée de $\frac{\pi}{8}$** vers la droite.

Points clés : zéros $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$; maximum 3 en $\frac{3\pi}{8} + k\pi$; minimum -3 en $-\frac{\pi}{8} + k\pi$; $f(0) = 3 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Tracé : un motif sur $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right]$, puis des translations de $k\pi$.



en haut f (et $\sin x$ en gris) ; en bas $|\sin x|$

Attention, piège ! Le décalage de $\sin(\omega x + \varphi)$ est $-\frac{\varphi}{\omega}$, pas $-\varphi$.

$3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ est la courbe de $3 \sin 2x$ translatée de $\frac{\pi}{8}$, **pas** de $\frac{\pi}{4}$: on factorise d'abord par ω . De même, $|\sin x|$ a pour période π et **non** 2π ; et $\sin 2x$ a pour période π (et non 4π) : la période est $\frac{2\pi}{\omega}$, pas $2\pi\omega$.

★ **Astuce de concours :** deviner le centre ou l'axe grâce aux asymptotes, puis vérifier

Un centre ou un axe de symétrie transforme les asymptotes en asymptotes : il est donc **au milieu** des asymptotes verticales, et un centre est **sur** l'asymptote horizontale. Dans l'exemple, $x = 1$ et $x = 3$ donnent $a = 2$; pour g , $y = 1$ donne $b = 1$, d'où le candidat $\Omega(2, 1)$, qu'on **vérifie** par $g(4-x) + g(x) = 2$. **Bonus :** si $x = a$ est un axe et f dérivable en a , alors $f'(a) = 0$ (tangente horizontale au point de l'axe) : ici $f'(x) = \frac{-3(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}$ s'annule bien en 2.

6 Courbes construites à partir de f

La courbe de $\frac{1}{f}$

Sur un ensemble où f ne s'annule pas :

- $\frac{1}{f}$ a le **même signe** que f ; les **zéros** de f deviennent des **asymptotes verticales** de $C_{1/f}$ ($|f| \rightarrow 0$ donne $\left|\frac{1}{f}\right| \rightarrow +\infty$) ;
- si $f \rightarrow \pm\infty$, alors $\frac{1}{f} \rightarrow 0$: asymptote horizontale $y = 0$; si $f \rightarrow \ell \neq 0$, alors $\frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{\ell}$;
- sur un **intervalle** où f ne s'annule pas, f et $\frac{1}{f}$ ont des **sens de variation contraires** : un maximum $M > 0$ de f devient un minimum $\frac{1}{M}$ de $\frac{1}{f}$;
- C_f et $C_{1/f}$ se coupent **exactement** aux points d'ordonnée 1 ou -1 ($f = \frac{1}{f} \iff f^2 = 1$).

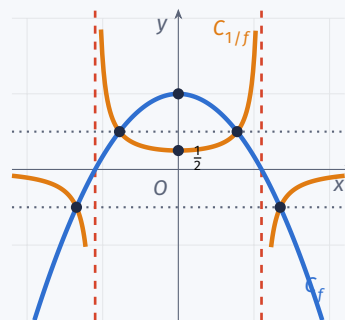
Exemple : $f(x) = \frac{4-x^2}{2}$ et $\frac{1}{f}(x) = \frac{2}{4-x^2}$

Zéros de f : ± 2 : les droites $x = -2$ et $x = 2$ sont **asymptotes verticales** de $C_{1/f}$.

Sur $]-2, 2[$: $f > 0$ a pour maximum $f(0) = 2$: $\frac{1}{f} > 0$ a pour **minimum** $\frac{1}{2}$ en 0 ; f croît sur $]-2, 0]$, donc $\frac{1}{f}$ y décroît (et inversement sur $[0, 2[$).

Pour $|x| > 2$: $f < 0$ et $f \rightarrow -\infty$ en $\pm\infty$: $\frac{1}{f} < 0$ et $\frac{1}{f} \rightarrow 0$: asymptote $y = 0$.

Points communs : $f(x) = 1 \iff x^2 = 2 : (\pm\sqrt{2}, 1)$; $f(x) = -1 \iff x^2 = 6 : (\pm\sqrt{6}, -1)$: quatre points, lus sans aucun calcul de $\frac{1}{f}$.



Les courbes de f^2 et de $\sqrt{f}$

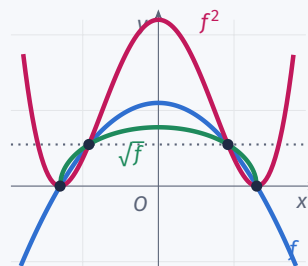
- f^2 est positive, a les mêmes zéros que f , et $(f^2)' = 2ff'$: ses tangentes horizontales sont aux **zéros** et aux **extremums** de f . En un zéro de f , C_{f^2} est **tangente** à (Ox) .
- $\sqrt{f}$ est définie là où $f \geq 0$, et a les **mêmes variations** que f ($\sqrt{\cdot}$ est croissante) ; $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$ là où $f > 0$. En un zéro **simple** a ($f(a) = 0$, $f'(a) \neq 0$) : $\frac{\sqrt{f(x)}}{x-a} = \frac{f(x)}{x-a} \times \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ tend vers $\pm\infty$: **demi-tangente verticale**.
- Ordre** : si $0 \leq f \leq 1$, alors $f^2 \leq f \leq \sqrt{f}$; si $f \geq 1$, alors $\sqrt{f} \leq f \leq f^2$: les trois courbes se croisent sur les droites $y = 0$ et $y = 1$.

Exemple : toujours $f(x) = \frac{4-x^2}{2}$: les courbes de f^2 et de $\sqrt{f}$

$f^2(x) = \frac{(4-x^2)^2}{4}$: maximum local 4 en 0 (là où f a son maximum), minimum 0 en ± 2 avec tangente horizontale ; la partie négative de f ($|x| > 2$) est « retournée » vers le haut.

$\sqrt{f}$: définie sur $[-2, 2]$; maximum $\sqrt{2}$ en 0 ; demi-tangentes verticales en $(\pm 2, 0)$: par exemple $\frac{\sqrt{f(x)}}{x+2} = \sqrt{\frac{2-x}{2(x+2)}} \xrightarrow{x \rightarrow -2^+} +\infty$.

Croisements : les trois courbes passent par $(\pm\sqrt{2}, 1)$ et $(\pm 2, 0)$. Pour $|x| < \sqrt{2}$: $f > 1$, donc $\sqrt{f} < f < f^2$; pour $\sqrt{2} < |x| < 2$: $0 < f < 1$, donc $f^2 < f < \sqrt{f}$.



Monotonie d'une composée

Si u est monotone sur I , avec $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$, et si v est monotone sur J : u et v de **même sens** $\Rightarrow v \circ u$ **croissante** sur I ; de sens **contraires** $\Rightarrow v \circ u$ **décroissante** sur I .

Méthode : étudier $v \cdot u$ sans dériver

1. Écrire $h = v \cdot u$. 2. Découper D_h en intervalles où u est monotone **et** où $u(x)$ reste dans un intervalle de monotonie de v : les points de coupure sont les extremums de u **et** les x tels que $u(x)$ est un extremum de v . 3. Appliquer la règle des signes sur chaque morceau.

Exemple : $h(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)$: deux bosses sans aucune dérivée

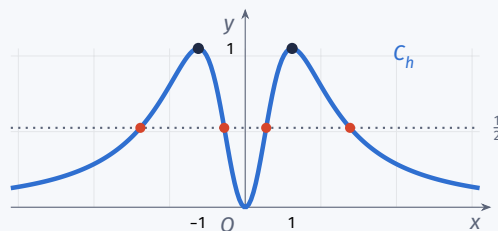
$h = v \cdot u$ avec $u(x) = \frac{\pi}{x^2+1} \in]0, \pi]$ et $v = \sin$, croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. h est paire : étude sur $[0, +\infty[$, où u **décroît**.

Coupure : $u(x) \geq \frac{\pi}{2} \iff x^2 + 1 \leq 2 \iff x \leq 1$.

Sur $[0, 1]$: u décroît, à valeurs dans $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ où $\sin$ décroît : h **croît** de $h(0) = 0$ à $h(1) = 1$.

Sur $[1, +\infty[$: u décroît, à valeurs dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ où $\sin$ croît : h **décroît** de 1 vers 0 (asymptote $y = 0$).

En prime : $h(x) = \frac{1}{2} \iff \frac{\pi}{x^2+1} \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\} \iff x^2 \in \left\{5, \frac{1}{5}\right\}$: quatre solutions $\pm\sqrt{5}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.



$h(0) = 0$: un creux entre deux maximums

Attention, piège ! Les pièges des courbes « construites ».

1. f croissante ne donne pas $\frac{1}{f}$ décroissante sur D_f : seulement sur chaque intervalle où f ne s'annule pas ($f(x) = x$: $\frac{1}{x}$ décroît sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, mais $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$). 2. Un minimum **négligé** de f disparaît de $C_{\sqrt{f}}$ (hors du domaine). 3. f^2 n'est pas $f \cdot f$: avec $f(x) = \frac{4-x^2}{2}$, $f(0)^2 = 4$ mais $f(f(0)) = f(2) = 0$.

★ Astuce de concours : commencer par les points d'ordonnée 0 et 1

Avant de tracer $\frac{1}{f}$, f^2 ou $\sqrt{f}$, placer les points de C_f d'ordonnée 1 (ils sont sur les quatre courbes), ceux d'ordonnée -1 (sur $C_{1/f}$ et C_{f^2}) et ceux d'ordonnée 0 (asymptotes de $\frac{1}{f}$, contacts de f^2 , demi-tangentes verticales de $\sqrt{f}$). En QCM : le nombre de solutions de $f(x) = \frac{1}{f(x)}$ est le nombre de points de C_f situés sur les droites $y = 1$ et $y = -1$.

7

L'essentiel de la partie 2

1 · Limites et asymptotes

Verticale $x = a : f \rightarrow \pm\infty$ quand $x \rightarrow a^\pm$.

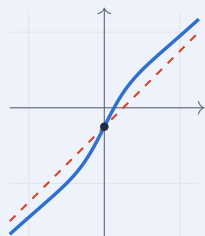
Horizontale $y = b : f \rightarrow b$ en $\pm\infty$.

Oblique $y = ax + b : f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$.

Position : signe de $f(x) - (ax + b)$; une couleur par signe.

Piège : une courbe peut couper son asymptote, même une infinité de fois.

Réflexe : asymptotes + un point lu pour reconnaître une fonction.



2 · Continuité, partie entière

Continue en $a : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$;

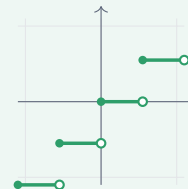
sur un intervalle : sans lever le crayon.

$E(x) = n \iff n \leq x < n + 1$: un escalier, disque plein à gauche des marches.

$x - E(x)$: dents de scie, période 1.
 $E(x) + E(-x) = -1$, sauf aux entiers (0).

Raccord en a : limite à gauche = limite à droite = $f(a)$.

Réflexe : une équation avec E ? Poser $k = E(x) \in \mathbb{Z}$.



3 · Tangentes

$f'(a) = \text{pente de } T_a : \frac{\Delta y}{\Delta x}$ lu sur deux nœuds de T_a .

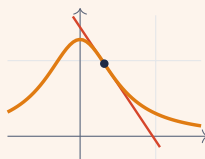
$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Point anguleux : $f'_g(a) \neq f'_d(a)$.

Demi-tangente verticale : taux $\rightarrow \pm\infty$ (racine carrée en un zéro).

Piège : la pente d'une corde n'est pas $f'(a)$.

Réflexe : T_a coupe (Oy) en $f(a) - af'(a)$.

4 · Courbes de f et de f'

$C_{f'}$, **au-dessus** de (Ox) : f croît.

$C_{f'}$, **traverse** (Ox) : extremum de f .

$C_{f'}$, **touche** (Ox) : tangente horizontale sans extremum.

Reconnaître : zéros, signes, contre-épreuve. f' constante : f affine.

Piège : signe de $f' \neq$ signe de f .

Réflexe : f' paire $\Rightarrow$ centre $(0, f(0))$.



5 · Symétries et périodes

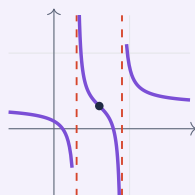
Axe $x = a : f(2a - x) = f(x)$.

Centre $\Omega(a, b) : f(2a - x) + f(x) = 2b$ (avec D_f symétrique par rapport à a).

Période de $a \sin(\omega x + \varphi) : \frac{2\pi}{|\omega|}$; de $\tan$ et de $|\sin x| : \pi$.

Piège : le décalage est $-\frac{\varphi}{\omega}$, pas $-\varphi$.

Réflexe : chercher le centre au milieu des asymptotes, puis vérifier.



6 · Courbes construites

$\frac{1}{f}$: zéros de $f \rightarrow$ asymptotes ; maximum $\rightarrow$ minimum ; $C_f \cap C_{1/f}$ sur $y = \pm 1$.

f^2 : tangente à (Ox) aux zéros de f .

$\sqrt{f}$: mêmes variations que f ; demi-tangente verticale en un zéro simple.

Composée : même sens $\nearrow$, sens contraires $\searrow$; découper d'abord !

Réflexe : placer d'abord les points d'ordonnée 0 et ± 1 .



8

Exercices de la partie 2

Repère orthonormé sauf mention contraire. Sur les figures : disque plein = point de la courbe, cercle vide = point exclu, asymptotes en pointillés rouges.

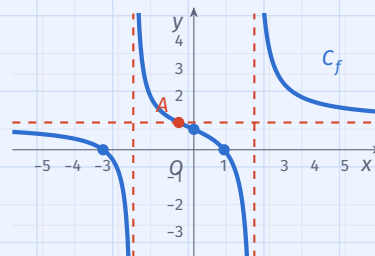
Niveau 1 • Bases ★

Exercice 19 Lire des limites et des asymptotes ★

corrigé p. 56

La courbe C_f ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Elle coupe (Ox) en -3 et en 1 , (Oy) en $(0, \frac{3}{4})$, et sa propre asymptote horizontale en un seul point A .

1. Lire les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, à gauche et à droite de -2 et de 2 . En déduire les asymptotes de C_f .
2. Lire les variations de f sur chacun des trois intervalles, puis le nombre de solutions de $f(x) = m$ suivant le réel m .
3. On admet que $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4}$. Trouver a et b à l'aide des zéros lus ; vérifier $f(0)$.
4. Étudier le signe de $f(x) - 1$. En déduire l'abscisse de A et la position de C_f par rapport à son asymptote horizontale.

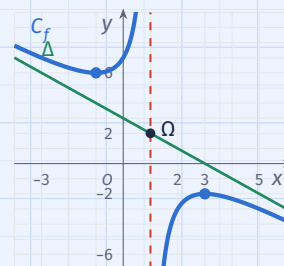


Exercice 20 Asymptote oblique : la position ★

corrigé p. 56

Soit $f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 7}{x - 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a tracé ci-contre C_f , la droite $x = 1$ et la droite Δ .

1. Conjecturer sur la figure les asymptotes, la position de C_f par rapport à Δ et les extremums locaux de f .
2. Trouver a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$.
3. Calculer les limites aux bornes de D_f ; montrer que $\Delta : y = -x + 3$ est asymptote à C_f en $\pm\infty$ et étudier leur position.
4. Montrer que $f'(x) = -\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$ et dresser le tableau de variations. Le minimum local est-il plus petit que le maximum local ?
5. Montrer que le point $\Omega(1, 2)$ est un centre de symétrie de C_f .

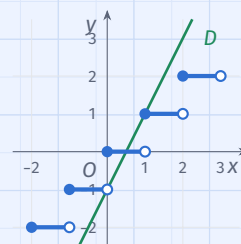


Exercice 21 Les escaliers de la partie entière ★

corrigé p. 56

On a tracé ci-contre la courbe de $x \mapsto E(x)$ sur $[-2, 3]$ et la droite $D : y = 2x - 1$.

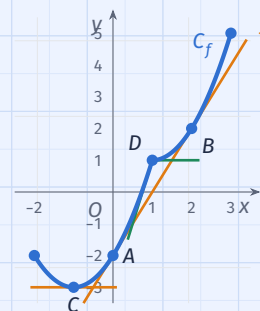
1. Donner $E(2,7)$, $E(-1,2)$, $E(-2)$ et $E(\sqrt{3})$.
2. Résoudre graphiquement, puis par le calcul (poser $k = E(x)$), l'équation $E(x) = 2x - 1$.
3. Résoudre : a) $E(2x + 3) = 1$; b) $E(x)^2 = 1$; c) $E(x) < 2,5$.
4. Montrer que $x - 1 < E(x) \leq x$ pour tout réel x . Interpréter à l'aide de deux droites.
5. Tracer sur $[0, 9[$ la courbe de $x \mapsto E(\sqrt{x})$, puis résoudre $E(\sqrt{x}) = 2$.



Exercice 22 Nombres dérivés lus sur une courbe ★

corrigé p. 57

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $[-2, 3]$. Les points $A(0, -2)$, $B(2, 2)$, $C(-1, -3)$ et $D(1, 1)$ sont sur C_f ; on a tracé la tangente T en A , qui passe par B , la tangente en C et deux demi-tangentes en D .

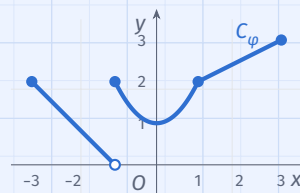


1. Lire $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f'(-1)$, puis $f'(0)$. Écrire une équation de T .
2. Lire les nombres dérivés à gauche et à droite de f en 1. f est-elle dérivable en 1 ? Équations des deux demi-tangentes en D ?
3. On admet que $f(x) = x^2 - 2|x - 1|$. Écrire $f(x)$ sans valeur absolue sur $[-2, 1]$ et sur $[1, 3]$, puis retrouver par le calcul les résultats lus.
4. Montrer que T est aussi la tangente à C_f en B . Dresser le tableau de variations de f sur $[-2, 3]$.

Exercice 23 Continuité et raccords ★

corrigé p. 57

La courbe ci-contre est celle d'une fonction φ définie sur $[-3, 3]$ par trois morceaux : un segment sur $[-3, -1[$, un arc de la parabole $y = x^2 + 1$ sur $[-1, 1]$, un segment sur $[1, 3]$.

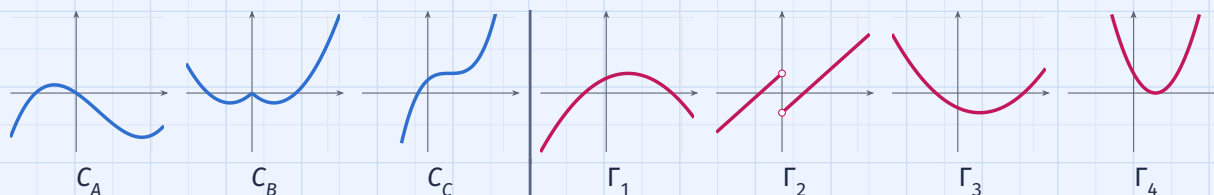


1. Lire $\varphi(-1)$ et les limites de φ à gauche et à droite de -1 . φ est-elle continue en -1 ? en 1 ?
2. Lire les pentes des deux morceaux qui se raccordent en $(1, 2)$. φ est-elle dérivable en 1 ? Comment s'appelle ce point ?
3. Soit $g(x) = x^2 + ax$ si $x \leq 2$ et $g(x) = \frac{b}{x}$ si $x > 2$ (a, b réels). a) À quelle condition g est-elle continue en 2 ? b) Trouver a et b pour que g soit dérivable en 2 ; tangente au point d'abscisse 2 ? c) Pour $a = 0$, $b = 8$, g est-elle continue en 2 ? dérivable ?

Niveau 2 · Bac ★★**Exercice 24** Associer chaque fonction à sa dérivée ★★

corrigé p. 57

Trois fonctions f_A, f_B, f_C (dérivables sauf peut-être en un point) ont pour courbes C_A, C_B, C_C ; $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ sont les courbes de quatre fonctions dérivées (fenêtre commune $[-3, 4] \times [-3, 4]$).



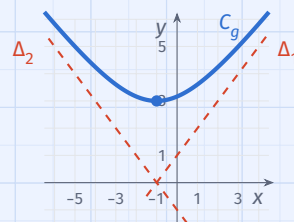
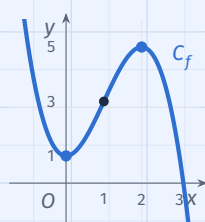
1. Associer chaque courbe C_A, C_B, C_C à la courbe de sa dérivée (justifier par le signe et les zéros).
2. Une courbe Γ_k est de trop : de quelle fonction simple, construite à partir de f_A, f_B ou f_C , est-elle la dérivée ?
3. Expliquer avec les dérivées pourquoi C_B a un point anguleux en O , et C_C une tangente horizontale en $(1, 1)$ sans extremum.
4. f_A est un polynôme de degré 3 tel que $f_A(0) = 0$. Lire sur la courbe de f'_A ses zéros et son minimum, en déduire $f'_A(x)$, puis $f_A(x)$.

Exercice 25 Un centre et un axe, démontrés ★★

corrigé p. 58

Ci-contre, les courbes de $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ (à gauche) et de $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 10}$ (à droite), avec deux droites Δ_1, Δ_2 .

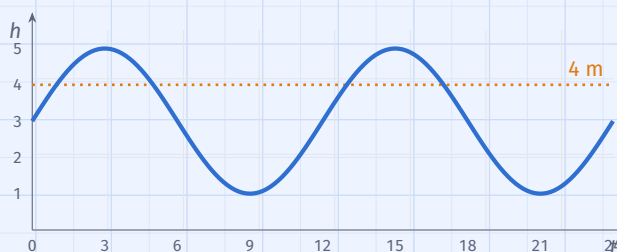
1. Conjecturer, sur chaque figure, un centre ou un axe de symétrie.
2. Montrer que $f(2-x) + f(x) = 6$ pour tout réel x ; conclure.
3. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f . Les deux points à tangente horizontale sont-ils symétriques par rapport au centre ?
4. Résoudre l'équation $f(x) = 3$ (chercher une solution évidente). Interpréter la disposition des solutions.
5. Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de C_g . Quel est le minimum de g ?
6. Montrer que $\Delta_1 : y = x + 1$ est asymptote à C_g en $+\infty$, avec C_g au-dessus. Grâce à l'axe, en déduire *sans calcul* l'asymptote Δ_2 en $-\infty$.

**Exercice 26** La marée dans un port ★★

corrigé p. 58

La courbe ci-contre donne la hauteur d'eau $h(t)$ (en m) dans un port, t heures après minuit, pendant une journée ($0 \leq t \leq 24$).

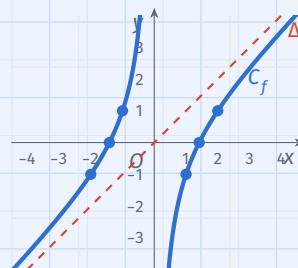
1. Lire la période, les heures et les hauteurs des pleines mers et des basses mers.
2. On admet que $h(t) = a + b \sin(\omega t)$, avec a, b, ω strictement positifs. Déterminer a, b et ω .
3. Un bateau ne peut entrer dans le port que si $h(t) \geq 4$. Pendant quelles plages horaires le peut-il ? Répondre graphiquement, puis par le calcul.
4. À quelles heures la hauteur d'eau vaut-elle 2 m ?
5. Calculer $h'(t)$. À quels instants la mer monte-t-elle le plus vite ? Écrire la tangente à la courbe au point d'abscisse 12 et interpréter son coefficient directeur (vitesse en m/h).

**Exercice 27** Les courbes de $\frac{1}{f}$, de f^2 et de $\sqrt{f}$ ★★

corrigé p. 59

Soit $f(x) = x - \frac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$; sa courbe C_f et la droite $\Delta : y = x$ sont tracées ci-contre.

1. Étudier la parité de f , ses limites, ses asymptotes et ses variations. Résoudre $f(x) = 0$, $f(x) = 1$ et $f(x) = -1$, et contrôler sur la figure.
2. Fonction $\frac{1}{f}$: ensemble de définition, limites, asymptotes et variations. Que deviennent les zéros de f ? et son asymptote verticale ?
3. Fonction f^2 : montrer qu'elle varie dans le même sens que f là où $f \geq 0$, et en sens contraire là où $f \leq 0$. Tableau de variations ; que se passe-t-il en $\pm\sqrt{2}$?



- Fonction $\sqrt{f}$: ensemble de définition, variations et limites. Étudier sa dérivabilité à droite en $-\sqrt{2}$ et en $\sqrt{2}$; interpréter.
- Montrer que les quatre courbes de f , $\frac{1}{f}$, f^2 et $\sqrt{f}$ passent par deux mêmes points A et B, et que C_f et $C_{1/f}$ ont exactement quatre points communs. Tracer les quatre courbes dans un même repère.

Exercice 28 Combien de solutions ? ★★

corrigé p. 59

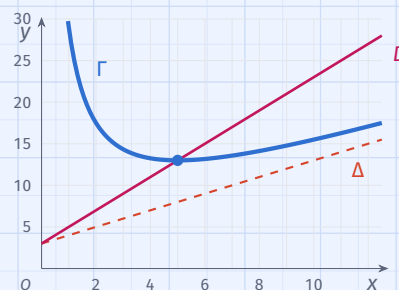
Soit $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$ et C_f sa courbe.

- Justifier que $D_f = \mathbb{R}$. Calculer les limites de f en $\pm\infty$ et interpréter graphiquement.
- Montrer que $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 - x + 1)^2}$ et dresser le tableau de variations de f .
- Étudier la position de C_f par rapport à son asymptote. En quel point la coupe-t-elle ? Tracer C_f .
- Discuter graphiquement, suivant le réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$. Attention à la valeur $m = 1$!
- Retrouver ce résultat par le calcul, en écrivant l'équation sous la forme $(1 - m)x^2 + mx + 1 - m = 0$.

Exercice 29 Coût moyen et coût marginal ★★

corrigé p. 60

Une coopérative produit par jour x centaines de flacons d'huile d'argan ($0 < x \leq 12$), pour un coût total $C(x) = x^2 + 3x + 25$ (en milliers de DH). Coût moyen : $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$; coût marginal : $C'(x)$. Figure (repère orthogonal) : la courbe Γ de C_M , la droite $D : y = C'(x)$ et une droite Δ .



- Lire la production qui rend le coût moyen minimal, et ce minimum.
- Écrire $C_M(x)$. Calculer sa limite en 0^+ et l'interpréter. En considérant C_M sur $]0, +\infty[$, montrer que $\Delta : y = x + 3$ est asymptote à Γ en $+\infty$; position ? Interpréter.
- Calculer $C'_M(x)$ et dresser le tableau de variations de C_M sur $]0, 12]$.
- Montrer que $C'_M(x) = \frac{C'(x) - C_M(x)}{x}$. En déduire qu'au minimum du coût moyen, coût moyen et coût marginal sont égaux (la droite D passe par le point le plus bas de Γ).
- La centaine de flacons est vendue 15 milliers de dirhams. Pour quelles productions la coopérative fait-elle un bénéfice (résoudre $C_M(x) \leq 15$ graphiquement, puis par le calcul) ? À partir de quel prix de vente un bénéfice est-il possible ?

Niveau 3 · Approfondissement ★★★**Exercice 30 Partie entière : résoudre en regardant ★★★**

corrigé p. 60

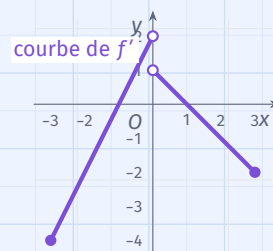
- a) Tracer dans un même repère la courbe de E et la parabole $P : y = \frac{x^2}{4}$ sur $[-1, 5]$. b) Résoudre graphiquement l'équation $E(x) = \frac{x^2}{4}$, puis la résoudre par le calcul : poser $n = E(x)$, montrer que $n \geq 0$, $x = 2\sqrt{n}$ et $n \leq 2\sqrt{n} < n + 1$.
- Soit $u(x) = E(x) + E(2x)$. a) Montrer que, pour tout entier n , $u(x) = 3n$ sur $[n, n + \frac{1}{2}[$ et $u(x) = 3n + 1$ sur $[n + \frac{1}{2}, n + 1[$. b) Tracer la courbe de u sur $[-1, 2[$. c) Résoudre $u(x) = 4$, $u(x) = -2$ et $u(x) = 5$. d) Quels entiers sont des valeurs prises par u ?

3. a) Tracer sur $[-2, 3[$ les courbes de $x \mapsto E(x^2)$ et de $x \mapsto E(x)^2$. b) Résoudre sur $[-2, 3[$ l'équation $E(x^2) = E(x)^2$.

Exercice 31 Reconstruire f à partir de la courbe de f' ★★★

corrigé p. 61

Une fonction f est continue sur $[-3, 3]$, dérivable sur $[-3, 0[$ et sur $]0, 3]$, et $f(0) = 0$. La figure donne la courbe de sa dérivée f' : deux segments, d'extrémités $(-3, -4)$, $(0, 2)$ et $(0, 1)$, $(3, -2)$ (points en 0 exclus).



1. Lire le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f et la nature de ses extremums.
2. Donner $f'(x)$ sur chaque intervalle. On admet qu'une fonction de dérivée nulle sur un intervalle y est constante. Montrer que $f(x) = x^2 + 2x$ sur $[-3, 0]$ et $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$ sur $[0, 3]$.
3. Calculer les nombres dérivés à gauche et à droite de f en 0. Interpréter.
4. Calculer $f(-3)$, $f(-1)$, $f(1)$ et $f(3)$, puis résoudre $f(x) = 0$. Écrire les tangentes à C_f aux points d'abscisses -2 et 2 , puis tracer C_f .

Exercice 32 Des arches et des points isolés ★★★

corrigé p. 61

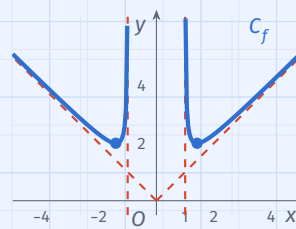
Soit $f(x) = \sqrt{\cos x + \cos^2 x}$.

1. Montrer que $f(x)$ existe si et seulement si $\cos x \geq 0$ ou $\cos x = -1$. Donner $D_f \cap]-\pi, \pi]$, puis D_f .
2. Montrer que f est paire et 2π -périodique. Sur quel ensemble suffit-il de l'étudier ?
3. Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; dresser le tableau de variations de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
4. Étudier la dérivabilité de f à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et interpréter. Tracer C_f sur $[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$.
5. Résoudre $f(x) = 1$ dans $]-\pi, \pi]$ (poser $c = \cos x$), puis discuter suivant m le nombre de solutions de $f(x) = m$ dans $]-\pi, \pi]$.

Exercice 33 Une courbe, deux asymptotes obliques ★★★

corrigé p. 62

Soit $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Sa courbe C_f est tracée ci-contre ; justifier par le calcul ce qu'elle suggère.



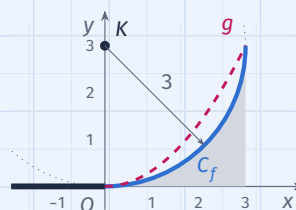
1. Déterminer D_f et étudier la parité de f .
2. Calculer les limites de f en 1^+ et en $+\infty$.
3. Montrer que la droite $y = x$ est asymptote à C_f en $+\infty$, avec C_f au-dessus. En déduire l'asymptote en $-\infty$.
4. Montrer que $f'(x) = \frac{x(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$ et dresser le tableau de variations de f .
5. Discuter suivant m le nombre de solutions de $f(x) = m$. Confirmer par le calcul en posant $X = x^2$: on obtient $X^2 - m^2X + m^2 = 0$ avec $X > 1$.

Exercice 34 La rampe de skate ★★★

corrigé p. 62

Le profil d'une rampe de skate (unité : le mètre) est la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ (le sol) et $f(x) = 3 - \sqrt{9 - x^2}$ si $0 \leq x \leq 3$.

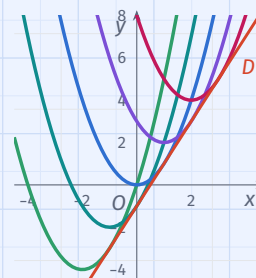
1. Montrer que, pour $0 \leq x \leq 3$, le point $M(x, f(x))$ est sur le cercle de centre $K(0, 3)$ et de rayon 3.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Pourquoi le skateur ne sent-il aucun à-coup ?
3. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 3 et interpréter.
4. Calculer $f'(x)$ sur $[0, 3[$. En quel point la pente vaut-elle 1 (rampe inclinée à 45°) ? À quelle hauteur ?
5. Un constructeur propose un profil en arc de parabole, $g(x) = \frac{x^2}{3}$ sur $[0, 3]$ (en tirets). Vérifier qu'il a les mêmes extrémités et le même raccord avec le sol en 0. Quelle est sa pente en haut ?
6. Montrer que $g(x) \geq f(x)$ sur $[0, 3]$ (poser $u = \sqrt{9 - x^2}$), puis que l'écart $g(x) - f(x)$ est maximal lorsque les deux profils ont la même pente. Calculer cet écart maximal.

**Niveau 4 · Concours ★★★★★****Exercice 35 Une famille de paraboles ★★★★★**

corrigé p. 63

Pour m réel, P_m est la parabole $y = (x - m)^2 + 2m$. La figure montre $P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2$ et une droite D .

1. Montrer que le sommet S_m de P_m décrit une droite Δ quand m décrit $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(x - m)^2 + 2m - (2x - 1) = (x - m - 1)^2$. En déduire que toutes les paraboles P_m sont tangentes à la droite $D : y = 2x - 1$; préciser le point de contact T_m et la position de P_m par rapport à D .
3. Soit $M(a, b)$ un point du plan. Montrer que $M \in P_m \iff m^2 - 2(a - 1)m + a^2 - b = 0$. En déduire le nombre de paraboles P_m passant par M suivant la position de M par rapport à D . Quelles paraboles passent par O ? par $(2, 3)$? par $(0, -2)$?
4. Montrer que deux paraboles distinctes P_m et P_p ont exactement un point commun, d'abscisse $\frac{m+p}{2} + 1$.

**Exercice 36 Tangentes communes ★★★★★**

corrigé p. 64

A. Soit $C : y = x^3$ et $C' : y = (x - 2)^3$.

1. Montrer que C' est l'image de C par une translation, mais aussi par la symétrie de centre $\Omega(1, 0)$.
2. Écrire la tangente à C au point d'abscisse a et la tangente à C' au point d'abscisse b . Montrer qu'elles sont confondues si et seulement si $a^2 = (b - 2)^2$ et $2a^3 = (b - 2)^2(2b + 2)$.
3. En déduire les tangentes communes à C et C' , leurs points de contact, et vérifier qu'elles passent par Ω .

B. Soit $P : y = x^2 + 1$ et le cercle $\Gamma : x^2 + y^2 = 1$ (réunion des courbes de $\pm\sqrt{1 - x^2}$).

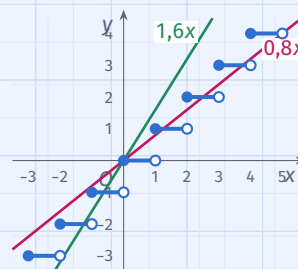
4. Montrer que la droite $y = px + q$ est tangente à P si et seulement si $p^2 = 4 - 4q$, et tangente à Γ si et seulement si $q^2 = 1 + p^2$.

5. En déduire les trois tangentes communes à P et à Γ , et leurs points de contact. Que représente la tangente horizontale ?

Exercice 37 L'escalier et les droites issues de O ★★★★★

corrigé p. 64

Pour m réel, on étudie l'équation $(E_m) : E(x) = mx$. La figure montre la courbe de E et les droites $y = 0,8x$ et $y = 1,6x$.

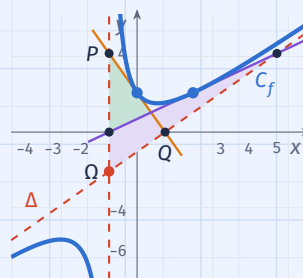


- Montrer que 0 est toujours solution. Résoudre (E_0) et (E_1) .
- Si $m < 0$, montrer que 0 est la seule solution.
- On suppose $0 < m < 1$. a) Montrer qu'un réel $x \neq 0$ est solution si et seulement si $x = \frac{k}{m}$, où k est un entier, $k \geq 1$ et $\frac{k}{k+1} < m$. b) En déduire que le nombre de solutions est le nombre d'entiers $k \geq 0$ tels que $k < \frac{m}{1-m}$. c) Combien de solutions pour $m = 0,8$? $m = 0,9$? $m = \frac{1}{2}$?
- On suppose $m > 1$. Montrer que les solutions non nulles sont les réels $-\frac{j}{m}$, où j est un entier, $j \geq 1$ et $j < \frac{m}{m-1}$. Combien de solutions pour $m = 1,6$?
- Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels (E_m) a exactement trois solutions. Interpréter graphiquement les valeurs frontières.

Exercice 38 Tangentes, asymptotes et triangle d'aire constante ★★★★★

corrigé p. 65

Soit $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. La figure montre C_f , ses asymptotes, se coupant en Ω , et deux tangentes ; chacune coupe les asymptotes en P et Q .



- Écrire $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$. Donner les asymptotes D (verticale) et Δ (oblique) de C_f et leur point commun Ω .
- Soit $t \neq -1$ et T_t la tangente à C_f en $M(t, f(t))$. Montrer que T_t coupe D en $P(-1, -2 + \frac{6}{t+1})$ et Δ en $Q(2t+1, 2t)$.
- Montrer que M est le milieu de $[PQ]$, puis que l'aire du triangle ΩPQ ne dépend pas de t .
- En déduire une construction de T_t à la règle, sans dériver ; l'appliquer en $M(2, 2)$ et contrôler avec $f'(2)$.
- Montrer qu'aucune tangente n'est parallèle à Δ , et que deux tangentes parallèles distinctes ont des points de contact symétriques par rapport à Ω .
- Pour quels points M le triangle ΩPQ est-il rectangle ? (Examiner l'angle en P , en Q et en Ω .)

9 Corrigés de la partie 2

■ Corrigé de l'exercice 19

1. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = 1$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} f = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f = +\infty$: AV $x = -2$ et $x = 2$; AH $y = 1$ (en $\pm\infty$).

2. f est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, -2[$, $]-2, 2[$, $]2, +\infty[$, qu'elle envoie sur $]-\infty, 1[$, $\mathbb{R}$ et $]1, +\infty[$. La droite $y = m$ coupe donc C_f en 2 points si $m \neq 1$ et en 1 seul point (le point A) si $m = 1$.

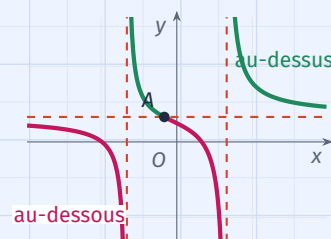
3. Les zéros -3 et 1 donnent

$$x^2 + ax + b = (x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3 : a = 2, b = -3 ;$$

$$f(0) = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \checkmark.$$

4. $f(x) - 1 = \frac{x^2 + 2x - 3 - x^2 + 4}{x^2 - 4} = \frac{2x + 1}{x^2 - 4}$, nul pour $x = -\frac{1}{2}$:

$$A\left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$



Signes de $2x + 1$ et de $x^2 - 4$: C_f est **au-dessus** de $y = 1$ sur $]-2, -\frac{1}{2}[\cup]2, +\infty[$, **au-dessous** sur $]-\infty, -2[\cup]-\frac{1}{2}, 2[$: une courbe peut couper son asymptote !

■ Corrigé de l'exercice 20

1. Conjectures : AV $x = 1$, AO Δ ; C_f au-dessus de Δ à gauche de 1, au-dessous à droite ; minimum local 6 en -1 , maximum local -2 en 3.

2. $-x^2 + 4x - 7 = (x-1)(-x+3) - 4$, donc $f(x) = -x + 3 - \frac{4}{x-1}$ ($a = -1, b = 3, c = -4$).

3. $\frac{4}{x-1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$; $-\frac{4}{x-1} \rightarrow +\infty$ en 1^- et $-\infty$ en 1^+ : $\lim_{1^-} f = +\infty$, $\lim_{1^+} f = -\infty$ (AV $x = 1$). $f(x) - (-x+3) = -\frac{4}{x-1} \rightarrow 0$: Δ est asymptote en $\pm\infty$, avec C_f au-dessus de Δ sur $]-\infty, 1[$ (car $-\frac{4}{x-1} > 0$) et au-dessous sur $]1, +\infty[$.

4. $f'(x) = -1 + \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{4 - (x-1)^2}{(x-1)^2} = -\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$ (tableau ci-dessous).

$f(-1) = 6$ et $f(3) = -2$:

le minimum local dépasse

le maximum local ! Aucune

contradiction : ils sont sur deux branches différentes, et « local » ne compare qu'aux voisins.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nwarrow$	$\nwarrow$	
		6	$+\infty$	$-\infty$	-2	$-\infty$

5. $f(2-x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$, donc $f(2-x) + f(x) = 4 = 2 \times 2$: $\Omega(1, 2)$ est centre de symétrie (c'est le point commun des deux asymptotes).

■ Corrigé de l'exercice 21

1. $E(2, 7) = 2$, $E(-1, 2) = -2$, $E(-2) = -2$, $E(\sqrt{3}) = 1$ (car $1 \leq \sqrt{3} < 2$).

2. Sur la figure, D rencontre les marches en $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(1, 1)$. Calcul : si $k = E(x) = 2x - 1$, alors $x = \frac{k+1}{2}$ et $k \leq \frac{k+1}{2} < k+1$, soit $-1 < k \leq 1$: $k \in \{0, 1\}$. $S = \{\frac{1}{2}, 1\}$.

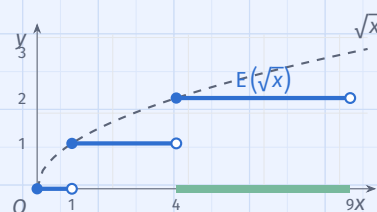
3. a) $1 \leq 2x + 3 < 2 \iff -1 \leq x < -\frac{1}{2}$. b) $E(x) = 1$ ou $E(x) = -1$:

$S = [-1, 0[\cup [1, 2[$. c) $E(x)$ est entier :

$E(x) < 2,5 \iff E(x) \leq 2 \iff x < 3$ (et non $x < 2,5$!).

4. Par définition $E(x) \leq x < E(x) + 1$, d'où $x - 1 < E(x) \leq x$: l'escalier est entre les droites $y = x - 1$ (jamais atteinte) et $y = x$ (touchée aux points entiers).

5. $E(\sqrt{x}) = k \iff k \leq \sqrt{x} < k + 1 \iff k^2 \leq x < (k + 1)^2$: marches $[0, 1[$, $[1, 4[$, $[4, 9[$ de largeurs 1, 3, 5. $E(\sqrt{x}) = 2 \iff x \in [4, 9[$.



■ Corrigé de l'exercice 22

1. $f(-1) = -3$, $f(0) = -2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f'(-1) = 0$ (tangente horizontale en C) ; $f'(0)$ est la pente de $T = (AB)$: $\frac{2 - (-2)}{2 - 0} = 2$, $T : y = 2x - 2$.

2. La demi-tangente à gauche monte de 4 carreaux pour 1 carreau : $f'_g(1) = 4$; à droite, elle est horizontale : $f'_d(1) = 0$. Comme $f'_g(1) \neq f'_d(1)$, f n'est pas dérivable en 1 : **D est un point anguleux**, de demi-tangentes $y = 4x - 3$ ($x \leq 1$) et $y = 1$ ($x \geq 1$).

3. Sur $[-2, 1]$: $f(x) = x^2 + 2x - 2$, $f'(x) = 2x + 2$, $f'(-1) = 0$, $f'(0) = 2$ ✓ ; sur $[1, 3]$: $f(x) = x^2 - 2x + 2$. En 1 : $\frac{f(x)-1}{x-1} = x + 3 \rightarrow 4$ à gauche, $= x - 1 \rightarrow 0$ à droite ✓.

4. $f(2) = 2$ et $f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$: la tangente en B est $y = 2(x - 2) + 2 = 2x - 2$, c'est T :

une même droite tangente en deux points.

$f' \geq 0$ sur $[-1, 1[$ et sur $]1, 3]$: f croît sur $[-1, 3]$ (la demi-tangente horizontale en D n'arrête pas la montée).

x	-2	-1	1	3
$f'(x)$		- 0 +		+
$f(x)$	-2		-3	5

■ Corrigé de l'exercice 23

1. $\varphi(-1) = 2$ (disque plein), $\lim_{-1^-} \varphi = 0$ (cercle vide), $\lim_{-1^+} \varphi = 2$: **saut**, φ n'est pas continue en -1. En 1, les deux morceaux arrivent en $(1, 2)$: φ est continue en 1.

2. Pente de la parabole en 1 : $2 \times 1 = 2$; pente du segment : $\frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$. $2 \neq \frac{1}{2}$: φ n'est pas dérivable en 1 ; $(1, 2)$ est un **point anguleux**.

3. a) $\lim_{2^-} g = g(2) = 4 + 2a$ et $\lim_{2^+} g = \frac{b}{2}$: g continue en

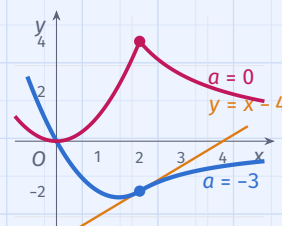
2 $\iff b = 8 + 4a$.

b) À gauche, $g'_g(2) = 2 \cdot 2 + a = 4 + a$; à droite, la pente de $x \mapsto \frac{b}{x}$ en 2 est $-\frac{b}{4}$. Il faut $b = 8 + 4a$ et $4 + a = -\frac{b}{4} = -2 - a$:

$a = -3$, $b = -4$. Alors $g(2) = -2$, $g'(2) = 1$: tangente

$y = x - 4$.

c) $a = 0$, $b = 8$ vérifient $b = 8 + 4a$: g est continue en 2 ; mais $g'_g(2) = 4 \neq g'_d(2) = -2$: point anguleux $(2, 4)$.

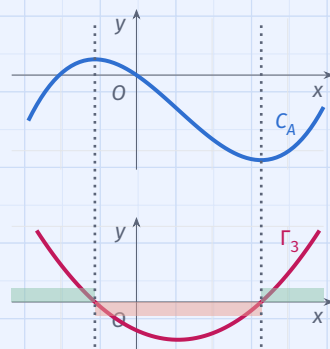


raccord lisse (bleu), raccord anguleux (rouge)

■ Corrigé de l'exercice 24

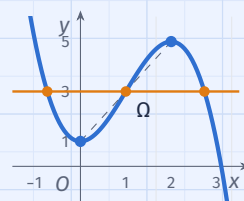
1. C_A monte, descend puis remonte, avec des tangentes horizontales en -1 et 3 : f'_A est positive, négative, positive, nulle en -1 et 3 : $C_A \leftrightarrow \Gamma_3$. C_B descend jusqu'en -1, monte jusqu'en 0, descend jusqu'en 1 puis monte : f'_B change de signe en -1, 0, 1 : $C_B \leftrightarrow \Gamma_2$. C_C monte toujours : $f'_C \geq 0$, nulle en 1 : $C_C \leftrightarrow \Gamma_4$.

2. Γ_1 est la symétrique de Γ_3 par rapport à (Ox) : c'est la dérivée de $-f_A$ (courbe de f_A retournée).
3. Γ_2 saute en 0 : les pentes à gauche et à droite de 0 valent 1 et -1, d'où le **point anguleux**. Γ_4 touche (Ox) en 1 **sans la traverser** : f'_C s'annule sans changer de signe, la tangente est horizontale mais f_C ne cesse pas de croître.
4. Γ_3 : zéros -1 et 3, minimum -1 en 1. Donc $f'_A(x) = k(x+1)(x-3)$ avec $-4k = -1$: $f'_A(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 2x - 3)$,
 puis, avec $f_A(0) = 0$: $f_A(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4}$ ($f_A(-1) = \frac{5}{12}$,
 $f_A(3) = -\frac{9}{4}$).

zéros de f' $\leftrightarrow$ tangentes horizontales

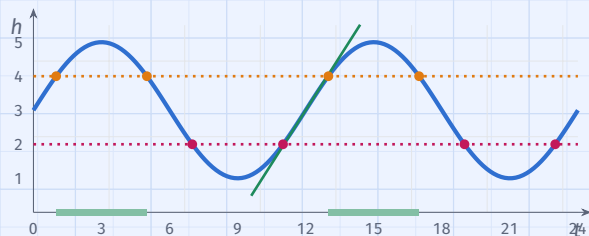
■ Corrigé de l'exercice 25

1. Conjectures : $\Omega(1, 3)$ centre de symétrie de C_f ; droite $x = -1$ axe de symétrie de C_g .
2. $f(2-x) = -(2-x)^3 + 3(2-x)^2 + 1 = x^3 - 3x^2 + 5$, d'où $f(2-x) + f(x) = 6 = 2 \times 3$; comme $D_f = \mathbb{R}$: $\Omega(1, 3)$ est centre de symétrie.
3. $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$; f décroît sur $]-\infty, 0]$, croît sur $[0, 2]$, décroît sur $[2, +\infty[$; $f(0) = 1$, $f(2) = 5$; limites $+\infty$ en $-\infty$, $-\infty$ en $+\infty$. Le milieu de $(0, 1)$ et $(2, 5)$ est $(1, 3) = \Omega$ ✓.
4. $f(1) = 3$: 1 est solution, et $-x^3 + 3x^2 - 2 = -(x-1)(x^2 - 2x - 2)$:
 $S = \{1 - \sqrt{3}, 1, 1 + \sqrt{3}\}$. La droite $y = 3$ passe par Ω : ses points communs avec C_f sont symétriques par rapport à Ω (figure).
5. $g(-2-x) = \sqrt{(x+2)^2 - 2(x+2) + 10} = \sqrt{x^2 + 2x + 10} = g(x)$ et $D_g = \mathbb{R}$: $x = -1$ est un axe. $g(x) = \sqrt{(x+1)^2 + 9} \geq 3$: minimum $g(-1) = 3$.
6. $g(x) - (x+1) = \frac{9}{\sqrt{(x+1)^2 + 9} + x + 1} \rightarrow 0^+$ en $+\infty$ (conjugué) : Δ_1 asymptote, C_g au-dessus. La symétrie $x \mapsto -2-x$ envoie Δ_1 sur $y = (-2-x) + 1$: $\Delta_2 : y = -x - 1$ en $-\infty$, C_g au-dessus.



■ Corrigé de l'exercice 26

1. Période 12 h ; pleines mers (5 m) à 3 h et 15 h ; basses mers (1 m) à 9 h et 21 h.
2. $a = \frac{5+1}{2} = 3$, $b = \frac{5-1}{2} = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{12}$:
 $h(t) = 3 + 2 \sin \frac{\pi t}{6}$ ($h(3) = 5$ ✓).
3. $h(t) \geq 4 \iff \sin \frac{\pi t}{6} \geq \frac{1}{2} \iff \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \frac{\pi t}{6} \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \iff 1 + 12k \leq t \leq 5 + 12k$:
 $t \in [1, 5] \cup [13, 17]$ (de 1 h à 5 h et de 13 h à 17 h).
4. $\sin \frac{\pi t}{6} = -\frac{1}{2} \iff \frac{\pi t}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \iff t = -1 + 12k$ ou $t = 7 + 12k$: $t \in \{7, 11, 19, 23\}$.
5. $h'(t) = \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{6}$ est maximale en $t = 0, 12, 24$ (mi-marée montante). La tangente en 12 (en vert) est $y = 3 + \frac{\pi}{3}(t - 12)$: vers midi, la mer monte d'environ 1,05 m par heure.



■ Corrigé de l'exercice 27

1. $D_f = \mathbb{R}^*$ est symétrique et $f(-x) = -f(x)$: f est **impaire**. $\lim_{0^-} f = +\infty$, $\lim_{0^+} f = -\infty$: AV $x = 0$; $f(x) - x = -\frac{2}{x} \rightarrow 0$: AO Δ : $y = x$ en $\pm\infty$. $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} > 0$: f croît sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. $f(x) = 0 \iff x^2 = 2$: $x = \pm\sqrt{2}$; $f(x) = 1 \iff x^2 - x - 2 = 0$: $x \in \{-1, 2\}$; $f(x) = -1 \iff x^2 + x - 2 = 0$: $x \in \{-2, 1\}$.

2. $\frac{1}{f(x)} = \frac{x}{x^2-2}$ sur $D_{1/f} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$. Les **zéros** $\pm\sqrt{2}$ de f deviennent des **AV** ($-\infty$ à gauche, $+\infty$ à droite) ; l'**AV** $x = 0$ de f devient un « trou » : $\frac{1}{f} \rightarrow 0$ en 0, 0 exclu. AH $y = 0$ en $\pm\infty$. $\frac{1}{f}$ varie en sens contraire de f : décroissante sur chacun des quatre intervalles.

3. $(f^2)' = 2ff'$ a le signe de f (car $f' > 0$) : f^2 décroît sur $]-\infty, -\sqrt{2}]$ et sur $]0, \sqrt{2}]$, croît sur $[-\sqrt{2}, 0[$ et sur $[\sqrt{2}, +\infty[$; $f^2 \rightarrow +\infty$ en 0 et en $\pm\infty$. En $\pm\sqrt{2}$, $f^2 = 0$ et $(f^2)' = 0$: la courbe **touche** (Ox) (tangente horizontale).

4. $f(x) = \frac{x^2-2}{x} \geq 0 \iff x \in [-\sqrt{2}, 0[\cup [\sqrt{2}, +\infty[= D_{\sqrt{f}}$. $\sqrt{f}$ varie comme f : croissante sur chaque intervalle ;

$\sqrt{f} \rightarrow +\infty$ en 0^- et en $+\infty$. En $\sqrt{2}^+$:

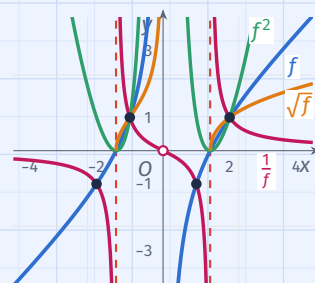
$$\frac{\sqrt{f(x)}}{x-\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{2}}{x(x-\sqrt{2})}} \rightarrow +\infty, \text{ et de même en } -\sqrt{2}^+ :$$

demi-tangentes verticales en $(\pm\sqrt{2}, 0)$ (zéros simples de f).

5. Si $f(x) = 1$, alors $\frac{1}{f} = f^2 = \sqrt{f} = 1$:

les quatre courbes passent par $A(2, 1)$ et $B(-1, 1)$.

Enfin $f = \frac{1}{f} \iff f^2 = 1 \iff f = \pm 1$: C_f et $C_{1/f}$ se coupent en $A, B, C(1, -1)$ et $D(-2, -1)$.



■ Corrigé de l'exercice 28

1. $x^2 - x + 1$ a pour discriminant $-3 < 0$: il ne s'annule pas, $D_f = \mathbb{R}$. En $\pm\infty$, $f(x) \rightarrow 1$ (termes dominants) : AH $y = 1$.

2. Le numérateur de $f'(x)$ est

$$2x(x^2 - x + 1) - (x^2 + 1)(2x - 1) = 1 - x^2, \text{ d'où}$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2} ; f(-1) = \frac{2}{3}, f(1) = 2 \text{ (tableau).}$$

3. $f(x) - 1 = \frac{x}{x^2-x+1}$, du signe de x : C_f est au-dessous de l'asymptote pour $x < 0$, au-dessus pour $x > 0$, et la coupe en $(0, 1)$.

4. f prend les valeurs de $[\frac{2}{3}, 1[$ sur $]-\infty, -1]$, celles de $[\frac{2}{3}, 2]$ sur $[-1, 1]$ et celles de $]1, 2]$ sur $[1, +\infty[$. D'où le nombre de solutions de $f(x) = m$:

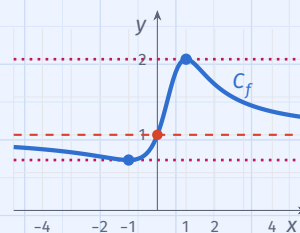
m	$< \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$[\frac{2}{3}, 1[$	1	$]1, 2[$	2	> 2
solutions	0	1	2	1	2	1	0

Piège : la valeur 1 de l'asymptote n'est atteinte qu'une fois (en 0) : la limite en $\pm\infty$ n'est pas atteinte.

5. Pour $m \neq 1$, $\Delta = m^2 - 4(1-m)^2 = (3m-2)(2-m)$:

$\Delta > 0 \iff \frac{2}{3} < m < 2$, $\Delta = 0 \iff m \in \{\frac{2}{3}, 2\}$. Pour $m = 1$, l'équation devient $x = 0$ ✓.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	1		2		1



■ Corrigé de l'exercice 29

1. Lecture : minimum pour $x = 5$ (500 flacons), coût moyen 13 milliers de DH la centaine.

2. $C_M(x) = x + 3 + \frac{25}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} C_M = +\infty$ (le coût fixe pèse sur très peu de flacons); $C_M(x) - (x + 3) = \frac{25}{x} \rightarrow 0^+$: Δ asymptote, Γ au-dessus (la part du coût fixe devient négligeable).

3. $C'_M(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{(x-5)(x+5)}{x^2}$: C_M décroît sur $]0, 5]$, croît sur $[5, 12]$; $C_M(5) = 13$, $C_M(12) = \frac{205}{12}$.

4. $C'_M(x) = \frac{x C'_M(x) - C_M(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \left(C'_M(x) - \frac{C_M(x)}{x} \right) = \frac{C'_M(x) - C_M(x)}{x}$. Au minimum, $C'_M(5) = 0$, donc $C'(5) = C_M(5) = 13$: D passe par $(5, 13)$.

5. Le bénéfice est $B(x) = 15x - C(x) = x(15 - C_M(x))$:

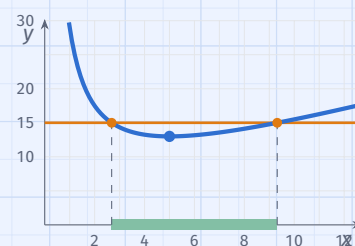
$$B(x) \geq 0 \iff C_M(x) \leq 15 \iff x^2 - 12x + 25 \leq 0,$$

$$x \in [6 - \sqrt{11}, 6 + \sqrt{11}], \text{ soit entre 268 et 932 flacons}$$

environ (la droite $y = 15$ coupe Γ en ces deux abscisses).

Un bénéfice positif ou nul n'est possible que si le prix de vente atteint le **minimum du coût moyen** : $p \geq 13$ (seuil de rentabilité).

x	0	5	12	
$C'_M(x)$		-	0	+
$C_M(x)$	$+\infty$	13	$\frac{205}{12}$	

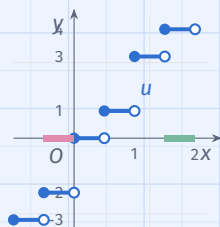


■ Corrigé de l'exercice 30

1. b) La parabole rencontre l'escalier en 4 points (figure).

Calcul : $n = E(x) = \frac{x^2}{4} \geq 0$; si $x < 0$, $E(x) \leq -1 < 0$: impossible, donc $x \geq 0$ et $x = 2\sqrt{n}$. La condition $n \leq 2\sqrt{n} < n+1$ s'écrit $\sqrt{n}(\sqrt{n} - 2) \leq 0$ (soit $n \leq 4$) et $(\sqrt{n} - 1)^2 > 0$ (soit $n \neq 1$) :

$$n \in \{0, 2, 3, 4\} \text{ et } S = \{0, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, 4\}.$$



2. a) Si $x \in [n, n + \frac{1}{2}[$, $2x \in [2n, 2n + 1[$ et $E(2x) = 2n$: $u(x) = 3n$. Si $x \in [n + \frac{1}{2}, n + 1[$, $E(2x) = 2n + 1$: $u(x) = 3n + 1$. b) Figure ci-contre.

c) $4 = 3 \times 1 + 1$: $[\frac{3}{2}, 2[$ (en vert); $-2 = 3 \times (-1) + 1$: $[-\frac{1}{2}, 0[$ (en rouge); 5 n'est ni de la forme $3n$ ni de la forme $3n + 1$: $S = \emptyset$.

d) u prend exactement les entiers qui **ne sont pas** de la forme $3n + 2$: l'escalier saute une marche sur trois.



3. b) On raisonne marche par marche. Sur $[-2, -1[$: $E(x)^2 = 4$ et $x^2 \in]1, 4]$, égalité seulement pour $x = -2$. Sur $[-1, 0[$: seulement $x = -1$. Sur $[0, 1[$: $0 = 0$, tout convient. Sur $[1, 2[$: $E(x^2) = 1 \iff x < \sqrt{2}$. Sur $[2, 3[$: $E(x^2) = 4 \iff x < \sqrt{5}$.

$$S = \{-2, -1\} \cup [0, \sqrt{2}[\cup [2, \sqrt{5}[: \text{là où les deux escaliers se superposent (figure).}$$

★ Astuce de concours

Poser $n = E(x)$: on exprime x en fonction de l'entier n , et la condition $n \leq x < n + 1$ ne laisse qu'un nombre fini de n . Piège : $E(x^2) \neq E(x)^2$ (pour $x = 1,5$: $2 \neq 1$) et $E(2x)$ vaut $2E(x)$ ou $2E(x) + 1$.

■ Corrigé de l'exercice 31

1. $f' < 0$ sur $[-3, -1[$, $f' > 0$ sur $]-1, 0[$ et $]0, 1[$, $f' < 0$ sur $]1, 3]$: f décroît sur $[-3, -1]$, croît sur $[-1, 1]$ (f est continue en 0), décroît sur $[1, 3]$. **Minimum local en -1, maximum local en 1.**

2. Le premier segment a pour pente $\frac{2-(-4)}{0-(-3)} = 2$ et passe par $(0, 2)$: $f'(x) = 2x + 2$ sur $[-3, 0[$; le second : $f'(x) = 1 - x$ sur $]0, 3]$. La fonction $x \mapsto f(x) - (x^2 + 2x)$ a une dérivée nulle sur $[-3, 0[$: elle y vaut une constante α ; la continuité en 0 donne $\alpha = f(0) = 0$. De même sur $]0, 3]$ avec $x - \frac{x^2}{2}$.

$$f(x) = x^2 + 2x \text{ sur } [-3, 0], \quad f(x) = x - \frac{x^2}{2} \text{ sur } [0, 3].$$

3. $\frac{f(x)}{x} = x + 2 \rightarrow 2$ à gauche, $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} \rightarrow 1$ à droite : **point anguleux 0**, demi-tangentes $y = 2x$ ($x \leq 0$) et $y = x$ ($x \geq 0$). Le **saut** de la courbe de f' en 0 se voit sur C_f .

4. $f(-3) = 3$, $f(-1) = -1$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(3) = -\frac{3}{2}$. $f(x) = 0 \iff x(x+2) = 0$ ($x \leq 0$) ou $x(1 - \frac{x}{2}) = 0$ ($x \geq 0$) : $S = \{-2, 0, 2\}$. $f'(-2) = -2$: $y = -2x - 4$; $f'(2) = -1$: $y = -x + 2$ (en orange).



★ Astuce de concours

Courbe de f' formée de segments $\Rightarrow C_f$ formée d'arcs de paraboles ; un **saut** de $f' \Rightarrow$ un **point anguleux** de f . Mais f' ne détermine f qu'à une constante près : la donnée $f(0) = 0$ et la continuité sont indispensables.

■ Corrigé de l'exercice 32

1. $\cos x + \cos^2 x = \cos x(1 + \cos x)$ avec $1 + \cos x \geq 0$: le produit est positif ou nul si et seulement si $\cos x \geq 0$ ou $1 + \cos x = 0$. $D_f \cap]-\pi, \pi] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \cup \{\pi\}$; D_f est la réunion des $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ et des $\{\pi + 2k\pi\}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

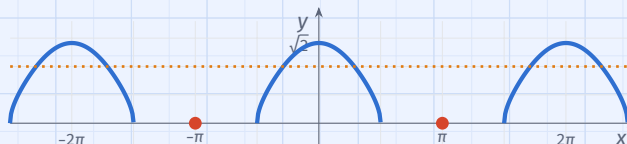
2. $\cos$ est paire et 2π -périodique, donc f aussi : on étudie f sur $[0, \frac{\pi}{2}] \cup \{\pi\}$, puis symétrie d'axe (Oy) et translations de $2k\pi$.

3. Sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $u = \cos x + \cos^2 x > 0$ et $u' = -\sin x(1 + 2\cos x)$: $f'(x) = \frac{-\sin x(1 + 2\cos x)}{2f(x)}$. Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, $f' < 0$: f décroît de $f(0) = \sqrt{2}$ à $f(\frac{\pi}{2}) = 0$; $f'(0) = 0$ (sommet de l'arche).

4. Pour $x < \frac{\pi}{2}$ proche de $\frac{\pi}{2}$, avec $h = \frac{\pi}{2} - x$: $\cos x = \sin h$ et

$$\frac{f(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = -\sqrt{\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1 + \cos x}{h}} \rightarrow -\infty.$$

f n'est pas dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$: **demi-tangente verticale**. Figure : trois arches et deux **points isolés** $(\pm\pi, 0)$.



5. $f(x) = 1 \iff c^2 + c - 1 = 0$, $c = \cos x \geq 0$: $c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, deux solutions $\pm x_0$ ($x_0 \approx 0,905$). Pour $m > 0$: $c^2 + c - m^2 = 0$, $c = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4m^2}}{2} \in [0, 1[\iff m < \sqrt{2}$. Dans $]-\pi, \pi]$: 0 solution si $m < 0$ ou $m > \sqrt{2}$, 3 si $m = 0$ ($\pm\frac{\pi}{2}, \pi$), 2 si $0 < m < \sqrt{2}$, 1 si $m = \sqrt{2}$.

Attention, piège ! le point isolé

Le facteur $1 + \cos x$ est positif, mais il s'annule en π où $\cos x < 0$ autour : $(\pi, 0)$ appartient à C_f sans qu'aucun arc n'y passe. Oublier ce point fausse le décompte pour $m = 0$.

■ Corrigé de l'exercice 33

1. $x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1 : D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, symétrique, et $f(-x) = f(x) : f$ est **paire**.

2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f = +\infty$ (numérateur $\rightarrow 1$, dénominateur $\rightarrow 0^+$) : AV $x = 1$, et $x = -1$ par parité. En $+\infty$:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \rightarrow +\infty.$$

3. $f(x) - x = \frac{x(x - \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}(x + \sqrt{x^2 - 1})} > 0$, et ce quotient tend vers 0 (il se comporte comme $\frac{x}{2x^2}$). $y = x$ est asymptote en $+\infty$, C_f au-dessus. La symétrie d'axe (Oy) donne l'asymptote $y = -x$ en $-\infty$, C_f au-dessus.

$$4. f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} = \frac{2x(x^2 - 1) - x^3}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Minimum $f(\pm\sqrt{2}) = \frac{2}{1} = 2$.

5. Lecture du tableau : **0** solution si $m < 2$, **2** si $m = 2$ ($\pm\sqrt{2}$), **4** si $m > 2$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1		1	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$

Par le calcul ($m > 0$) : $x^4 = m^2(x^2 - 1)$, soit $X^2 - m^2X + m^2 = 0$ avec $X = x^2 > 1$, $\Delta = m^2(m^2 - 4)$. Si $m > 2$: $(X_1 - 1)(X_2 - 1) = 1 > 0$ et $(X_1 - 1) + (X_2 - 1) = m^2 - 2 > 0$, donc $X_1, X_2 > 1$: quatre solutions ✓. Si $m = 2$: $X = 2$.

★ Astuce de concours

Parité : l'asymptote $y = ax + b$ en $+\infty$ devient $y = -ax + b$ en $-\infty$. Et pour comparer deux racines à 1, on étudie le signe de $(X_1 - 1)(X_2 - 1)$ et de $(X_1 - 1) + (X_2 - 1)$ avec la somme et le produit.

■ Corrigé de l'exercice 34

1. $KM^2 = x^2 + (f(x) - 3)^2 = x^2 + (9 - x^2) = 9 : KM = 3$.

2. Les deux formules donnent $f(0) = 0 : f$ est continue en 0. À gauche, f est constante : $f'_g(0) = 0$.

À droite : $\frac{3 - \sqrt{9 - x^2}}{x} = \frac{x}{3 + \sqrt{9 - x^2}} \rightarrow 0$. Donc $f'(0) = 0$: la rampe part **tangentiellement au sol**, sans cassure, d'où l'absence d'à-coup.

3. $\frac{f(x) - 3}{x - 3} = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3 - x} = \sqrt{\frac{3 + x}{3 - x}} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 3^-$: **demi-tangente verticale** en $(3, 3)$; en haut, le skateur monte à la verticale.

4. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$, et $f'(x) = 1 \iff x^2 = 9 - x^2$: en

$x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,12$, à la hauteur $3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx \boxed{0,88 \text{ m}}$.

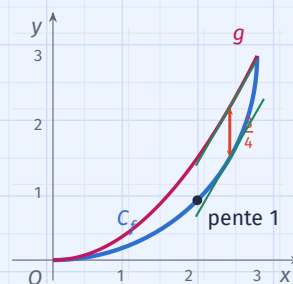
5. $g(0) = 0$, $g(3) = 3$, $g'(x) = \frac{2x}{3}$: $g'(0) = 0$ (même raccord), mais $g'(3) = 2$: en haut, la pente vaut 2, la parabole ne devient pas verticale.

6. Avec $u = \sqrt{9-x^2} \in [0, 3]$, $x^2 = 9 - u^2$ et

$$g(x) - f(x) = \frac{9-u^2}{3} - 3 + u = \frac{u(3-u)}{3} \geq 0.$$

L'écart est maximal pour $u = \frac{3}{2}$, soit $x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6$, où

$g'(x) = \sqrt{3} = f'(x)$: écart maximal $\frac{3}{4} \text{ m} = 75 \text{ cm}$.



tangentes parallèles (vert) à l'écart maximal

★ Astuce de concours

Avec $u = \sqrt{9-x^2}$, l'écart devient un trinôme : son maximum se lit au sommet. Et l'écart entre deux courbes est extrémal là où leurs tangentes sont parallèles.

■ Corrigé de l'exercice 35

1. $S_m(m, 2m)$: ses coordonnées vérifient $y = 2x$, et tout point de cette droite est un sommet : $\Delta : y = 2x$.

2.

$$(x-m)^2 + 2m - 2x + 1 = x^2 - 2(m+1)x + (m+1)^2 = (x-m-1)^2$$

✓. Donc P_m est au-dessus de D et ne la touche qu'en $x = m+1$ (racine double) :

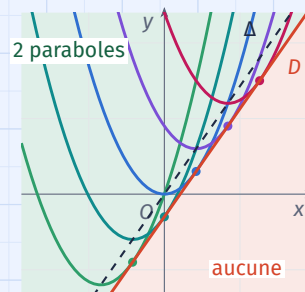
toutes les P_m sont tangentes à D , en $T_m(m+1, 2m+1)$.

3. $b = (a-m)^2 + 2m \iff m^2 - 2(a-1)m + a^2 - b = 0$, de discriminant réduit $\Delta' = (a-1)^2 - a^2 + b = b - (2a-1)$.

Deux paraboles passent par M si M est au-dessus de D ,
une seule (tangente en M à D , pour $m = a-1$) si $M \in D$,
aucune si M est au-dessous. $O : m^2 + 2m = 0$,

P_0 et P_{-2} ; $(2, 3) \in D$: P_1 seulement ; $(0, -2)$ est au-dessous de D : aucune.

4. $f_m(x) - f_p(x) = (x-m)^2 - (x-p)^2 + 2(m-p) = (p-m)(2x-m-p-2)$: si $m \neq p$, il s'annule pour la seule valeur $x = \frac{m+p}{2} + 1$.

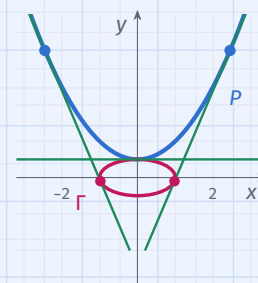
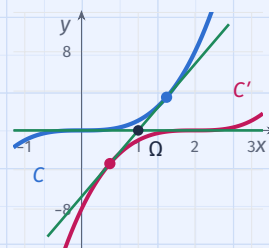


★ Astuce de concours

Famille tangente à une droite fixe : écrire « courbe - droite » comme un **carré**. « Combien de courbes par M ? » : une équation du second degré en m , dont le discriminant découpe le plan.

■ Corrigé de l'exercice 36

1. $y = (x - 2)^3$: translation de vecteur $2\vec{i}$. Et si $y = x^3$, le point $(2 - x, -y)$ vérifie $(2 - x - 2)^3 = -x^3 = -y$: la symétrie de centre $\Omega(1, 0)$ envoie aussi C sur C' .
2. $T_a : y = 3a^2x - 2a^3$; $T_b : y = 3(b - 2)^2x - (b - 2)^2(2b + 2)$.
Confondues $\iff$ mêmes pentes et ordonnées à l'origine : $a^2 = (b - 2)^2$ et $2a^3 = (b - 2)^2(2b + 2)$.
3. On remplace : $2a^3 = a^2(2b + 2)$, donc $a = 0$ ou $a = b + 1$.
Si $a = 0$: $b = 2$, droite $y = 0$ (tangente en O et en $(2, 0)$).
Si $a = b + 1$: $a = b - 2$ est impossible, donc $a = 2 - b$, $b = \frac{1}{2}$,
 $a = \frac{3}{2}$: $y = \frac{27}{4}(x - 1)$, de contacts $A(\frac{3}{2}, \frac{27}{8})$ et $B(\frac{1}{2}, -\frac{27}{8})$, symétriques par rapport à Ω . Les deux droites passent par $\Omega(1, 0)$ ✓.
4. $x^2 + 1 = px + q \iff x^2 - px + 1 - q = 0$: racine double $\iff p^2 - 4(1 - q) = 0 \iff p^2 = 4 - 4q$. Tangente à $\Gamma \iff$ distance de O à la droite égale au rayon :
 $\frac{|q|}{\sqrt{1+p^2}} = 1 \iff q^2 = 1 + p^2$.
5. $q^2 = 5 - 4q \iff q^2 + 4q - 5 = 0 \iff q = 1$ ou $q = -5$.
 $q = 1, p = 0$: $y = 1$, tangente commune en $(0, 1)$:
 P et Γ sont tangentes l'une à l'autre . $q = -5, p^2 = 24$:
 $y = \pm 2\sqrt{6}x - 5$, qui touchent P en $(\pm\sqrt{6}, 7)$ et Γ en $(\pm\frac{2\sqrt{6}}{5}, -\frac{1}{5})$ (pied de la perpendiculaire issue de O).

(repère orthogonal : Γ paraît aplati)

★ Astuce de concours

Tangente commune : soit on identifie deux tangentes en des points inconnus (A), soit on traduit « tangente » par une condition sur la droite : discriminant nul, distance au centre égale au rayon (B).

■ Corrigé de l'exercice 37

1. $E(0) = 0 = m \cdot 0$. $(E_0) : E(x) = 0 \iff x \in [0, 1[$; $(E_1) : E(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$: une **infinité** de solutions.
2. Si $m < 0$ et $x > 0$: $mx < 0 \leq E(x)$; si $x < 0$: $E(x) \leq -1 < 0 < mx$. Seule solution : 0.
3. a) Si $x \neq 0$ est solution, $k = E(x) = mx$ est un entier non nul et $x = \frac{k}{m}$. Si $k \leq -1$, $x = \frac{k}{m} < k$ (car $\frac{1}{m} > 1$), impossible. Si $k \geq 1$, $x = \frac{k}{m} > k$ et il faut $\frac{k}{m} < k + 1 \iff \frac{k}{k+1} < m$. Réciproquement, ces x conviennent. b) $\frac{k}{k+1} < m \iff k(1 - m) < m \iff k < \frac{m}{1-m}$; en comptant $k = 0$ pour la solution 0, on obtient le résultat. c) $m = 0,8 : \frac{m}{1-m} = 4, k \in \{0, 1, 2, 3\}$: 4 solutions $(0, \frac{5}{4}, \frac{5}{2}, \frac{15}{4})$; $m = 0,9 : \frac{m}{1-m} = 9$: 9 ; $m = \frac{1}{2} : \frac{m}{1-m} = 1$: 1.

4. Si $m > 1$ et $k = E(x) = mx \geq 1 : x = \frac{k}{m} < k$, impossible.

Si $k = -j \leq -1 : x = -\frac{j}{m} \in]-j, 0[$, et

$$E(x) = -j \iff -\frac{j}{m} < -j+1 \iff j(m-1) < m \iff j < \frac{m}{m-1}.$$

$$m = 1,6 : \frac{m}{m-1} = \frac{8}{3}, j \in \{1, 2\} : \boxed{3} \text{ solutions } (0, -\frac{5}{8}, -\frac{5}{4}).$$

5. Pour $0 < m < 1 : 2 < \frac{m}{1-m} \leq 3 \iff \frac{2}{3} < m \leq \frac{3}{4}$. Pour

$m > 1 : 2 < \frac{m}{m-1} \leq 3 \iff \frac{3}{2} \leq m < 2$. Ailleurs : 1 solution

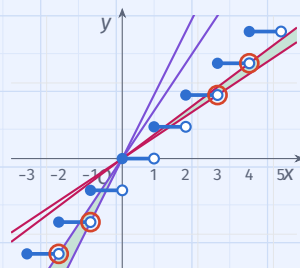
ou une infinité. $m \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Les valeurs

frontières $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 2$ sont les pentes des droites

joignant O aux **extrémités vides** $(3, 2), (4, 3), (-2, -3),$

$(-1, -2)$ des marches : quand la droite passe par un

cercle vide, une solution apparaît ou disparaît.



en vert : les pentes donnant 3 solutions

★ Astuce de concours

Faire pivoter la droite $y = mx$ autour de O et compter les marches traversées : les pentes critiques sont celles qui visent un coin de marche. Le calcul ne fait que traduire cette image.

■ Corrigé de l'exercice 38

1. $x^2 + 2 = (x+1)(x-1) + 3 : f(x) = x - 1 + \frac{3}{x+1}$ ($a = 1, b = -1, c = 3$). $\frac{3}{x+1} \rightarrow \pm\infty$ en $-1^\pm : D : x = -1$

; $f(x) - (x-1) = \frac{3}{x+1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty : \Delta : y = x - 1 ; \Omega(-1, -2)$.

2. Avec $u = t+1 \neq 0 : T_t : y = f(t) + \left(1 - \frac{3}{u^2}\right)(x-t)$. En $x = -1$ ($x-t = -u$) : $y = t-1 + \frac{3}{u} - u + \frac{3}{u} = -2 + \frac{6}{u}$ (P). Sur $\Delta : \frac{3}{u} = \frac{3}{u^2}(x-t) \iff x = t+u = 2t+1$ (Q).

3. Milieu de [PQ] : $x = \frac{-1+2t+1}{2} = t$ et

$y = \frac{-2+\frac{6}{u}+2t}{2} = t-1 + \frac{3}{u} = f(t) : M$ est le milieu de [PQ]. Le

côté [QP], porté par D, mesure $\left|\frac{6}{u}\right|$, et Q est à la distance

$|2t+1 - (-1)| = |2u|$ de D : $A = \frac{1}{2} \left|\frac{6}{u}\right| \cdot |2u| = \boxed{6}$ pour tout t.

4. Pour tracer T_t : placer Q sur Δ à l'abscisse $2x_M + 1$ et

joindre Q à M. En $M(2, 2) : Q(5, 4)$, pente

$$\frac{4-2}{5-2} = \frac{2}{3} = f'(2) = 1 - \frac{3}{9} \checkmark.$$

5. $f'(t) = 1 - \frac{3}{u^2} < 1$: jamais la pente de Δ . Si $t_1 \neq t_2 :$

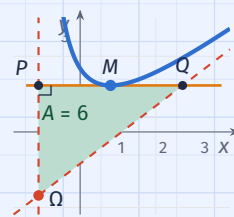
$$f'(t_1) = f'(t_2) \iff (t_1+1)^2 = (t_2+1)^2 \iff t_1+t_2 = -2 ;$$

comme $f(-2-x) + f(x) = -4$, les points de contact sont symétriques par rapport à Ω .

6. En Ω , l'angle entre D (verticale) et Δ (pente 1) vaut 45° : **jamais droit**. En P : $(PQ) \perp D \iff T_t$

horizontale $\iff u^2 = 3 : t = -1 \pm \sqrt{3}$, les deux sommets de C_f (triangle rectangle isocèle de côtés

$2\sqrt{3}$). En Q : $(PQ) \perp \Delta \iff f'(t) = -1 \iff u^2 = \frac{3}{2} : t = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$.



tangente au minimum : triangle rectangle en P

★ Astuce de concours

Pour $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$, le point de contact est le milieu du segment de tangente compris entre les asymptotes, et le triangle formé avec le centre a une aire constante $2|c|$.

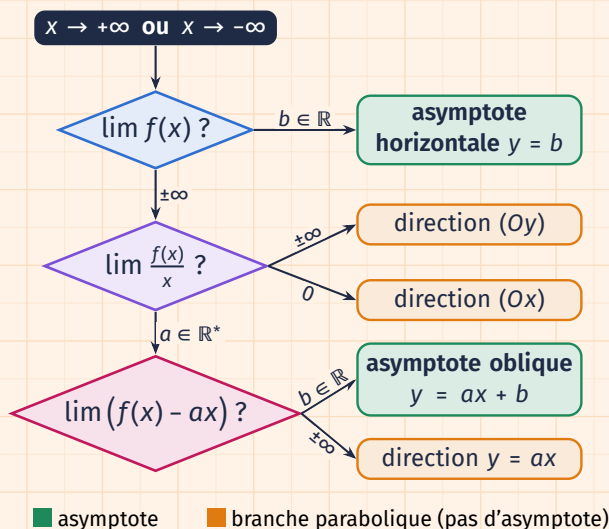
Partie 3 · Les courbes du Bac

2^e Bac : branches infinies, convexité, réciproque, ln et exp, suites et aires

2^e Bac **Objectif** : lire et tracer les courbes de l'examen national : branches infinies, convexité, réciproque, ln, exp, a^x , suites récurrentes et aires. **Prérequis** : les parties 1 et 2.

1 Branches infinies

1^{re} Bac **2^e Bac** Dès que x ou $f(x)$ part à l'infini, la courbe a une branche infinie : trois limites, dans l'ordre, la décrivent.



Définition : asymptote oblique et position

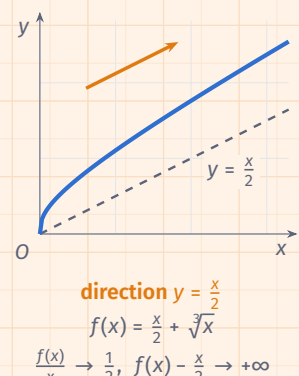
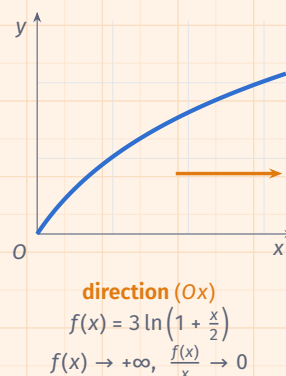
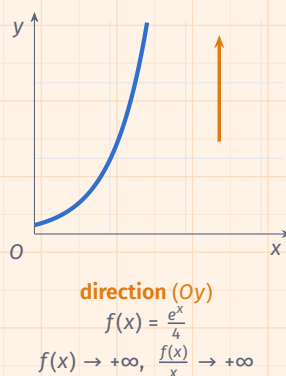
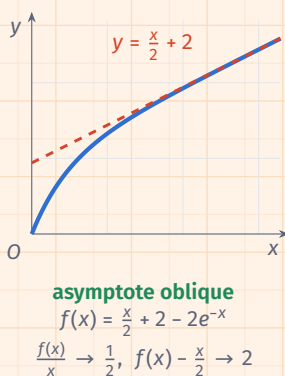
$\Delta : y = ax + b$ est **asymptote** à C_f en $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

(de même en $-\infty$) ; alors $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$.

Position : c'est le **signe** de $f(x) - (ax + b)$: positif, C_f est au-dessus de Δ .

En un réel x_0 : si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ (à droite ou à gauche), la droite $x = x_0$ est **asymptote verticale**.



Méthode : étudier une branche infinie en $+\infty$ (ou en $-\infty$)

1. $\lim f(x)$: un réel b donne l'asymptote $y = b$. 2. Sinon, $\lim \frac{f(x)}{x} : \pm\infty$ donne la direction (Oy), 0 la direction (Ox). 3. Si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a \neq 0$: $\lim (f(x) - ax)$; un réel b donne l'asymptote $y = ax + b$, une limite infinie la direction $y = ax$. 4. Pour une asymptote, étudier le **signe** de $f(x) - (ax + b)$. **Raccourci** : si l'on sait écrire $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$, les étapes 2 et 3 sont faites.

Exemple : deux asymptotes parallèles : $f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$

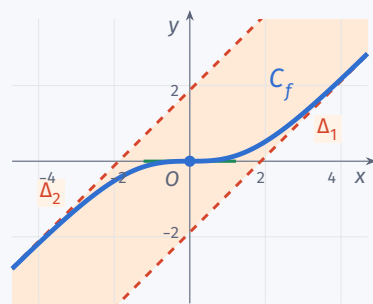
1. **Imparité.** $\frac{4}{e^{-x} + 1} = \frac{4e^x}{1 + e^x} = 4 - \frac{4}{e^x + 1}$, donc
 $f(-x) = -x - 2 + 4 - \frac{4}{e^x + 1} = -f(x)$: f est **impaire**, C_f est symétrique par rapport à O et $f(0) = 0$.

2. **En $+\infty$.** $f(x) - (x - 2) = \frac{4}{e^x + 1} \rightarrow 0$: $\Delta_1 : y = x - 2$ est asymptote, et C_f est **au-dessus** (quotient positif).

3. **En $-\infty$.** $f(x) - (x + 2) = \frac{4}{e^x + 1} - 4 = \frac{-4e^x}{e^x + 1} \rightarrow 0$:
 $\Delta_2 : y = x + 2$ est asymptote, et C_f est **au-dessous**.

4. **Bilan.** $x - 2 < f(x) < x + 2$: la courbe reste dans la bande entre Δ_1 et Δ_2 . Enfin

$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} \geq 0$: f croît, avec une tangente **horizontale** en O.



bande entre $y = x - 2$ et $y = x + 2$

Attention, piège ! branches trompeuses

1. $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$ ne donne **pas** une asymptote horizontale : $3 \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) \rightarrow +\infty$. Il faut d'abord $\lim f(x) \in \mathbb{R}$.

2. Une asymptote en $+\infty$ n'en est pas forcément une en $-\infty$: $y = x - 2$ et $y = x + 2$ ci-dessus.

3. $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a$ ne suffit pas : pour $\frac{x}{2} + \sqrt[3]{x}$, $f(x) - \frac{x}{2} \rightarrow +\infty$: **aucune** asymptote en $+\infty$.

★ Astuce de concours : la symétrie fait la moitié du travail

f **impaire** et $y = ax + b$ asymptote en $+\infty$
 $\Rightarrow y = ax - b$ asymptote en $-\infty$; f **paire** $\Rightarrow$
 $y = -ax + b$.

Ci-dessus, $y = x - 2$ donne aussitôt $y = x + 2$, sans calcul. Plus généralement, la symétrie de centre $\Omega(\alpha, \beta)$ envoie $y = ax + b$ sur $y = ax + 2\beta - 2a\alpha - b$.

2

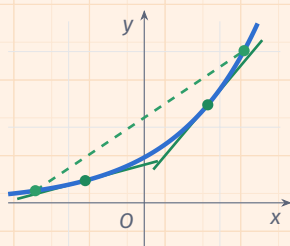
Convexité et inflexion

2^e Bac f' dit si la courbe monte ; f'' dit si elle « tourne » vers le haut ou vers le bas.

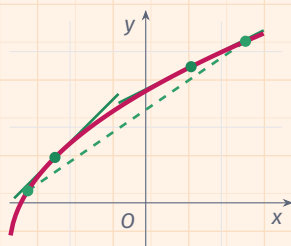
 f deux fois dérivable sur un intervalle I

- $f'' \geq 0$ sur $I \iff f'$ croissante $\iff C_f$ **convexe** sur I : elle est **au-dessus de chacune de ses tangentes** (et au-dessous de ses cordes).
- $f'' \leq 0$ sur $I \iff f'$ décroissante $\iff C_f$ **concave** : **au-dessous de ses tangentes** (et au-dessus de ses cordes).

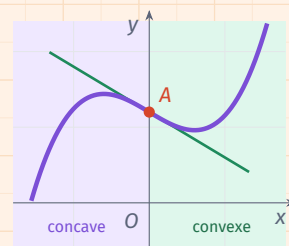
- Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0 , le point $A(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** : C_f y **traverse** sa tangente et change de concavité.



convexe ($f'' \geq 0$) : tangentes (vertes) au-dessous, corde (tirets) au-dessus



concave ($f'' \leq 0$) : tangentes au-dessus, corde au-dessous



inflexion en A : la courbe traverse sa tangente

Exemple : le triplet f, f', f'' : $f(x) = x^2 \ln x - \frac{3}{2}x^2$ sur $]0, +\infty[$

1. Dérivées. $f'(x) = 2x \ln x + x - 3x = 2x(\ln x - 1)$

et $f''(x) = 2(\ln x - 1) + 2 = 2 \ln x$.

2. Convexité. $f'' < 0$ sur $]0, 1[$, $f'' > 0$ sur $]1, +\infty[$: C_f est **concave** sur $]0, 1[$ et **convexe** sur $]1, +\infty[$.

3. Inflexion. f'' s'annule en changeant de signe en 1 : $I(1, -\frac{3}{2})$, $f'(1) = -2$, tangente

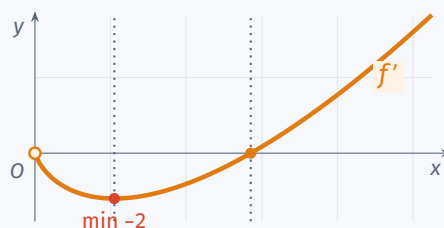
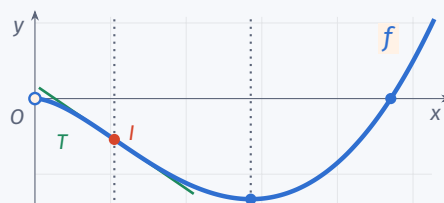
$T : y = -2x + \frac{1}{2}$. À gauche de I, la courbe est sous T ; à droite, au-dessus : elle la **traverse**.

4. Variations. f' a le signe de $\ln x - 1$:

minimum $f(e) = -\frac{e^2}{2} \approx -3,69$;

$f(x) = 0 \iff \ln x = \frac{3}{2} \iff x = e^{\frac{3}{2}} \approx 4,48$; en 0^+ , $f(x) = x \cdot x \ln x - \frac{3}{2}x^2 \rightarrow 0$ (point O exclu).

5. Lecture croisée. L'inflexion de f (en 1) est le **minimum** de f' et le **zéro** de f'' ; le **minimum** de f (en e) est le **zéro** de f' .



Méthode : étudier la convexité

1. Calculer $f''(x)$ et la **factoriser**. **2.** Dresser le tableau de signe de f'' : convexe où $f'' \geq 0$, concave où $f'' \leq 0$. **3.** En chaque x_0 où f'' change de signe : point d'inflexion $A(x_0, f(x_0))$, tangente $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. **4.** Position courbe/tangente : sans calcul, elle se lit sur la concavité de part et d'autre de x_0 .

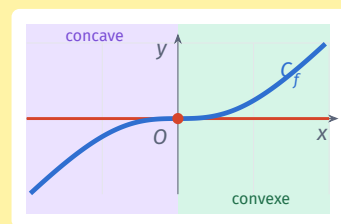
Attention, piège ! lire la convexité sur la courbe de f'

f est convexe là où f' est **croissante**, pas là où f' est positive : sur $]1, e[$, $f' < 0$ (la courbe descend) mais f' croît, donc C_f est déjà **convexe**. Un point d'inflexion de f se repère à un **extremum** de f' (le minimum -2 en 1), pas à un zéro de f' . Et $f''(x_0) = 0$ ne suffit pas : il faut un **changement de signe**.

★ **Astuce de concours : un centre de symétrie est (presque toujours) un point d'inflexion**

Si $\Omega(a, b)$ est centre de symétrie de C_f , alors $f(2a - x) + f(x) = 2b$. On dérive : $f'(2a - x) = f'(x)$, puis encore : $f''(2a - x) = -f''(x)$. Donc $f''(a) = 0$ et f'' prend des valeurs **opposées** de part et d'autre de a : dès que f'' garde un signe à droite de a , Ω est un **point d'inflexion**, sans calculer $f''(a)$.

Exemple : $f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^{x+1}}$ (section 1) est impaire et $f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 1)}{(e^{x+1})^3} > 0$ pour $x > 0$: O est un point d'inflexion, à tangente **horizontale** ($f'(0) = 0$) : la courbe traverse (Ox) « à plat ». En QCM : sur une courbe symétrique, la tangente au centre est la tangente d'inflexion.



inflexion en O , tangente $y = 0$

3

Continuité, bijection, réciproque

2^e Bac Compter des solutions sur une courbe, puis tracer une réciproque que l'on ne sait pas écrire.

TVI et bijection : ce que la courbe montre

Si f est **continue** sur $[a, b]$, tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a **au moins un** antécédent dans $[a, b]$: la droite $y = k$ coupe la courbe. Si de plus f est **strictement monotone** sur un intervalle I , f réalise une **bijection** de I sur $J = f(I)$ (bornes ou limites) : chaque $k \in J$ a **exactement un** antécédent dans I .

Méthode : compter les solutions de $f(x) = k$

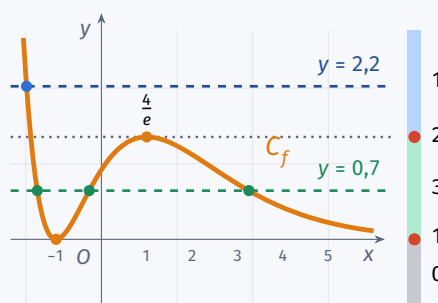
1. Découper D_f en intervalles où f est continue et strictement monotone. 2. Écrire l'image de chacun, en distinguant les bornes **atteintes** (crochet fermé) et les limites **non atteintes** (crochet ouvert). 3. Pour chaque k , compter les images qui contiennent k : c'est le nombre de points communs à C_f et à la droite $y = k$.

Exemple : $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$: combien de solutions pour $f(x) = k$?

$f'(x) = (2(x + 1) - (x + 1)^2)e^{-x} = (x + 1)(1 - x)e^{-x}$;
 $f(-1) = 0$, $f(1) = \frac{4}{e} \approx 1,47$; $f(x) \rightarrow +\infty$ en $-\infty$ et
 $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x} \rightarrow 0$ en $+\infty$ (croissances comparées).

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		0	$\frac{4}{e}$		0

Images : $]-\infty, -1] \rightarrow [0, +\infty[$, $[-1, 1] \rightarrow [0, \frac{4}{e}]$,
 $[1, +\infty[\rightarrow]0, \frac{4}{e}]$ (la limite 0 n'est pas atteinte),
d'où le nombre de solutions (tableau ci-contre).



la bande de droite : nombre de solutions selon k

k	$k < 0$	$k = 0$	$0 < k < \frac{4}{e}$	$k = \frac{4}{e}$	$k > \frac{4}{e}$
sol.	0	1	3	2	1

Attention, piège ! bornes atteintes ou non

La limite 0 en $+\infty$ n'est **jamais atteinte** : $f(x) = 0$ n'a qu'une solution (-1), alors que $f(x) = 0,001$ en a trois. Pour $k = \frac{4}{e}$: deux solutions et non trois (1, et une seule à gauche de -1). Sans **continuité**, aucune conclusion : une courbe peut « sauter » par-dessus la droite $y = k$.

Courbe de la réciproque (repère orthonormé)

Si f est continue et strictement monotone de I sur J : $M(a, b) \in C_f \iff M'(b, a) \in C_{f^{-1}}$; $C_{f^{-1}}$ est la **symétrique** de C_f par rapport à $\Delta : y = x$. Si $f'(a) = m \neq 0$, la tangente en M' a pour pente $\frac{1}{m}$: $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$. Si $f'(a) = 0$ (tangente horizontale en M), $C_{f^{-1}}$ a une tangente **verticale** en M' .

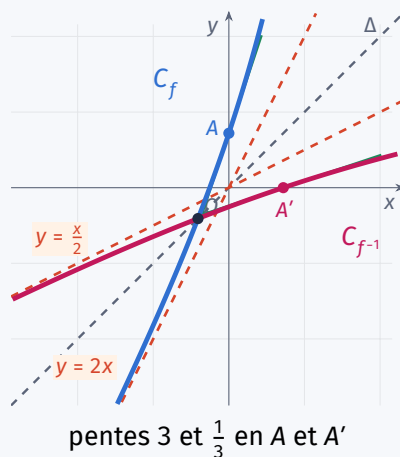
Exemple : tracer f^{-1} sans la connaître : $f(x) = 2x + e^x$

1. Bijection. $f'(x) = 2 + e^x > 0$, $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$: f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On ne sait pas écrire $f^{-1}(x)$... et pourtant on la trace.

2. Un point, une pente. $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$: $f^{-1}(1) = 0$ et $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{3}$. La tangente $y = 3x + 1$ en $A(0, 1)$ devient $y = \frac{x-1}{3}$ en $A'(1, 0)$.

3. Branches. En $-\infty$: $f(x) - 2x = e^x \rightarrow 0^+$: asymptote $y = 2x$, courbe au-dessus. Par symétrie, $C_{f^{-1}}$ a pour asymptote $y = \frac{x}{2}$ en $-\infty$, et elle est au-dessous. En $+\infty$: $\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$: direction (Oy) pour C_f , donc direction (Ox) pour $C_{f^{-1}}$.

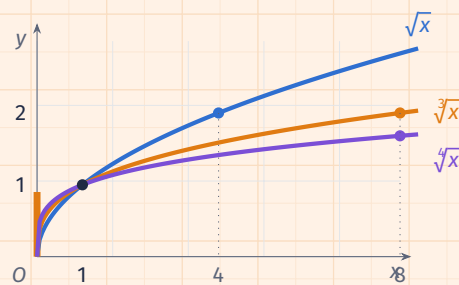
4. Sur Δ . f étant croissante, C_f et $C_{f^{-1}}$ ne se coupent que sur Δ , là où $f(x) = x$, soit $x + e^x = 0$: une seule solution $\gamma \approx -0,567$.



pentés 3 et $\frac{1}{3}$ en A et A'

Définition : racine n-ième ($n \geq 2$)

$x \mapsto x^n$ est une bijection continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$; sa réciproque est $x \mapsto \sqrt[n]{x}$: $y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n$ ($x, y \geq 0$). Comme $(x^n)' = nx^{n-1}$ s'annule en 0, la courbe de $\sqrt[n]{x}$ a une **demi-tangente verticale** en O ; $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ pour $x > 0$. On lit $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[4]{8} \approx 1,68$; au-delà de 1, plus n est grand, plus la courbe est basse ; sur $]0, 1[$, c'est l'inverse.

**★ Astuce de concours : les branches de f^{-1} se lisent sur celles de f**

La symétrie par rapport à Δ échange x et y , donc aussi les branches infinies :

C_f	asymptote $x = a$	asymptote $y = ax + b$ ($a \neq 0$)	direction (Oy)	direction $y = ax$
$C_{f^{-1}}$	asymptote $y = a$	asymptote $y = \frac{x-b}{a}$	direction (Ox)	direction $y = \frac{x}{a}$

Avec $f(x) = 2x + e^x$: $y = 2x$ devient $y = \frac{x}{2}$ et (Oy) devient (Ox), comme sur la figure.

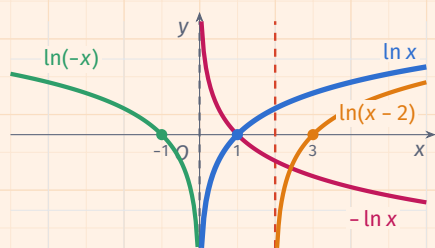
4

Les courbes de $\ln$ et $\exp$

2^e Bac Deux courbes-mères, leurs transformées, leurs tangentes et leur course vers l'infini.

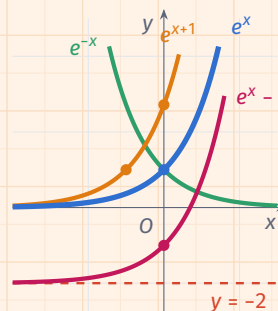
Les deux courbes-mères

$\ln$: définie sur $]0, +\infty[$, croissante, **concave** ; points $(1, 0)$ et $(e, 1)$; asymptote $x = 0$; direction (Ox) en $+\infty$. $\exp$: définie sur $\mathbb{R}$, croissante, **convexe** ; points $(0, 1)$ et $(1, e)$; asymptote $y = 0$ en $-\infty$; direction (Oy) en $+\infty$. Elles sont symétriques par rapport à $y = x$.



$\ln(x-2)$: translation de $+2$ (asymptote $x = 2$) ; $-\ln x$: symétrie d'axe (Ox) ;

$\ln(-x)$: symétrie d'axe (Oy) ; $\ln|x|$: réunion de $\ln x$ et de $\ln(-x)$.



e^{-x} : symétrie d'axe (Oy) ; $e^x - 2$: translation de -2 (asymptote $y = -2$) ;

e^{x+1} : translation de -1 ou dilatation verticale de rapport e .

Méthode : tracer une transformée de $\ln$ ou de $\exp$

1. Écrire la fonction à partir de $\ln x$ ou e^x par des étapes simples : $x \mapsto x - a$ (translation horizontale), $x \mapsto -x$ (symétrie d'axe (Oy)), $+b$ (translation verticale), signe $-$ devant (symétrie d'axe (Ox)). 2. Suivre l'**asymptote** et le **point-repère** ($(1, 0)$ pour $\ln$, $(0, 1)$ pour $\exp$). 3. Contrôler le domaine et le sens de variation.

Exemple : $g(x) = \ln(4 - 2x)$ en trois gestes

Domaine : $4 - 2x > 0 \iff x < 2$, $D_g =]-\infty, 2[$.

Écriture : $\ln(4 - 2x) = \ln(2(2 - x)) = \ln 2 + \ln(2 - x)$.

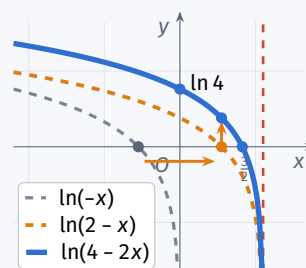
Geste 1 : $\ln x \rightarrow \ln(-x)$, symétrie d'axe (Oy) (point-repère $(-1, 0)$).

Geste 2 : $\ln(-x) \rightarrow \ln(-(x - 2)) = \ln(2 - x)$, translation de $+2$: asymptote $x = 2$, point $(1, 0)$. **Geste 3** : $+\ln 2$, translation verticale : point $(1, \ln 2)$.

Bilan : g décroît sur D_g ; asymptote $x = 2$;

$g(x) = 0 \iff 4 - 2x = 1 \iff x = \frac{3}{2}$; $g(0) = \ln 4$;

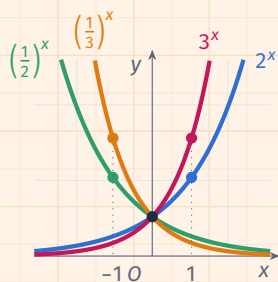
en $-\infty$, $g(x) \rightarrow +\infty$ et $\frac{g(x)}{x} \rightarrow 0$: direction (Ox) .



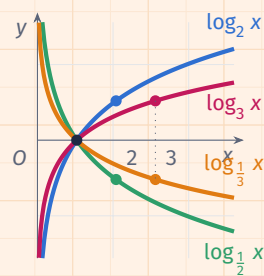
Définition : exponentielle et logarithme de base a ($a > 0$, $a \neq 1$)

$a^x = e^{x \ln a}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ pour $x > 0$: deux bijections réciproques ($y = a^x \iff x = \log_a y$). Si $a > 1$, elles sont **croissantes** ; si $0 < a < 1$, **décroissantes**. Toutes les courbes $y = a^x$ passent par $(0, 1)$ et $(1, a)$; toutes les courbes $y = \log_a x$ par $(1, 0)$ et $(a, 1)$. $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$: les courbes de a^x et $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ sont symétriques par rapport à (Oy) ; $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$: symétrie

d'axe (Ox).



a^x : toutes passent par $(0, 1)$; asymptote $y = 0$



$\log_a x$: toutes passent par $(1, 0)$; asymptote $x = 0$

Les deux inégalités-reines, vues sur les courbes

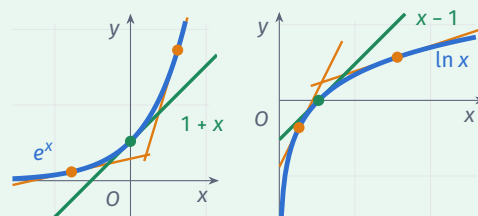
$\exp$ est convexe : sa courbe est au-dessus de **toutes** ses tangentes $y = e^a(x - a + 1)$; $\ln$ est concave : sa courbe est au-dessous de toutes ses tangentes $y = \frac{x}{a} + \ln a - 1$. Les plus utiles (en vert) :

$$e^x \geq 1 + x$$

$$\ln x \leq x - 1$$

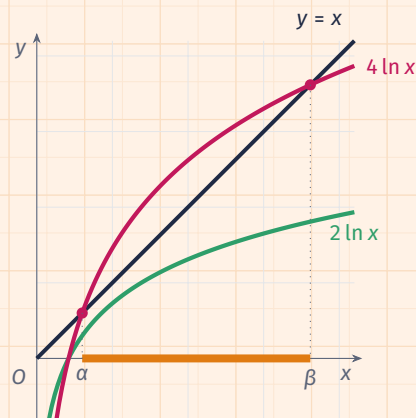
avec égalité seulement en 0 et en 1.

Application : $\ln(0,99) \leq -0,01$, donc $0,99^{100} \leq e^{-1}$; et $e^{0,1} \geq 1,1$.



Croissances comparées, vues autrement. Comparer e^x et x^n ($x > 0$) revient à comparer leurs logarithmes : x et $n \ln x$, c'est-à-dire une **droite** et une courbe **concave**, qui finit toujours sous la droite.

- $x - 2 \ln x$ a pour minimum $2 - 2 \ln 2 > 0$ (en 2) : la droite reste au-dessus de $2 \ln x$, donc $e^x > x^2$ sur $]0, +\infty[$.
- $x = 4 \ln x$ a deux solutions $\alpha \approx 1,43$ et $\beta \approx 8,61$: $x^4 > e^x$ exactement sur $]\alpha, \beta[$ (en orange), puis l'exponentielle l'emporte pour toujours.



Attention, piège ! trois confusions

1. $-\ln x$ (symétrie d'axe (Ox), sur $]0, +\infty[$) n'est pas $\ln(-x)$ (symétrie d'axe (Oy), sur $]-\infty, 0[$).
2. e^{-x} (axe (Oy), toujours positive) n'est pas $-e^x$ (axe (Ox), toujours négative).
3. $\ln(x - 2)$ est décalée de 2 vers la **droite** : son asymptote est $x = 2$, et non $x = -2$.

★ Astuce de concours : dilater, c'est traduire

Pour $k > 0$: $\ln(kx) = \ln x + \ln k$: la dilatation horizontale de $C_{\ln}$ est une **translation verticale**. De même $e^{x+a} = e^a e^x$: la translation horizontale de $C_{\exp}$ est une **dilatation verticale**. Ainsi les courbes de $\ln(3x)$, $\ln(5x)$, $\ln \frac{x}{2}$ sont toutes des translatées verticales de celle de $\ln$.

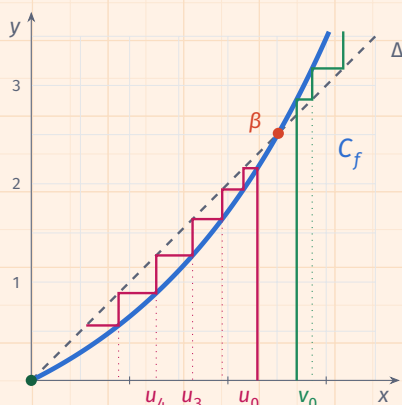
5

Suites récurrentes en images

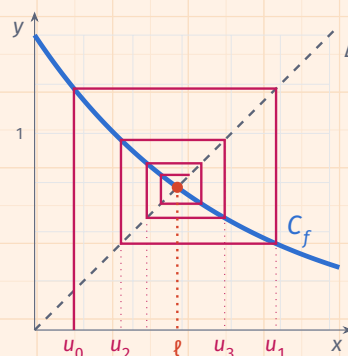
2^e Bac La courbe de f et la droite $y = x$ suffisent pour voir où va la suite.

Méthode : construire les termes de $u_{n+1} = f(u_n)$

On trace C_f et $\Delta : y = x$. On place u_0 sur (Ox) , on monte (ou descend) **verticalement** jusqu'à C_f : l'ordonnée obtenue est u_1 . On rejoint Δ **horizontalement** : l'abscisse du point atteint est u_1 , qu'on projette sur (Ox) . On recommence. **Conjectures** : si C_f est au-dessus de Δ , $u_{n+1} > u_n$; au-dessous, $u_{n+1} < u_n$. f croissante : **escalier** (suite monotone) ; f décroissante : **escargot** (termes alternés autour de la limite). Les limites possibles sont les abscisses des points fixes ($f(\ell) = \ell$), à l'intersection de C_f et Δ .



escalier : $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$, croissante ; $u_0 = 2,3$ descend vers 0, $v_0 = 2,7$ monte et s'échappe ; $\beta \approx 2,51$ repousse.



escargot : $f(x) = \frac{3}{2}e^{-x}$, décroissante ; $u_0 = 0,2$; les termes encadrent tour à tour $\ell \approx 0,726$ ($\ell e^\ell = \frac{3}{2}$).

Exemple : escalier descendant : $u_0 = 2$, $u_{n+1} = e^{\frac{u_n}{2}} - 1$

$f(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$ est continue et **croissante** ; ses points fixes sont 0 et $\beta \approx 2,51$.

- **Stabilité** : $f(0) = 0$ et $f(2) = e - 1 \approx 1,72$, donc $f([0, 2]) = [0, e - 1] \subset [0, 2]$: par récurrence, $0 \leq u_n \leq 2$.
- **Monotonie** : $g(x) = f(x) - x$ vérifie $g'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - 1$, nul en $2 \ln 2$: g décroît puis croît sur $[0, 2]$, avec $g(0) = 0$ et $g(2) = e - 3 < 0$, donc $g < 0$ sur $]0, 2]$. Ainsi $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leq 0$: la suite est **décroissante** (la courbe est sous Δ).
- **Limite** : décroissante et minorée par 0, elle converge vers $\ell \in [0, 2]$ avec $f(\ell) = \ell$ (f continue). Le seul point fixe de $[0, 2]$ est 0 : $\lim u_n = 0$. (Avec $u_0 = 3 > \beta$, la suite croît et tend vers $+\infty$: la figure le laissait prévoir.)

Attention, piège ! le sens de la suite

f croissante ne donne pas une suite croissante, mais une suite **monotone**, dont le sens dépend du départ : avec la même $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$, la suite issue de 2,3 décroît, celle issue de 2,7 croît. C'est le signe de $u_1 - u_0$ (ou de $f(x) - x$) qui décide. Et un point fixe n'est pas toujours la limite : β **repousse** les termes.

★ Astuce de concours : la pente au point fixe (pour conjecturer)

Près d'un point fixe ℓ , la courbe ressemble à sa tangente. Si $|f'(\ell)| < 1$, les termes s'en **approchent** ; si $|f'(\ell)| > 1$, ils s'en **éloignent** ; si $f'(\ell) < 0$, ils tournent autour (escargot). Ici $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{f(x)+1}{2}$:

$f'(0) = \frac{1}{2}$ (attire) et $f'(\beta) = \frac{\beta+1}{2} \approx 1,76$ (repousse).

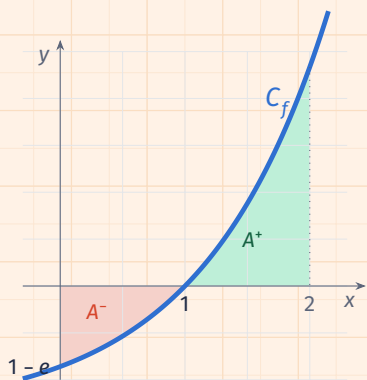
6

Aires et courbes

2^e Bac Une intégrale se lit sur la figure avant de se calculer.

Définition : intégrale et aire (repère orthogonal)

Si f est continue sur $[a, b]$ ($a < b$), $\int_a^b f(x) dx$ est l'**aire algébrique** entre C_f et (Ox) : les parties au-dessus de (Ox) comptent **positivement**, celles au-dessous **négativement** : $\int_a^b f = A^+ - A^-$.
Si $f \geq g$ sur $[a, b]$, l'aire entre C_f , C_g et les droites $x = a$, $x = b$ vaut $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ **unités d'aire** ; une unité d'aire vaut $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.



Aire algébrique : $f(x) = e^x - e$ sur $[0, 2]$. $f < 0$ sur $[0, 1]$, $f > 0$ sur $]1, 2]$. Une primitive est $F(x) = e^x - ex$:

$$A^- = - \int_0^1 f = -[F(1) - F(0)] = -(0 - 1) = \boxed{1},$$

$$A^+ = \int_1^2 f = F(2) - F(1) = e^2 - 2e,$$

donc $\int_0^2 (e^x - e) dx = e^2 - 2e - 1 \approx 0,95$, alors que l'aire coloriée totale vaut $e^2 - 2e + 1 = (e - 1)^2 \approx 2,95$.

Méthode : aire entre deux courbes

1. Résoudre $f(x) = g(x)$: abscisses des points d'intersection. 2. Étudier le **signe** de $f(x) - g(x)$ sur chaque intervalle (position des courbes). 3. Intégrer « courbe du haut moins courbe du bas » sur chaque intervalle, puis additionner. 4. Convertir en cm^2 : multiplier par l'aire d'une unité.

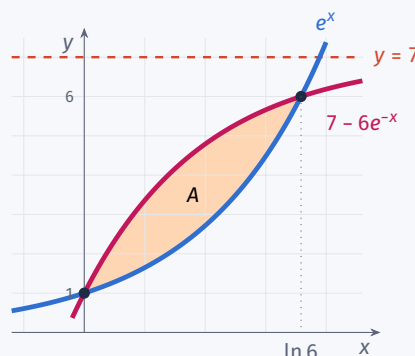
Exemple : la « lentille » entre $y = e^x$ et $y = 7 - 6e^{-x}$ (unité graphique : 2 cm)

1. Intersections. $e^x = 7 - 6e^{-x} \iff e^{2x} - 7e^x + 6 = 0 \iff (e^x - 1)(e^x - 6) = 0$: $x = 0$ ou $x = \ln 6$; points $(0, 1)$ et $(\ln 6, 6)$.

2. Position. $(7 - 6e^{-x}) - e^x = -e^{-x}(e^x - 1)(e^x - 6) \geq 0$ sur $[0, \ln 6]$: la courbe de $7 - 6e^{-x}$ est au-dessus.

3. Calcul. $A = \int_0^{\ln 6} (7 - 6e^{-x} - e^x) dx = [7x + 6e^{-x} - e^x]_0^{\ln 6} = (7 \ln 6 + 1 - 6) - (6 - 1)$, soit
 $A = 7 \ln 6 - 10 \approx 2,54$ u.a.

4. En cm^2 . Une unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$:
 $A = 28 \ln 6 - 40 \approx 10,17 \text{ cm}^2$.

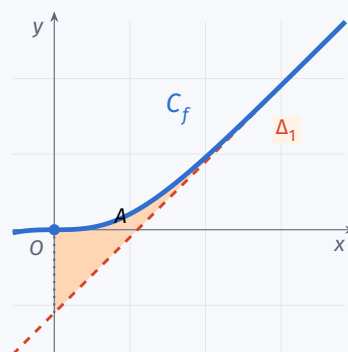
**Exemple : une aire « infinie » qui est finie (la fonction de la section 1)**

Pour $f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^x + 1}$, l'écart à l'asymptote

Δ_1 : $y = x - 2$ est $f(x) - (x - 2) = \frac{4}{e^x + 1} = \frac{4e^{-x}}{1 + e^{-x}} > 0$, de la forme $-4 \frac{u'}{u}$ avec $u = 1 + e^{-x}$, donc de primitive $-4 \ln(1 + e^{-x})$. Pour $\lambda > 0$, l'aire entre C_f , Δ_1 et les droites $x = 0$, $x = \lambda$ vaut

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{4 dx}{e^x + 1} = 4 \ln 2 - 4 \ln(1 + e^{-\lambda}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \boxed{4 \ln 2}.$$

Le domaine est **illimité**, mais son aire tend vers $4 \ln 2 \approx 2,77$ u.a. ; par imparité, le domaine entre C_f et Δ_2 sur $]-\infty, 0]$ a la même aire.



aire jaune : $4 \ln 2$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$

Parité, périodicité et intégrales

Sur un intervalle symétrique $[-a, a]$: **f impaire** $\Rightarrow \int_{-a}^a f = 0$

(les deux aires se compensent, figure) ; **f paire**

$\Rightarrow \int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$. Si f est **T -périodique**, l'intégrale sur une

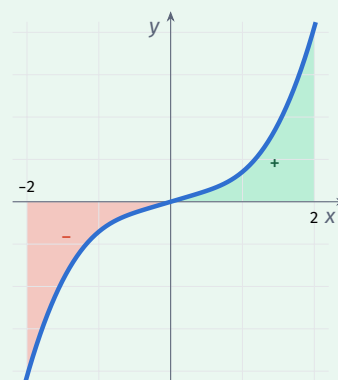
période ne dépend pas du départ : $\int_c^{c+T} f = \int_0^T f$.

Exemples. $x \mapsto x\sqrt{x^4 + 1}$ est impaire, donc

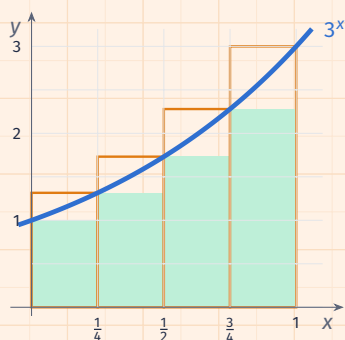
$$\int_{-2}^2 (x\sqrt{x^4 + 1} + 3x^2) dx = 0 + [x^3]_{-2}^2 = \boxed{16},$$

sans chercher de primitive (il n'y en a pas d'usuelle !). Et $\sin^3$ est impaire et 2π -périodique :

$$\int_1^{1+2\pi} \sin^3 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x dx = 0.$$



$y = x\sqrt{x^4 + 1}$:
 aires égales, signes opposés

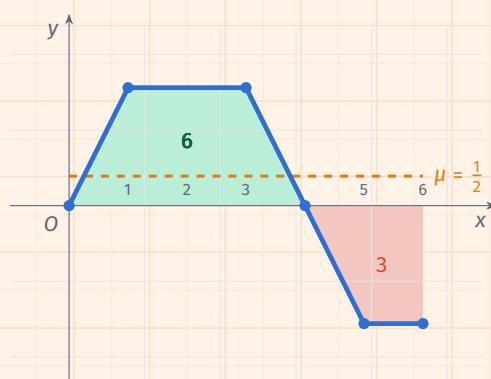


Encadrer par des rectangles. Sur $[0, 1]$ coupé en 4, $x \mapsto 3^x$ est **croissante** : sur chaque bande, la courbe est entre le rectangle « bas » (vert, hauteur à gauche) et le rectangle « haut » (orange, hauteur à droite). Avec $\int_0^1 3^x dx = \left[\frac{3^x}{\ln 3} \right]_0^1 = \frac{2}{\ln 3}$:

$$\frac{1}{4} \left(1 + 3^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{4}} \right) \leq \frac{2}{\ln 3} \leq \frac{1}{4} \left(3^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{4}} + 3 \right),$$

soit $1,581 \leq \frac{2}{\ln 3} \leq 2,082$ (valeur : 1,820...). Avec n bandes, l'écart entre les deux sommes vaut $\frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$; la somme « basse » est géométrique : $s_n = \frac{1}{n} \times \frac{3^n - 1}{3^{\frac{1}{n}} - 1} \rightarrow \frac{2}{\ln 3}$, car $\frac{3^h - 1}{h} \rightarrow \ln 3$ quand $h \rightarrow 0$.

Lire une intégrale sur un quadrillage. La fonction h ci-contre est affine par morceaux (sommets $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 0)$, $(5, -2)$, $(6, -2)$) ; un carreau vaut une unité d'aire. On compte : triangle 1 + rectangle 4 + triangle 1 au-dessus, soit $A^+ = 6$; triangle 1 + rectangle 2 au-dessous, soit $A^- = 3$. Donc $\int_0^6 h = 6 - 3 = 3$ (aire totale 9) et la **valeur moyenne** est $\mu = \frac{1}{6} \int_0^6 h = \frac{1}{2}$: le rectangle de hauteur $\frac{1}{2}$ (tirets) a la même aire algébrique.

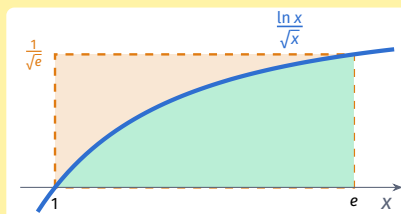


Attention, piège ! intégrale et aire

$\int_a^b (f - g)$ n'est une aire que si $f \geq g$ sur tout $[a, b]$; si les courbes se croisent, on découpe aux points d'intersection. Exemple : $\int_0^3 (7 - 6e^{-x} - e^x) dx = 16 + 6e^{-3} - e^3 \approx -3,79$ est même **négatif**, alors que l'aire entre les deux courbes sur $[0, 3]$ vaut environ 8,87 : au-delà de $\ln 6$, e^x passe au-dessus. Et l'unité d'aire n'est pas toujours 1 cm^2 : avec $\| \vec{i} \| = 2 \text{ cm}$ et $\| \vec{j} \| = 1 \text{ cm}$, elle vaut 2 cm^2 .

★ Astuce de concours : l'intégrale d'un coup d'œil

Avant de calculer, on **regarde** : une courbe au-dessus de (Ox) donne une intégrale **positive** ; si $m \leq f \leq M$ sur $[a, b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$ (deux rectangles) ; une fonction impaire sur $[-a, a]$ donne 0. En QCM, cela élimine souvent trois réponses sur quatre : sur $[1, e]$, $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ croît de 0 à $\frac{1}{\sqrt{e}}$, donc $0 < \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx < \frac{e-1}{\sqrt{e}} \approx 1,04$ (valeur exacte : $4 - 2\sqrt{e} \approx 0,70$).



7

L'essentiel de la partie 3

La route d'une courbe de l'examen national, en six étapes : l'outil, la figure et le réflexe.

départ : f et son domaine D_f

1

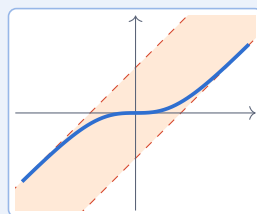
Branches infinies

$\lim f$, puis $\lim \frac{f(x)}{x}$, puis $\lim (f(x) - ax)$, dans cet ordre.

Asymptote $y = ax + b \iff f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$; position : signe de l'écart.

f impaire : $y = ax + b$ en $+\infty \Rightarrow y = ax - b$ en $-\infty$.

Réflexe : $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$, seul, ne donne aucune asymptote.



2

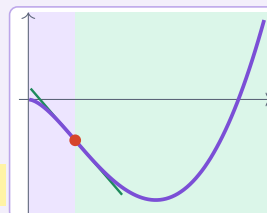
Convexité et inflexion

$f'' \geq 0$: convexe (au-dessus des tangentes) ; $f'' \leq 0$: concave.

f'' change de signe en x_0 : inflexion, la tangente **traverse**.

Inflexion de f = extremum de f' = zéro de f'' .

Réflexe : convexe $\iff f'$ **croissante** (et non positive).



3

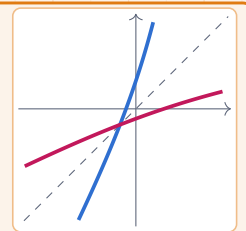
TVI, bijection, réciproque

Continue et strictement monotone : bijection de I sur $f(I)$.

$f(x) = k$: compter les intervalles dont l'image contient k .

$C_{f^{-1}}$: symétrique par rapport à $y = x$; pente $m \rightarrow \frac{1}{m}$.

Réflexe : une limite n'est pas atteinte : crochet ouvert.



4

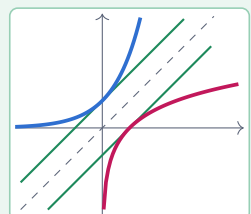
Courbes de ln et exp

Repères (1,0) et (0,1) ; $e^x \geq 1 + x$ et $\ln x \leq x - 1$.

$a^x = e^{x \ln a}$, $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$; $\ln(kx) = \ln k + \ln x$.

e^x contre x^n : comparer la droite $y = x$ et $y = n \ln x$.

Réflexe : $\ln(x-2)$ est décalée vers la **droite**.



5

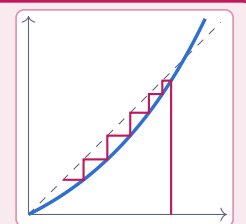
Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Vertical vers C_f , horizontal vers $y = x$, et on recommence.

f croissante : escalier ; f décroissante : escargot.

Limite : un point fixe ; $|f'(\ell)| < 1$ attire, $|f'(\ell)| > 1$ repousse.

Réflexe : f croissante $\Rightarrow$ suite **monotone**, pas croissante.



6

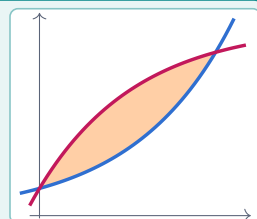
Aires et courbes

$\int_a^b f = A^+ - A^-$: une aire **algébrique**.

Entre deux courbes : $\int$ (haut - bas), découper aux croisements.

Impaire sur $[-a, a]$: 0 ; paire : $2 \int_0^a$; rectangles : encadrer.

Réflexe : une unité d'aire vaut $\| \vec{i} \| \times \| \vec{j} \|$.



arrivée : la courbe complète, justifiée

8

Exercices de la partie 3

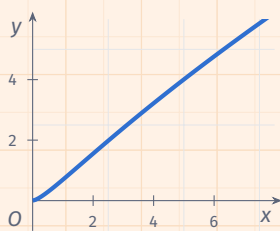
Notations : C_f est la courbe de f dans un repère orthonormé, Δ la droite $y = x$, BP signifie « branche parabolique ». Les valeurs décimales des figures sont des valeurs approchées ; tout résultat lu doit ensuite être démontré.

Niveau 1 • Bases ★ lire une courbe, puis confirmer par le calcul

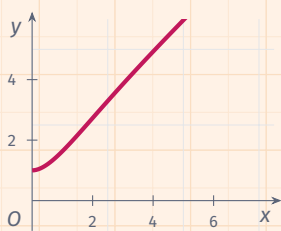
Exercice 39 Quatre branches infinies ★

corrigé p. 86

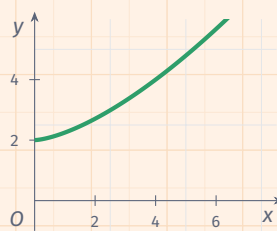
Les vignettes représentent sur $[0, 8]$, dans le désordre, les fonctions $f_1(x) = x + 1 - x e^{-x}$, $f_2(x) = \sqrt{x} \ln(1+x)$, $f_3(x) = 2 + \frac{x\sqrt{x}}{4}$ et $f_4(x) = 2x - 3 \ln(1+x)$.



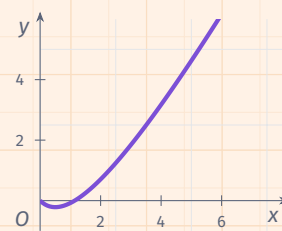
(a)



(b)



(c)



(d)

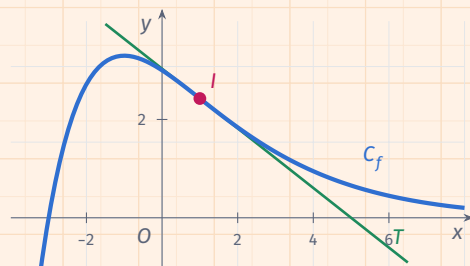
1. Associer chaque vignette à sa fonction (utiliser l'image de 0, puis un signe).
2. Pour chaque f_i , calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_i(x)}{x}$ puis, si cette limite a est finie, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_i(x) - ax)$. Préciser la nature de la branche infinie en $+\infty$.
3. Étudier la position de C_{f_1} par rapport à son asymptote.
4. Un élève affirme : « $\frac{f_4(x)}{x} \rightarrow 2$, donc C_{f_4} admet une asymptote de pente 2 ». Corriger.

Exercice 40 Lire la convexité ★

corrigé p. 86

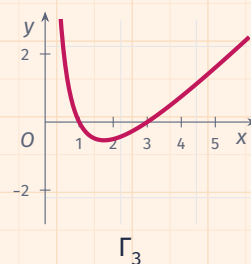
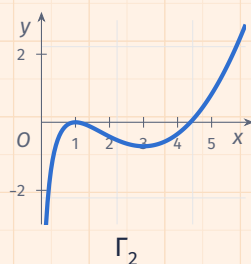
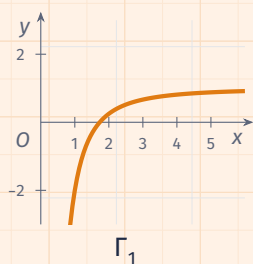
La courbe de $f(x) = (x+3)e^{-x/2}$ et sa tangente T au point I d'abscisse 1 sont tracées ci-contre.

1. **Lecture.** Sur quel intervalle C_f semble-t-elle concave ? convexe ? Quelle est la position de C_f par rapport à T ?
2. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, puis confirmer la lecture : I est un point d'inflexion.
3. Donner une équation de T ; vérifier que T passe par $(5, 0)$.
4. Soit $d(x) = f(x) - \frac{5-x}{\sqrt{e}}$. Montrer que $d'' = f''$ et $d'(1) = 0$; en déduire le signe de d' , puis celui de d . Conclure.
5. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ et interpréter graphiquement.

Exercice 41 Qui est f , qui est f' , qui est f'' ? ★

corrigé p. 86

Soit $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{7}{2} + 3 \ln x$ sur $]0, +\infty[$. Les trois vignettes représentent f , f' et f'' , dans le désordre.

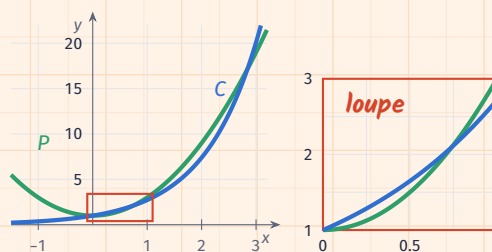


1. Sans calcul, identifier les courbes de f , f' et f'' (justifier par les zéros et les extremums).
2. Montrer que $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{x}$ et $f''(x) = \frac{x^2-3}{x^2}$.
3. Donner les extremums locaux de f , les intervalles de convexité et le point d'inflexion J de C_f .
4. Calculer la pente de la tangente en J . Pourquoi est-ce la plus petite pente parmi toutes les tangentes à C_f ?

Exercice 42 Compter les solutions ★

corrigé p. 87

On étudie (E) : $e^x = 2x^2 + 1$. La figure montre la courbe C de $\exp$ et la parabole P : $y = 2x^2 + 1$, puis une loupe sur $[0, 1]$.

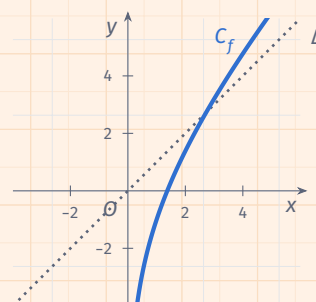


1. Combien de solutions voit-on sur la vue d'ensemble ? Et sur la loupe ? Donner une solution évidente.
2. Soit $g(x) = e^x - 2x^2 - 1$. Étudier le signe de $g''(x)$ et les variations de g' ; en déduire que g' s'annule en deux réels $c_1 \in]0, \ln 4[$ et $c_2 \in]\ln 4, 3[$.
3. Dresser le tableau de variations de g (sans calculer $g(c_1)$ ni $g(c_2)$) et montrer que (E) admet exactement trois solutions : $0, \alpha \in]0, 5; 1[$ et $\beta \in]2, 5; 3[$.
4. Par deux étapes de dichotomie, encadrer β par un intervalle d'amplitude 0,125.
5. Résoudre graphiquement, puis justifier : $e^x \leq 2x^2 + 1$.

Exercice 43 Tracer la réciproque ★

corrigé p. 87

Soit $f(x) = x - 2 + 2 \ln x$ sur $]0, +\infty[$; C_f et Δ sont tracées ci-contre.



1. Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(1)$ et $f(e)$; en déduire $f^{-1}(-1)$ et $f^{-1}(e)$.
3. Calculer $(f^{-1})'(-1)$ et une équation de la tangente à $C_{f^{-1}}$ au point $B(-1, 1)$.
4. Étudier le signe de $f(x) - x$. En déduire les points communs de C_f et de $C_{f^{-1}}$.
5. Préciser les branches infinies de C_f , puis celles de $C_{f^{-1}}$. Recopier la figure et tracer $C_{f^{-1}}$.

Niveau 2 · Bac ★★

problèmes et questions du niveau de l'examen

Exercice 44 Problème : une bosse sous la tangente ★★

corrigé p. 88

Partie A. Soit $g(x) = 1 - xe^x$ sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de g (limites comprises), puis montrer que $g(x) = 0$ admet une unique solution a , avec $0,5 < a < 0,6$; en déduire le signe de g .

Partie B. Soit $f(x) = x - (x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$, et D la droite d'équation $y = x$.

1. Montrer que D est asymptote à C_f en $-\infty$ et étudier leur position relative.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; interpréter.
3. Montrer que $f'(x) = g(x)$, dresser le tableau de variations de f et vérifier que $f(a) = a - 1 + \frac{1}{a}$.
4. Calculer $f''(x)$; montrer que C_f admet un point d'inflexion I dont on donnera les coordonnées.
5. Donner la tangente T à C_f au point $B(0, 1)$. En étudiant $h(x) = (1-x)e^x - 1$, montrer que C_f est au-dessous de T .
6. Montrer que $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha \in]-1; -0,5[$ et $\beta \in]1,3; 1,4[$. Tracer D , T et C_f (on donne $f(a) \approx 1,33$).

Partie C. Pour $\lambda < 1$, soit $A(\lambda)$ l'aire du domaine limité par C_f , D et les droites $x = \lambda$, $x = 1$. Calculer $A(\lambda)$ par une intégration par parties, puis $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$. Interpréter.

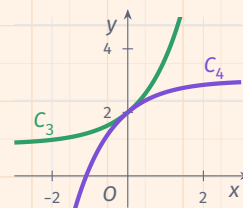
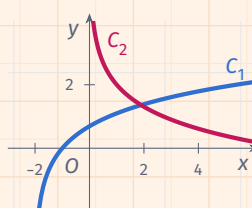
Exercice 45 Transformées de $\ln$ et de $\exp$ ★★

corrigé p. 88

Les courbes C_1, C_2, C_3, C_4 ont pour équations quatre des huit expressions :

- | | | | |
|-------------------|------------------|--------------------|--------------------|
| ① $y = \ln x + 2$ | ② $y = \ln(x+2)$ | ③ $y = 2 - \ln x$ | ④ $y = -\ln(x-2)$ |
| ⑤ $y = e^x - 1$ | ⑥ $y = e^x + 1$ | ⑦ $y = 3 - e^{-x}$ | ⑧ $y = e^{-x} + 3$ |

1. Associer chaque courbe à son équation, et décrire la transformation qui la donne à partir de $C_{\ln}$ ou de $C_{\exp}$. Lire les asymptotes de chaque courbe.
2. Résoudre $\ln(x+2) = 2 - \ln x$, puis l'inéquation $\ln(x+2) \geq 2 - \ln x$; colorier la solution sur l'axe.
3. Montrer que C_3 est au-dessus de C_4 , que ces courbes ont un seul point commun $A(0, 2)$ et la même tangente en A , et qu'elles sont symétriques par rapport à A .

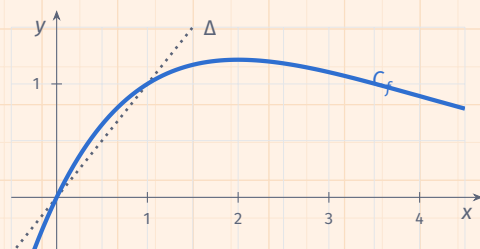


Exercice 46 Des escaliers qui montent et qui descendent ★★

corrigé p. 89

Soit $f(x) = xe^{\frac{1-x}{2}}$ sur $\mathbb{R}$; la figure montre C_f et Δ . On étudie les suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_{n+1} = f(v_n)$, avec $u_0 = 0,2$ et $v_0 = 3$.

1. Construire u_1, u_2, u_3 , puis v_1, v_2 sur l'axe des abscisses. Conjectures ?
2. Étudier les variations de f (limites comprises), résoudre $f(x) = x$ et étudier le signe de $f(x) - x$.
3. Montrer que les intervalles $[0, 1]$ et $[1, 2]$ sont stables par f . En déduire que (u_n) est croissante, que (v_n) est décroissante à partir du rang 1, et donner leurs limites.
4. Montrer que $f([2, +\infty[) \subset]0, 2]$; en déduire que, pour tout $u_0 > 0$, la suite converge vers 1.
5. Que se passe-t-il si $u_0 < 0$? Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$: quel point fixe attire, lequel repousse ?

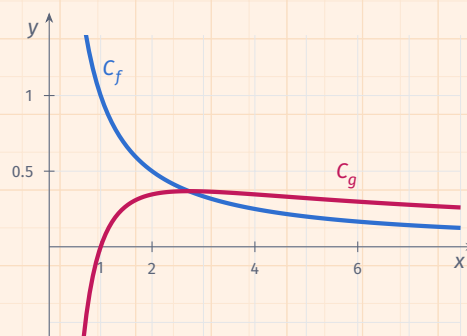


Exercice 47 Deux aires jumelles ★★

corrigé p. 89

Soient $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

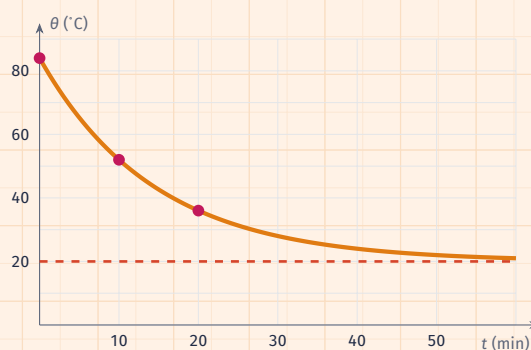
1. Étudier les variations de g (limites comprises).
2. Montrer que C_f et C_g ont un seul point commun A , et que A est le point le plus haut de C_g . Étudier leur position relative.
3. Calculer l'aire A_1 du domaine limité par C_f , C_g et la droite $x = 1$.
4. Pour $\lambda > e$, soit $A_2(\lambda)$ l'aire du domaine limité par les deux courbes et les droites $x = e$ et $x = \lambda$. Montrer que $A_2(\lambda) = \frac{1}{2}(\ln \lambda - 1)^2$. Pour quelle valeur de λ a-t-on $A_2(\lambda) = A_1$?
5. En déduire, sans nouveau calcul, $\int_1^{e^2} (f(x) - g(x)) dx$. Vérifier que $\int_1^{e^2} g(x) dx = \int_1^{e^2} f(x) dx$ et colorier les deux aires sur la figure.

**Exercice 48 Le thé qui refroidit ★★**

corrigé p. 90

Une tasse de thé est posée dans une pièce à température constante. La courbe donne sa température $\theta(t)$ (en °C) en fonction du temps t (en min). On admet la loi de Newton : $\theta'(t) = -k(\theta(t) - 20)$, $k > 0$.

1. Lire $\theta(0)$, $\theta(10)$, $\theta(20)$ et la limite de θ en $+\infty$; interpréter.
2. Résoudre l'équation différentielle ; à l'aide des lectures, montrer que $\theta(t) = 20 + 64 \times 2^{-t/10}$.
3. On boit le thé dès que $\theta \leq 60$ °C : à partir de quel instant ? À quel instant θ vaut-elle 28 °C ?
4. Montrer que la tangente à la courbe au point d'abscisse t_0 coupe la droite $\theta = 20$ au point d'abscisse $t_0 + \frac{1}{k}$. Application pour $t_0 = 0$.
5. Calculer la température moyenne du thé pendant les 30 premières minutes.

**Exercice 49 Problème : un logarithme et son ombre ★★**

corrigé p. 90

Soit $f(x) = \ln x + \frac{2}{x}$ sur $]0, +\infty[$; on note C_f sa courbe et Γ celle de $\ln$.

1. Calculer les limites de f en 0^+ (écrire $f(x) = \frac{x \ln x + 2}{x}$) et en $+\infty$; préciser la branche infinie en $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$, dresser le tableau de variations de f et en déduire que $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
3. Montrer que $f''(x) = \frac{4-x}{x^3}$. En déduire que C_f admet un point d'inflexion I , que la tangente en I est $T : y = \frac{x}{8} + 2 \ln 2$, et préciser la position de C_f par rapport à T .
4. Étudier la position de C_f par rapport à Γ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$: on dit que Γ est une **courbe asymptote** à C_f . Tracer Γ , T et C_f .
5. Discuter, suivant le réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
6. Calculer $\int_1^e f(x) dx$. Pour $\lambda > 1$, calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine compris entre C_f et Γ sur $[1, \lambda]$, puis $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$. Comparer avec la partie C de l'exercice 44.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

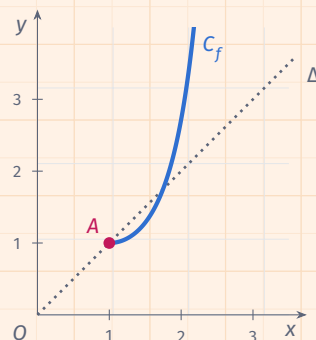
approfondir : réciproques, tangentes, suites, modèles

Exercice 50 Réciproque : la tangente se redresse ★★★

corrigé p. 91

Soit $f(x) = e^{(x-1)^2}$ sur $I = [1, +\infty[$; la figure montre C_f et Δ .

1. Montrer que f est une bijection de I sur I et que $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{\ln x}$.
2. Que vaut $f'(1)$? Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1 et interpréter. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f^{-1}(x) - 1}{\sqrt{x} - 1}$.
3. Calculer $(f^{-1})'(e)$ et la tangente à $C_{f^{-1}}$ au point d'abscisse e .
4. Soit $h(x) = f(x) - x$ sur I . À l'aide de h'' , montrer que $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions, 1 et $\gamma \in]1,7; 1,8[$. En déduire les points communs de C_f et $C_{f^{-1}}$.
5. Branches infinies de C_f et $C_{f^{-1}}$? Tracer $C_{f^{-1}}$.

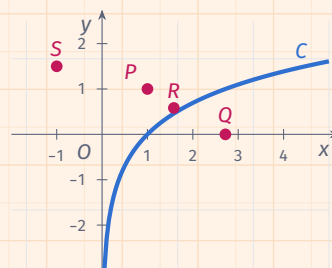


Exercice 51 Combien de tangentes passent par P ? ★★★

corrigé p. 92

On note C la courbe de $\ln$ et T_a sa tangente au point d'abscisse $a > 0$.

1. Montrer que $T_a : y = \frac{x}{a} + \ln a - 1$.
2. Soit $P(p, q)$. Montrer que $P \in T_a \iff \varphi_p(a) = q$, avec $\varphi_p(a) = \frac{p}{a} + \ln a - 1$.
3. Cas $p > 0$: étudier φ_p et en déduire, selon la position de P par rapport à C , le nombre de tangentes à C passant par P .
4. Cas $p \leq 0$: même question.
5. Colorier les régions du plan où passent 0, 1 ou 2 tangentes. Application à $P(1, 1)$, $Q(e, 0)$, $S(-1; 1, 5)$, $U(0, 2)$ (donner la tangente) et $R(\frac{e}{e-1}, \frac{1}{e-1})$ (identifier les tangentes issues de R).

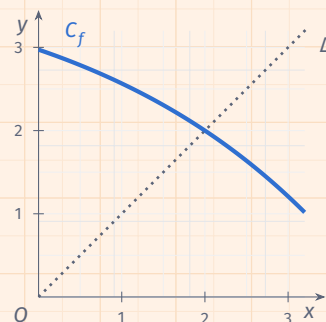


Exercice 52 L'escargot ★★★

corrigé p. 92

Soit $f(x) = 4 - 2e^{\frac{x-2}{3}}$ sur $\mathbb{R}$, et la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Construire $u_1, \dots, u_4$ sur la figure. Conjecture ?
2. Montrer que f est strictement décroissante et que 2 est son unique point fixe. En déduire que $u_n - 2$ et $u_{n+1} - 2$ sont de signes contraires.
3. Soit $I = [1, 3]$. Montrer que $f(I) \subset I$ et que $|f'(x)| \leq \frac{14}{15}$ sur I (on admet que $1,4^3 > e$).
4. Montrer que $u_1 \in I$, puis, avec l'inégalité des accroissements finis, que $|u_n - 2| \leq \left(\frac{14}{15}\right)^{n-1}$ pour $n \geq 1$; conclure. Quel rang ce résultat garantit-il pour 10^{-2} près ? Comparer avec $f'(2)$.

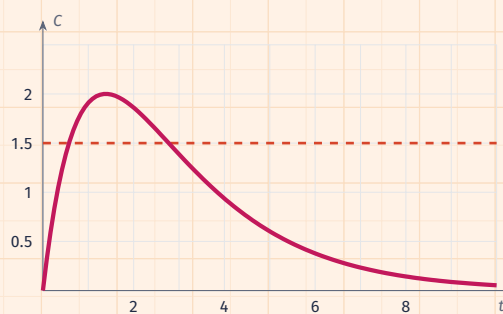


Exercice 53 Un médicament dans le sang ★★★

corrigé p. 93

Après une prise orale, la concentration d'un médicament dans le sang est $C(t) = 8(e^{-t/2} - e^{-t})$ (en mg/L, t en heures). Il est efficace quand $C(t) \geq 1,5$.

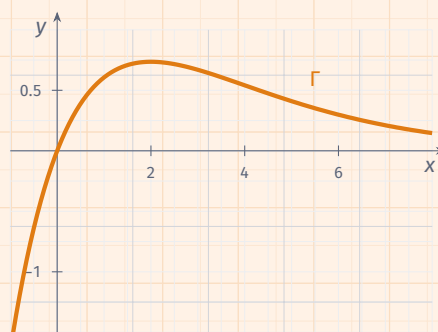
1. Lire la concentration maximale et la durée d'efficacité.
2. Étudier les variations de C ; calculer $C_{\max}$.
3. Résoudre $C(t) \geq 1,5$ (poser $X = e^{-t/2}$) ; durée exacte d'efficacité ?
4. Étudier le signe de $C''(t)$. À quel instant la concentration diminue-t-elle le plus vite ? Que remarque-t-on ?
5. Donner la tangente à l'origine. Calculer $\int_0^T C(t) dt$ et sa limite quand $T \rightarrow +\infty$ (« aire sous la courbe »).

**Exercice 54** Le graphe de f' raconte f ★★★

corrigé p. 93

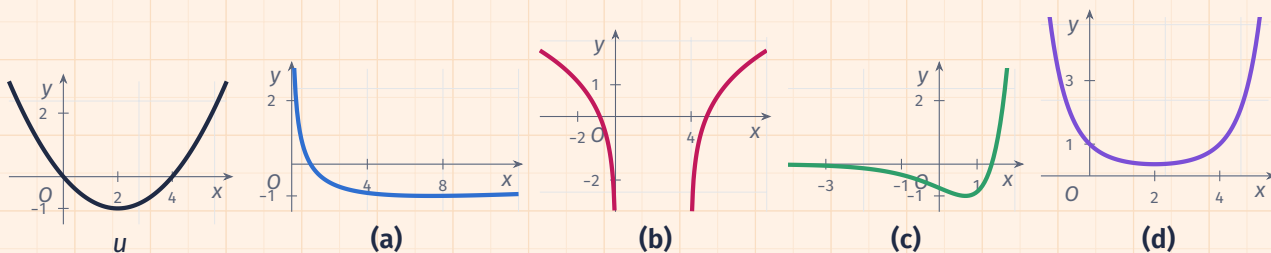
Une fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifie $f(0) = 0$; on ne connaît que la courbe Γ de sa dérivée f' (ci-contre ; carreaux de 0,5 sur 0,25).

1. Lire les variations de f et son minimum, puis ses intervalles de convexité et l'abscisse de son point d'inflexion.
2. Estimer $f(4) - f(0)$ à l'aide des carreaux.
3. On donne $f'(x) = x e^{-x/2}$. Montrer par une intégration par parties que $f(x) = 4 - (2x + 4)e^{-x/2}$ et calculer exactement $f(4)$.
4. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; montrer que C_f admet une asymptote, qu'elle coupe en un point à préciser. Interpréter : que vaut « l'aire totale » sous Γ sur $[0, +\infty[$?
5. Donner la tangente à C_f en son point d'inflexion et tracer C_f .

**Exercice 55** Composer avec $\ln$ et $\exp$ ★★★

corrigé p. 93

Soit $u(x) = \frac{x^2}{4} - x$ (première vignette). Les quatre autres représentent, dans le désordre, $\ln(u(x))$, $e^{u(x)}$, $u(e^x)$ et $u(\ln x)$.



1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des quatre fonctions.
2. **Règle.** Si v est strictement croissante, $v \cdot u$ a les mêmes variations que u . Appliquer à $\ln \cdot u$ et $\exp \cdot u$. Où $u \cdot \exp$ et $u \cdot \ln$ atteignent-elles leur minimum ? Associer les vignettes.

3. Préciser les asymptotes de chaque courbe (attention à la courbe (c) en $-\infty$: de quel côté ?). Résoudre $u(e^x) = 0$ et $u(\ln x) = 0$.

Niveau 4 - Concours ★★★★★

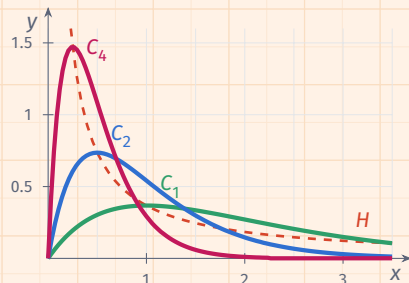
questions astucieuses de concours

Exercice 56 Une famille d'aire constante ★★★★★

corrigé p. 94

Pour $k > 0$, soit $g_k(x) = k^2 x e^{-kx}$ sur $[0, +\infty[$, de courbe C_k ; la figure montre C_1 , C_2 et C_4 .

1. Étudier g_k . Montrer que le point le plus haut M_k de C_k est sur l'hyperbole $H : y = \frac{1}{ex}$, et son point d'inflexion N_k sur $H' : y = \frac{4}{e^2 x}$.
2. Vérifier que $g_k(x) = k g_1(kx)$: C_k est l'image de C_1 par $(x, y) \mapsto (\frac{x}{k}, ky)$. Pourquoi cette transformation conserve-t-elle H et H' ?
3. Montrer que deux courbes distinctes C_k et C_j ont exactement deux points communs, dont O .
4. Vérifier que $G_k(x) = -(1 + kx)e^{-kx}$ est une primitive de g_k . Calculer $A_k(\lambda) = \int_0^\lambda g_k(x) dx$, puis sa limite quand $\lambda \rightarrow +\infty$: que remarque-t-on ?
5. Soit $a > 0$ fixé. Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^a g_k(x) dx$ et interpréter : que devient la « bosse » quand k grandit ?

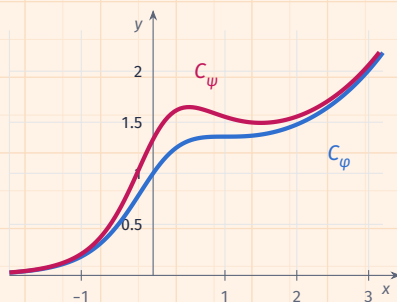
Exercice 57 $e^x = m(x^2 + c)$: une, deux ou trois solutions ? ★★★★★

corrigé p. 94

Pour $c > 0$ et $m \in \mathbb{R}$, on étudie $(E_{m,c}) : e^x = m(x^2 + c)$.

On pose $\varphi(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ et $\psi(x) = \frac{e^x}{x^2 + 3/4}$ (courbes ci-contre).

1. **Cas $c = 1$.** Montrer que $\varphi'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$; nombre de solutions de $(E_{m,1})$ selon m ?
2. Pour $m = \frac{e}{2}$: montrer que la courbe de $\exp$ et la parabole $y = \frac{e}{2}(x^2 + 1)$ ont la même tangente au point d'abscisse 1, mais qu'elles se **traversent** en ce point.
3. **Cas $c = \frac{3}{4}$.** Calculer $\psi'(x)$, puis $\psi(\frac{1}{2})$ et $\psi(\frac{3}{2})$. Discuter selon m le nombre de solutions de $(E_{m,3/4})$ et tracer la courbe de la fonction « nombre de solutions » $m \mapsto N(m)$.
4. **Cas général.** Montrer que $(E_{m,c})$ peut avoir trois solutions si et seulement si $0 < c < 1$.

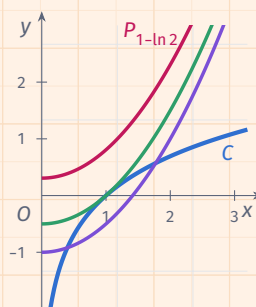


Exercice 58 Tangentes communes à ln et aux paraboles ★★★★★

corrigé p. 95

Pour $c \in \mathbb{R}$, P_c est la parabole $y = \frac{x^2}{2} + c$; la figure montre la courbe C de $\ln$ et P_c pour $c = 1 - \ln 2$, $c = -\frac{1}{2}$ et $c = -1$.

1. Rappeler l'équation de la tangente T_a à C au point d'abscisse $a > 0$.
2. Montrer que T_a est tangente à P_c si et seulement si $c = h(a)$, où $h(a) = \ln a - 1 + \frac{1}{2a^2}$ (écrire qu'une équation du second degré a une racine double).

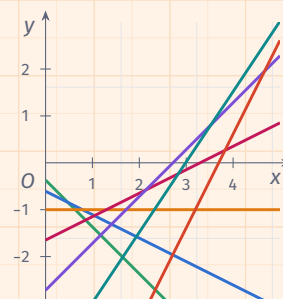


- Étudier h et en déduire, selon c , le nombre de tangentes communes à C et P_c . Que se passe-t-il pour $c = -\frac{1}{2}$?
- Cas $c = 1 - \ln 2$: déterminer une tangente commune explicite ; localiser l'autre.
- Interpréter : pour quelles valeurs de c les courbes C et P_c se coupent-elles ?

Exercice 59 La courbe cachée derrière des droites ★★★★★

corrigé p. 95

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note L_t la droite d'équation $y = tx - e^t$. La figure montre L_t pour $t \in \left\{-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2\right\}$: elles semblent « dessiner » une courbe Γ .

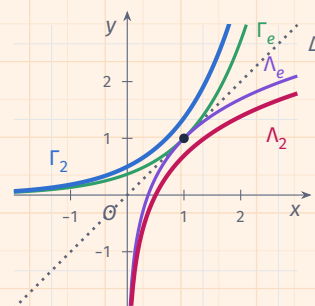


- Soit $x > 0$ fixé. Étudier $t \mapsto tx - e^t$ sur $\mathbb{R}$; montrer que son maximum vaut $g(x) = x \ln x - x$. Que se passe-t-il si $x < 0$?
- Montrer que chaque droite L_t est tangente à la courbe Γ de g au point d'abscisse e^t , et que Γ est au-dessus de toutes les droites L_t : $tx \leq e^t + x \ln x - x$ pour tous $t \in \mathbb{R}$, $x > 0$.
- Inversement, pour t fixé, montrer que $\max_{x>0} (tx - g(x)) = e^t$. Interpréter à l'aide des tangentes à Γ .
- Montrer, sans dériver, que $x(3 - \ln x) \leq e^2$ pour tout $x > 0$, et que $x \ln x \geq x - 1$.

Exercice 60 Une courbe et sa réciproque : se toucher ou pas ? ★★★★★

corrigé p. 96

Pour $a > 0$, soient Γ_a la courbe de $x \mapsto \frac{e^x}{a}$ et Λ_a celle de $x \mapsto \ln(ax)$ ($x > 0$). La figure montre $\Gamma_2, \Lambda_2, \Gamma_e, \Lambda_e$ et Δ .



- Montrer que Λ_a est la symétrique de Γ_a par rapport à Δ , et que leurs points communs sont sur Δ .
- Étudier $\varphi_a(x) = \frac{e^x}{a} - x$; en déduire, selon a , le nombre de points communs de Γ_a et Λ_a , c'est-à-dire le nombre de solutions de $e^x = ax$. Cas $a = e$?
- On suppose $0 < a < e$, et on rappelle que la distance de $M(x_0, y_0)$ à Δ vaut $\frac{|y_0 - x_0|}{\sqrt{2}}$. Pour $M \in \Gamma_a$ et $N \in \Lambda_a$, montrer que $MN \geq \sqrt{2}(1 - \ln a)$. Cas d'égalité ?
- Application à $a = 2$. Que se passe-t-il quand a tend vers e ? Interpréter à l'aide des tangentes aux points réalisant le minimum.

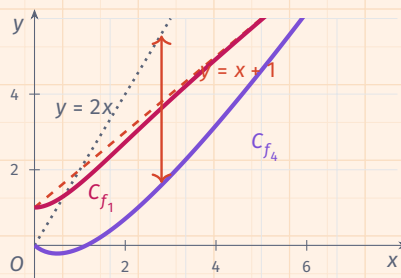
9

Corrigés de la partie 3

Niveau 1 • Bases ★

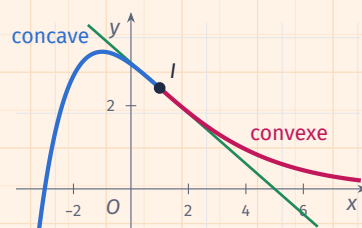
■ Corrigé de l'exercice 39

- $f_1(0) = 1, f_3(0) = 2, f_2(0) = f_4(0) = 0$; et $f_4\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 3 \ln \frac{3}{2} < 0 \leq f_2\left(\frac{1}{2}\right)$. (a) = f_2 , (b) = f_1 , (c) = f_3 , (d) = f_4 .
- $\frac{f_1(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} - e^{-x} \rightarrow 1$ et $f_1(x) - x = 1 - xe^{-x} \rightarrow 1$: asymptote $y = x + 1$.
 • $\frac{f_2(x)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}} \sqrt{\frac{1+x}{x}} \rightarrow 0 \times 1 = 0$ et $f_2 \rightarrow +\infty$: BP de direction (Ox).
 • $\frac{f_3(x)}{x} = \frac{2}{x} + \frac{\sqrt{x}}{4} \rightarrow +\infty$: BP de direction (Oy).
 • $\frac{f_4(x)}{x} = 2 - 3 \frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 2$, mais $f_4(x) - 2x = -3 \ln(1+x) \rightarrow -\infty$: BP de direction $y = 2x$.
- $f_1(x) - (x + 1) = -xe^{-x} < 0$ pour $x > 0$: C_{f_1} est au-dessous de son asymptote.
- Faux. $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 2$ ne donne qu'une direction ; ici l'écart $2x - f_4(x) = 3 \ln(1+x)$ tend vers $+\infty$ (flèche rouge) : pas d'asymptote.



■ Corrigé de l'exercice 40

- On lit : concave sur $]-\infty, 1]$, convexe sur $[1, +\infty[$; C_f sous T à gauche de I , au-dessus à droite.
- $f'(x) = e^{-x/2} - \frac{x+3}{2}e^{-x/2} = \frac{-x+1}{2}e^{-x/2}$ (maximum $f(-1) = 2\sqrt{e}$). Puis $f''(x) = -\frac{1}{2}e^{-x/2} + \frac{x+1}{4}e^{-x/2}$, soit $f''(x) = \frac{x-1}{4}e^{-x/2}$, du signe de $x - 1$: il change de signe en 1, donc $I\left(1, \frac{4}{\sqrt{e}}\right) \approx (1; 2,43)$ est un point d'inflexion.
- $f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$; $T : y = -\frac{x-1}{\sqrt{e}} + \frac{4}{\sqrt{e}}$, soit $T : y = \frac{5-x}{\sqrt{e}}$, qui s'annule en $x = 5$.
- d diffère de f d'une fonction affine : $d'' = f''$, et $d'(1) = f'(1) + \frac{1}{\sqrt{e}} = 0$. d' décroît sur $]-\infty, 1]$ et croît sur $[1, +\infty[$: son minimum est $d'(1) = 0$, donc $d' \geq 0$ et d est croissante, nulle en 1 : $d < 0$ si $x < 1$, $d > 0$ si $x > 1$. La courbe traverse sa tangente au point d'inflexion.
- En $-\infty$: $f \rightarrow -\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \left(1 + \frac{3}{x}\right)e^{-x/2} \rightarrow +\infty$: BP de direction (Oy). En $+\infty$: avec $X = \frac{x}{2}$, $f(x) = (2X + 3)e^{-X} \rightarrow 0$: asymptote $y = 0$.



■ Corrigé de l'exercice 41

- Γ_2 a des tangentes horizontales en 1 et 3 ; Γ_3 s'annule exactement en 1 et 3, et elle est positive là où Γ_2 monte : Γ_3 est la courbe de la dérivée de Γ_2 . Γ_3 a un minimum vers 1,7, abscisse où Γ_1 s'annule en passant du - au + : Γ_1 est la dérivée de Γ_3 . $\Gamma_2 = C_f, \Gamma_3 = C_{f'}, \Gamma_1 = C_{f''}$.
- $f'(x) = x - 4 + \frac{3}{x} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x} = \frac{(x-1)(x-3)}{x}$ et $f''(x) = 1 - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 - 3}{x^2}$.

3. f croît sur $]0, 1]$, décroît sur $[1, 3]$, croît sur $[3, +\infty[$: maximum local $f(1) = 0$, minimum local $f(3) = 3 \ln 3 - 4 \approx -0,70$. $f'' < 0$ sur $]0, \sqrt{3}[$ (concave), $f'' > 0$ sur $]\sqrt{3}, +\infty[$ (convexe) : $I(\sqrt{3}; 5 - 4\sqrt{3} + \frac{3}{2} \ln 3) \approx (1,73; -0,28)$.
4. $f'(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 4 \approx -0,54$. Comme $f'' \leq 0$ puis $f'' \geq 0$, f' décroît sur $]0, \sqrt{3}]$ puis croît : $f'(\sqrt{3})$ est le **minimum de f'** , c'est-à-dire la plus petite pente.

Astuce zéro de f' $\leftrightarrow$ tangente horizontale de C_f ; zéro de f'' (avec changement de signe) $\leftrightarrow$ extremum de f' $\leftrightarrow$ inflexion de C_f .

■ Corrigé de l'exercice 42

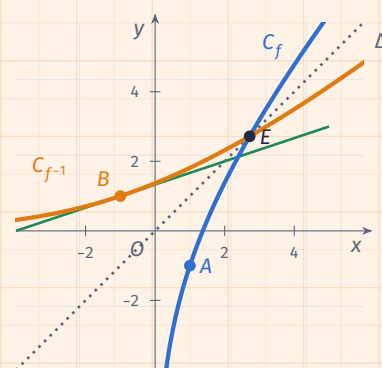
1. La vue d'ensemble suggère **deux** solutions (0 et $\beta \approx 2,8$) ; la loupe en révèle une **troisième**, $\alpha \approx 0,74$. Solution évidente : 0 ($e^0 = 1 = 2 \times 0 + 1$).
2. $g'(x) = e^x - 4x$ et $g''(x) = e^x - 4$: $g'' < 0$ sur $]-\infty, \ln 4[$, $g'' > 0$ sur $]\ln 4, +\infty[$. Donc g' décroît puis croît, de minimum $g'(\ln 4) = 4(1 - \ln 4) < 0$. Comme $g'(0) = 1 > 0$ et $g'(3) = e^3 - 12 > 0$, le TVI (stricte monotonie sur chaque intervalle) donne $c_1 \in]0, \ln 4[$ et $c_2 \in]\ln 4, 3[$; $g' > 0$ hors de $[c_1, c_2]$, $g' < 0$ entre les deux.
3. $g(0) = 0$ et $0 < c_1$: sur $]-\infty, c_1]$, g croît strictement, son seul zéro est 0 et $g(c_1) > 0$. Sur $[c_1, c_2]$, g décroît de $g(c_1) > 0$ à $g(c_2) \leq g(2) = e^2 - 9 < 0$ (c_2 réalise le minimum de g sur $[c_1, +\infty[$) : un seul zéro α ; $g(0,5) \approx 0,15 > 0 > g(1) = e - 3$, et $c_1 < 0,5 < 1 < c_2$ (car $g'(0,5) = \sqrt{e} - 2 < 0$) : $\alpha \in]0,5; 1[$. Sur $[c_2, +\infty[$, g croît de $g(c_2) < 0$ à $+\infty$: un seul zéro β , et $g(2,5) \approx -1,32 < 0 < g(3) \approx 1,09$.
Exactement trois solutions.
4. $g(2,75) \approx -0,48 < 0$: $\beta \in [2,75; 3]$; $g(2,875) \approx 0,19 > 0$: $2,75 < \beta < 2,875$ ($\beta \approx 2,84$).
5. $e^x \leq 2x^2 + 1 \iff g(x) \leq 0 \iff x \in]-\infty, 0] \cup [\alpha, \beta]$: C est sous P (sauf sur $]0, \alpha[$, la petite « lentille » de la loupe, d'épaisseur $\approx 0,17$).

x	$-\infty$	c_1	c_2	$+\infty$
g'		+	-	+
g	$-\infty$	↗	↘	↗

Piège une figure peut cacher une solution : seule l'étude des variations permet de compter.

■ Corrigé de l'exercice 43

1. $f'(x) = 1 + \frac{2}{x} > 0$; f est continue, strictement croissante, $\lim_{0^+} f = -\infty$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$: bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f(1) = -1$ et $f(e) = e - 2 + 2 = e$: $f^{-1}(-1) = 1$, $f^{-1}(e) = e$.
3. $f'(1) = 3 \neq 0$: $(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$; tangente en B : $y = \frac{x+1}{3} + 1 = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$.
4. $f(x) - x = 2(\ln x - 1)$: C_f est sous Δ sur $]0, e[$, au-dessus sur $]e, +\infty[$, et coupe Δ en $E(e, e)$ seulement. Si $M(a, b)$ est sur C_f et sur $C_{f^{-1}}$, alors $b = f(a)$ et $a = f(b)$; si $a < b$, la croissance de f donne $b = f(a) < f(b) = a$: absurde. Donc $a = b$: **le seul point commun est $E(e, e)$** .
5. C_f : asymptote $x = 0$; en $+\infty$, $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$ et $f(x) - x \rightarrow +\infty$: BP de direction Δ . Par symétrie, $C_{f^{-1}}$: **asymptote $y = 0$ en $-\infty$, BP de direction Δ** .



Piège pour une fonction décroissante, C_f et $C_{f^{-1}}$ peuvent se couper hors de Δ .

Niveau 2 · Bac ★★

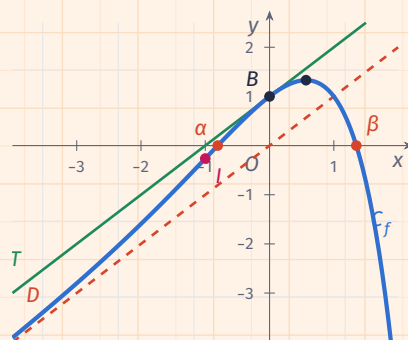
■ Corrigé de l'exercice 44

Partie A. $g'(x) = -e^x - xe^x = -(x+1)e^x$: g croît sur $]-\infty, -1]$, décroît sur $[-1, +\infty[$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g = 1$ ($xe^x \rightarrow 0$), $g(-1) = 1 + \frac{1}{e}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = -\infty$. Sur $]-\infty, -1]$, $g > 1 > 0$; sur $[-1, +\infty[$, g est continue strictement décroissante de $1 + \frac{1}{e}$ à $-\infty$: un unique zéro a , et $g(0,5) = 1 - 0,5\sqrt{e} \approx 0,18 > 0 > g(0,6) \approx -0,09$. Donc $g > 0$ sur $]-\infty, a[$, $g < 0$ sur $]a, +\infty[$.

Partie B.

- $(x-1)e^x = xe^x - e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$: $f \rightarrow -\infty$ et $f(x) - x = (1-x)e^x \rightarrow 0$: D est **asymptote**. Le signe de $(1-x)e^x$ est celui de $1-x$: C_f est au-dessus de D sur $]-\infty, 1[$, au-dessous sur $]1, +\infty[$; elles se coupent en $(1, 1)$.
- $f(x) = x \left[1 - \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^x \right] \rightarrow -\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \rightarrow -\infty$: **BP de direction** (Oy) .
- $f'(x) = 1 - e^x - (x-1)e^x = 1 - xe^x = g(x)$. Comme $ae^a = 1$, $e^a = \frac{1}{a}$ et $f(a) = a - \frac{a-1}{a} = a - 1 + \frac{1}{a} \approx 1,33$.
- $f''(x) = g'(x) = -(x+1)e^x$ change de signe en -1 : $I \left(-1, -1 + \frac{2}{e} \right) \approx (-1; -0,26)$.
- $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$: $T : y = x + 1$ (parallèle à D). $f(x) - (x+1) = k(x)$, $k'(x) = -xe^x$: k est maximale en 0, avec $k(0) = 0$; donc $k \leq 0$: C_f est sous T .
- Sur $]-\infty, a]$, f croît strictement de $-\infty$ à $f(a) > 0$: un zéro α , avec $f(-1) \approx -0,26 < 0 < f(-0,5) \approx 0,41$. Sur $]a, +\infty[$, f décroît strictement de $f(a)$ à $-\infty$: un zéro β , avec $f(1,3) \approx 0,20 > 0 > f(1,4) \approx -0,22$. ($\alpha \approx -0,81$, $\beta \approx 1,35$.)

x	$-\infty$	a	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
f		$a - 1 + \frac{1}{a}$		
	$-\infty$			$-\infty$

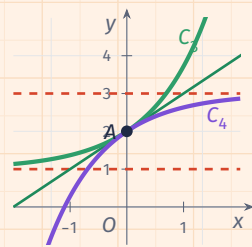


Partie C. Sur $[\lambda, 1]$, C_f est au-dessus de D : $A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 (1-x)e^x dx = \left[(1-x)e^x \right]_{\lambda}^1 + \int_{\lambda}^1 e^x dx = e - (2-\lambda)e^{\lambda}$ ($u = 1-x$, $v' = e^x$). Comme $\lambda e^{\lambda} \rightarrow 0$ et $e^{\lambda} \rightarrow 0$: $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = e$: le domaine illimité compris entre C_f et son asymptote a une **aire finie**, égale à e .

■ Corrigé de l'exercice 45

- C_1 passe par $(-1, 0)$, asymptote $x = -2$: ② $y = \ln(x+2)$, translatée de $C_{\ln}$ par $\vec{u}(-2, 0)$ (① a pour asymptote $x = 0$). C_2 décroît, passe par $(1, 2)$ et $(e, 1)$, asymptote $x = 0$: ③ $y = 2 - \ln x$, symétrique de $C_{\ln}$ par rapport à la droite $y = 1$ (④ a pour asymptote $x = 2$). C_3 croît, passe par $(0, 2)$, asymptote $y = 1$ en $-\infty$: ⑥ $y = e^x + 1$, translatée de $C_{\exp}$ par $\vec{v}(0, 1)$ (⑤ passe par O). C_4 croît, asymptote $y = 3$ en $+\infty$: ⑦ $y = 3 - e^{-x}$, image de $C_{\exp}$ par la symétrie de centre $(0, \frac{3}{2})$: $(x, y) \mapsto (-x, 3 - y)$ (⑧ est décroissante). Les branches non asymptotiques : BP (Ox) pour C_1 , C_2 ; BP (Oy) pour C_3 (en $+\infty$) et C_4 (en $-\infty$).

2. Pour $x > 0$: $\ln(x+2) = 2 - \ln x \iff \ln(x(x+2)) = 2 \iff x^2 + 2x - e^2 = 0 \iff$
 $x = -1 + \sqrt{1+e^2} \approx 1,90$ (l'autre racine est négative). La fonction $x \mapsto \ln(x(x+2))$ étant croissante : $S = [-1 + \sqrt{1+e^2}, +\infty[$.
3. $(e^x + 1) - (3 - e^{-x}) = e^x - 2 + e^{-x} = (e^{x/2} - e^{-x/2})^2 \geq 0$, nul seulement pour $x = 0$: C_3 est au-dessus de C_4 et $A(0, 2)$ est leur seul point commun. Les pentes en 0 valent $e^0 = 1$ et $e^{-0} = 1$: **tangente commune $y = x + 2$** . Enfin $(x, y) \mapsto (-x, 4 - y)$ transforme $y = e^x + 1$ en $4 - y = e^{-x} + 1$, c'est-à-dire $y = 3 - e^{-x}$.



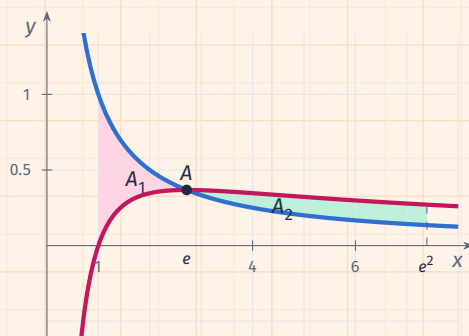
■ Corrigé de l'exercice 46

1. $u_1 \approx 0,30$, $u_2 \approx 0,42$, $u_3 \approx 0,57$: l'escalier **monte** ; $v_1 = \frac{3}{e} \approx 1,10$, $v_2 \approx 1,05$: il **descend**. Conjecture : les deux suites tendent vers 1.
2. $f'(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{\frac{1-x}{2}}$: f croît sur $]-\infty, 2]$, décroît sur $[2, +\infty[$; maximum $f(2) = \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1,21$; $\lim_{-\infty} f = -\infty$, $\lim_{+\infty} f = 0$. $f(x) - x = x\left(e^{\frac{1-x}{2}} - 1\right)$: nul en 0 et 1, **positif sur $]0, 1[$** , négatif sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
3. f croît sur $[0, 2]$: $f([0, 1]) = [0, 1]$ et $f([1, 2]) = \left[1, \frac{2}{\sqrt{e}}\right] \subset [1, 2]$. Donc $u_n \in [0, 1]$ et $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$: (u_n) croît, est majorée, converge vers un point fixe de $[0, 2; 1]$: $\lim u_n = 1$. $v_1 = \frac{3}{e} \in [1, 2]$, donc $v_n \in [1, 2]$ pour $n \geq 1$ et $v_{n+1} \leq v_n$: (v_n) décroît, minorée par 1 : $\lim v_n = 1$.
4. Sur $]2, +\infty[$, f décroît de $f(2)$ vers 0 : $f(]2, +\infty[) = \left]0, \frac{2}{\sqrt{e}}\right[\subset]0, 2]$. Pour tout $u_0 > 0$, $u_1 \in]0, 2]$, et l'on est ramené à l'un des deux cas précédents : **la limite est toujours 1**.
5. Si $u_0 < 0$: $f(x) < x$ et $f(x) < 0$ pour $x < 0$: (u_n) décroît ; une limite finie serait un point fixe négatif : $\lim u_n = -\infty$. $f'(0) = \sqrt{e} > 1$: 0 **repousse** ; $f'(1) = \frac{1}{2} \in]0, 1[$: 1 **attire**, et l'écart à 1 est à peu près divisé par 2 à chaque pas.

Astuce $0 < f'(\ell) < 1$: escalier vers ℓ ; il monte si l'on part en dessous de ℓ , il descend si l'on part au-dessus.

■ Corrigé de l'exercice 47

1. $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$: g croît sur $]0, e]$, décroît sur $[e, +\infty[$; maximum $g(e) = \frac{1}{e}$; $\lim_{0^+} g = -\infty$, $\lim_{+\infty} g = 0$ (croissances comparées).
2. $f(x) = g(x) \iff \ln x = 1 \iff x = e$: $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$, le sommet de C_g . $g(x) - f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$: C_g est sous C_f sur $]0, e[$, au-dessus sur $]e, +\infty[$.
3. $\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]' = \frac{\ln x}{x}$: $A_1 = \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x} dx = \left[\ln x - \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}$ u.a.



$$4. A_2(\lambda) = \int_e^\lambda \frac{\ln x - 1}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} - \ln x \right]_e^\lambda = \frac{(\ln \lambda)^2}{2} - \ln \lambda + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\ln \lambda - 1)^2. A_2(\lambda) = \frac{1}{2} \iff (\ln \lambda - 1)^2 = 1 \iff \ln \lambda = 2 \ (\lambda > e) : \boxed{\lambda = e^2}.$$

$$5. \int_1^{e^2} (f - g) = A_1 - A_2(e^2) = \boxed{0} : \text{les deux aires (rose et verte) se compensent. Et } \int_1^{e^2} \frac{dx}{x} = \ln e^2 = 2 = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^{e^2} \checkmark.$$

Astuce une intégrale nulle n'est pas une aire nulle : ici deux aires égales se compensent de part et d'autre de A.

■ Corrigé de l'exercice 48

1. $\theta(0) = 84$, $\theta(10) = 52$, $\theta(20) = 36$, et $\theta \rightarrow 20$: la droite $\theta = 20$ est asymptote ; 20 °C est la température de la pièce.

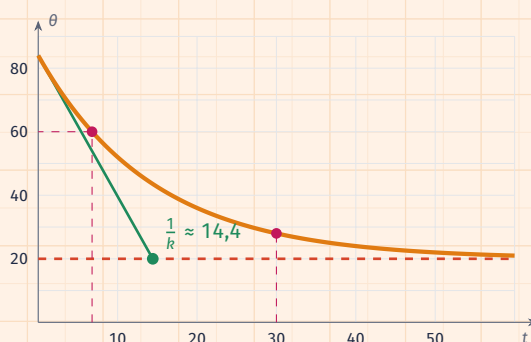
2. $\theta' = -k\theta + 20k$: $\theta(t) = 20 + Ce^{-kt}$. $\theta(0) = 84$ donne $C = 64$; $\theta(10) = 52$ donne $e^{-10k} = \frac{1}{2}$, soit $k = \frac{\ln 2}{10} \approx 0,069 \text{ min}^{-1}$. Alors $e^{-kt} = 2^{-t/10}$:

$$\boxed{\theta(t) = 20 + 64 \times 2^{-t/10}} ; \text{contrôle : } \theta(20) = 36 \checkmark.$$

3. $\theta \leq 60 \iff 2^{-t/10} \leq \frac{5}{8} \iff t \geq 10 \log_2 \frac{8}{5} = 10(3 - \log_2 5) \approx \boxed{6,8 \text{ min}}$. $\theta = 28 \iff 2^{-t/10} = \frac{1}{8} \iff \boxed{t = 30 \text{ min}}$.

4. La tangente en t_0 : $y = \theta(t_0) - k(\theta(t_0) - 20)(t - t_0)$. Pour $y = 20$: $(\theta(t_0) - 20)(1 - k(t - t_0)) = 0$, d'où $t = t_0 + \frac{1}{k}$ (car $\theta(t_0) \neq 20$). Pour $t_0 = 0$: $t = \frac{10}{\ln 2} \approx 14,4 \text{ min}$ (constante de temps, en vert).

$$5. \bar{\theta} = \frac{1}{30} \int_0^{30} (20 + 64e^{-kt}) dt = 20 + \frac{64}{30k} (1 - e^{-30k}) = 20 + \frac{640}{30 \ln 2} \times \frac{7}{8} = \boxed{20 + \frac{56}{3 \ln 2}} \approx 46,9 \text{ °C}.$$



■ Corrigé de l'exercice 49

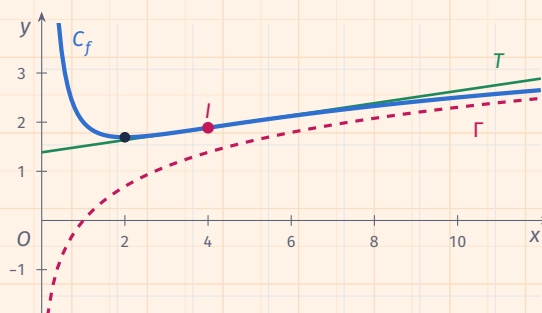
1. En 0^+ : $x \ln x \rightarrow 0$, donc $x \ln x + 2 \rightarrow 2$ et $f(x) = \frac{x \ln x + 2}{x} \rightarrow +\infty$: **asymptote** $x = 0$. En $+\infty$: $f \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x^2} \rightarrow 0$: **BP de direction** (Ox) .

2. $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x-2}{x^2}$: f décroît sur $]0, 2]$, croît sur $[2, +\infty[$; minimum $\boxed{f(2) = 1 + \ln 2} \approx 1,69 > 0$, donc $f(x) > 0$: $\ln x > -\frac{2}{x}$.

3. $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{4-x}{x^3}$: convexe sur $]0, 4]$, concave sur $[4, +\infty[$: $\boxed{I(4; 2 \ln 2 + \frac{1}{2})} \approx (4; 1,89)$.

$f'(4) = \frac{1}{8}$: $y = \frac{x-4}{8} + 2 \ln 2 + \frac{1}{2}$, soit $\boxed{T : y = \frac{x}{8} + 2 \ln 2}$. C_f est au-dessus de T sur $]0, 4]$, au-dessous sur $[4, +\infty[$ (elle traverse sa tangente en I).

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	$+\infty$	$1 + \ln 2$	$+\infty$



4. $f(x) - \ln x = \frac{2}{x} > 0$: C_f est au-dessus de Γ , et l'écart tend vers 0 en $+\infty$: Γ est une courbe asymptote.
5. $m < 1 + \ln 2$: aucune solution ; $m = 1 + \ln 2$: une ($x = 2$) ; $m > 1 + \ln 2$: deux, une dans $]0, 2[$ et une dans $]2, +\infty[$ (stricte monotonie, limites $+\infty$, TVI).
6. Une primitive de f est $x \ln x - x + 2 \ln x$: $\int_1^e f = (e - e + 2) - (-1) = \boxed{3}$. $A(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{2}{x} dx = 2 \ln \lambda \rightarrow$
 $+\infty$: les courbes se rapprochent, et pourtant l'aire entre elles est **infinie** ; dans l'exercice 44, l'écart $(1-x)e^x$ tendait vers 0 assez vite pour donner une aire finie.

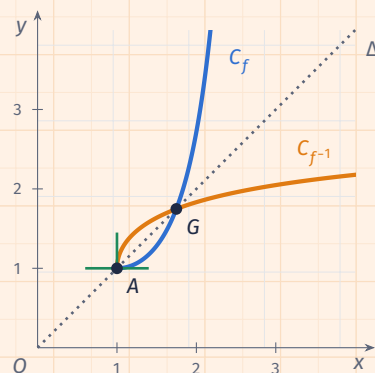
Piège deux courbes asymptotes n'enferment pas forcément une aire finie : tout dépend de la vitesse à laquelle l'écart tend vers 0.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

■ Corrigé de l'exercice 50

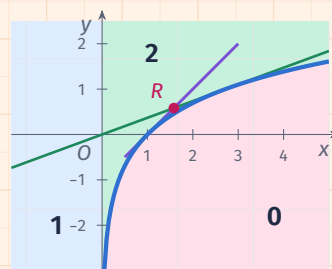
1. $f'(x) = 2(x-1)e^{(x-1)^2} > 0$ sur $]1, +\infty[$: f est continue strictement croissante sur I , $f(1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$: bijection de I sur I . Pour $y \geq 1$: $(x-1)^2 = \ln y$, $x-1 = \sqrt{\ln y}$ ($x \geq 1$) : $f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{\ln y}$.
2. $f'(1) = 0$: **tangente horizontale** en A. Pour $x > 1$: $\frac{f^{-1}(x) - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{\ln x}}{x - 1} \times \frac{1}{\sqrt{x-1}} \rightarrow 1 \times (+\infty)$: f^{-1} n'est pas dérivable en 1 et $C_{f^{-1}}$ admet une **semi-tangente verticale** en A. Plus précisément, $\frac{f^{-1}(x) - 1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{\ln x}{x-1}} \rightarrow \boxed{1}$: près de A, $C_{f^{-1}}$ ressemble à la courbe de $1 + \sqrt{x-1}$.
3. $f(2) = e$, $f'(2) = 2e$: $(f^{-1})'(e) = \frac{1}{2e}$; tangente : $y = 2 + \frac{x-e}{2e}$, soit $y = \frac{x}{2e} + \frac{3}{2}$.
4. $h'(x) = 2(x-1)e^{(x-1)^2} - 1$ et $h''(x) = (2 + 4(x-1)^2)e^{(x-1)^2} > 0$: h' croît strictement de $h'(1) = -1$ à $+\infty$ et s'annule en un seul $c > 1$. h décroît sur $[1, c]$, croît sur $[c, +\infty[$; $h(1) = 0$ donne $h(c) < 0$, et $h \rightarrow +\infty$: un seul autre zéro $\gamma > c$, avec $h(1,7) \approx -0,07 < 0 < h(1,8) \approx 0,10$. f étant croissante, les points communs de C_f et $C_{f^{-1}}$ sont sur Δ : ce sont A(1, 1) et G(γ , γ), $\gamma \approx 1,75$.
5. $\frac{f(x)}{x} \rightarrow +\infty$: BP (Oy) pour C_f ; $\frac{f^{-1}(x)}{x} = \frac{1 + \sqrt{\ln x}}{x} \rightarrow 0$: BP (Ox) pour $C_{f^{-1}}$.

Piège la formule $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ ne s'applique pas où f' s'annule : la tangente horizontale de C_f devient verticale pour $C_{f^{-1}}$.



■ Corrigé de l'exercice 51

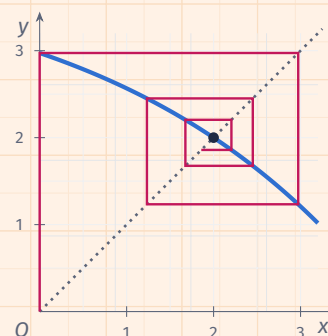
- $T_a : y = \frac{1}{a}(x - a) + \ln a = \frac{x}{a} + \ln a - 1$.
- $P \in T_a \iff q = \frac{p}{a} + \ln a - 1 = \varphi_p(a)$.
- $p > 0 : \varphi'_p(a) = -\frac{p}{a^2} + \frac{1}{a} = \frac{a-p}{a^2} : \varphi_p$ décroît sur $]0, p]$, croît sur $[p, +\infty[$, de minimum $\varphi_p(p) = \ln p$, et tend vers $+\infty$ en 0^+ et en $+\infty$. $q > \ln p$ (**P au-dessus de C**) : **2 tangentes** ; $q = \ln p$: **1** ; $q < \ln p$: **0**.
- $p < 0 : \varphi'_p(a) > 0$ et φ_p va de $-\infty$ ($\frac{p}{a} \rightarrow -\infty$) à $+\infty$; $p = 0 : \varphi_0 = \ln -1$. Dans les deux cas, φ_p est une bijection sur $\mathbb{R}$: **une seule tangente**.
- Régions : vert (au-dessus de C, $x > 0$) : 2 ; rose (au-dessous) : 0 ; bleu ($x \leq 0$) et C elle-même : 1.
 1. $P(1, 1) : 1 > \ln 1$, **deux** tangentes ($a \approx 0,32$ et $a \approx 6,31$). $Q(e, 0) : 0 < \ln e$, **aucune**. $S : \text{une}$. $U(0, 2) : \ln a - 1 = 2, a = e^3$: une seule tangente, $y = \frac{x}{e^3} + 2$. R vérifie $\frac{1}{e-1} = \frac{e}{e-1} - 1$ et $\frac{1}{e-1} = \frac{e}{e-1} \times \frac{1}{e}$: il est sur $T_1 : y = x - 1$ (violet) et sur $T_e : y = \frac{x}{e}$ (vert) ; comme il est au-dessus de C, **ce sont les deux seules tangentes issues de R**.



Astuce une courbe concave est sous chacune de ses tangentes : d'un point « intérieur » (sous la courbe) on ne peut tracer aucune tangente.

■ Corrigé de l'exercice 52

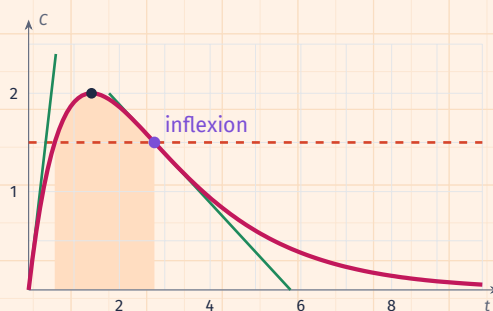
- $u_1 \approx 2,97, u_2 \approx 1,23, u_3 \approx 2,45, u_4 \approx 1,68$: la construction tourne autour du point $(2, 2)$ (escargot) ; conjecture : $u_n \rightarrow 2$.
- $f'(x) = -\frac{2}{3}e^{\frac{x-2}{3}} < 0$. $x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante et s'annule en 2 ($4 - 2 = 2$) : **unique point fixe 2**. Si $u_n < 2$, alors $u_{n+1} = f(u_n) > f(2) = 2$, et inversement.
- $f(I) = [f(3), f(1)] = [4 - 2e^{1/3}, 4 - 2e^{-1/3}] \approx [1,21; 2,57] \subset I$. Sur I , $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}e^{1/3}$, et $1,4^3 > e$ donne $e^{1/3} < 1,4$: $|f'(x)| \leq \frac{14}{15}$.
- $u_1 = 4 - 2e^{-2/3}$ et $\frac{1}{2} < e^{-2/3} < 1$ (car $e^2 < 8$) : $u_1 \in]2, 3[\subset I$, donc $u_n \in I$ pour $n \geq 1$. L'inégalité des accroissements finis entre u_n et 2 donne $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{14}{15}|u_n - 2|$, puis $|u_n - 2| \leq \left(\frac{14}{15}\right)^{n-1}|u_1 - 2| \leq \left(\frac{14}{15}\right)^{n-1} : \lim u_n = 2$. $\left(\frac{14}{15}\right)^{n-1} \leq 10^{-2} \iff n - 1 \geq \frac{\ln 100}{\ln(15/14)} \approx 66,7$: rang **$n = 68$** garanti. Mais $f'(2) = -\frac{2}{3}$: l'écart est en fait multiplié par environ $\frac{2}{3}$ à chaque pas, et $|u_{13} - 2| < 10^{-2}$ déjà.



Astuce f décroissante $\Rightarrow$ escargot : la limite est toujours *entre* deux termes consécutifs, d'où un encadrement gratuit : $u_4 < 2 < u_5$ ($1,676 < 2 < 2,205$).

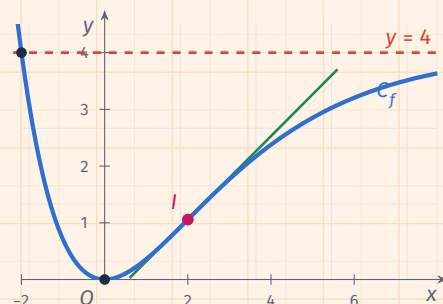
■ Corrigé de l'exercice 53

- On lit $C_{\max} \approx 2$ vers $t \approx 1,4$ h, et $C \geq 1,5$ entre 0,6 h et 2,8 h environ.
- $C'(t) = 8\left(-\frac{1}{2}e^{-t/2} + e^{-t}\right) = 4e^{-t}(2 - e^{t/2})$, positif si et seulement si $t < 2 \ln 2$: C croît puis décroît ;
 $C_{\max} = C(2 \ln 2) = 8\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2$ mg/L (≈ 1 h 23 min).
- $C = 8(X - X^2) \geq \frac{3}{2} \iff 16X^2 - 16X + 3 \leq 0 \iff (4X - 1)(4X - 3) \leq 0 \iff \frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}$, soit $2 \ln \frac{4}{3} \leq t \leq 2 \ln 4$. Durée : $2 \ln 3 \approx 2,2$ h.
- $C''(t) = 8\left(\frac{1}{4}e^{-t/2} - e^{-t}\right) = 2e^{-t}(e^{t/2} - 4)$: négatif avant $4 \ln 2$, positif après. C' est minimale en $t = 4 \ln 2 \approx 2,77$ h ($C' = -\frac{1}{2}$ mg/L/h) : la concentration y **baisse le plus vite**. Point d'inflexion $\left(4 \ln 2; \frac{3}{2}\right)$: **c'est exactement la fin de la période d'efficacité !**
- $C'(0) = 4$: tangente $y = 4t$. $\int_0^T C(t) dt = 8\left[-2e^{-t/2} + e^{-t}\right]_0^T = 8(1 - 2e^{-T/2} + e^{-T}) = 8(1 - e^{-T/2})^2 \rightarrow 8$ mg·h/L.



■ Corrigé de l'exercice 54

- Γ est sous (Ox) pour $x < 0$, au-dessus pour $x > 0$: f décroît sur $]-\infty, 0]$, croît sur $[0, +\infty[$; **minimum** $f(0) = 0$, donc $f \geq 0$. f' croît sur $]-\infty, 2]$ et décroît ensuite (maximum $\approx 0,74$ en 2) : f est convexe sur $]-\infty, 2]$, concave sur $[2, +\infty[$: **inflexion en $x = 2$** .
- $f(4) - f(0) = \int_0^4 f'(x) dx = \text{aire sous } \Gamma \text{ sur } [0, 4] \approx 19$ carreaux de 0,125 : $\approx 2,4$.
- Par parties ($u = t, v' = e^{-t/2}$) : $f(x) = f(0) + \int_0^x te^{-t/2} dt = \left[-2te^{-t/2}\right]_0^x + 2 \int_0^x e^{-t/2} dt$, soit $-2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2} + 4$:
 $f(x) = 4 - (2x + 4)e^{-x/2}$; $f(4) = 4 - \frac{12}{e^2} \approx 2,38$ ✓.
- En $+\infty$: $(2x + 4)e^{-x/2} \rightarrow 0$, donc $f \rightarrow 4$: **asymptote $y = 4$** ; $4 - f(x) = (2x + 4)e^{-x/2} > 0$ pour $x > -2$: C_f est au-dessous, et **coupe l'asymptote en $(-2, 4)$** . En $-\infty$: $f \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \rightarrow -\infty$: BP (Oy) . Comme $\int_0^\lambda f' = f(\lambda) \rightarrow 4$: **l'aire totale (illimitée) sous Γ sur $[0, +\infty[$ vaut 4**, c'est la « hauteur » gagnée par f .
- $f(2) = 4 - \frac{8}{e} \approx 1,06$ et $f'(2) = \frac{2}{e}$: $y = \frac{2}{e}x + 4 - \frac{12}{e}$ (en vert).



Astuce lire C_f : son signe donne les variations de f , ses variations donnent la convexité, et son aire donne les accroissements $f(b) - f(a)$.

■ Corrigé de l'exercice 55

- $\ln \cdot u : u(x) = \frac{x(x-4)}{4} > 0 \iff x \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$; e^u et $u \cdot \exp : \mathbb{R}$; $u \cdot \ln :]0, +\infty[$.
- u décroît sur $]-\infty, 2]$, croît sur $[2, +\infty[$ (minimum -1). $\ln \cdot u$ décroît sur $]-\infty, 0[$, croît sur $]4, +\infty[$; e^u a pour minimum $e^{-1} \approx 0,37$ en 2. Comme $\exp$ et $\ln$ sont croissantes, $u(e^x)$ décroît tant que $e^x \leq 2$ et croît ensuite : minimum -1 en $x = \ln 2$; $u(\ln x)$: minimum -1 en $x = e^2 \approx 7,4$.
(a) = $u \cdot \ln$, (b) = $\ln \cdot u$, (c) = $u \cdot \exp$, (d) = $\exp \cdot u$.

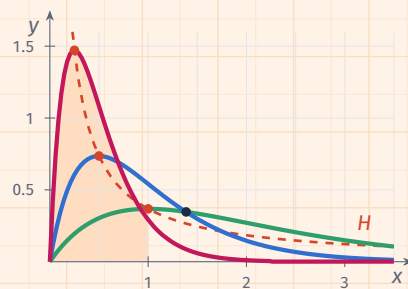
3. (b) : $u \rightarrow 0^+$ en 0^- et en 4^+ , d'où les asymptotes $x = 0$ et $x = 4$; BP (Ox) en $\pm\infty$; axe de symétrie $x = 2$. (d) : BP (Oy) des deux côtés. (c) : en $-\infty$, $e^x \rightarrow 0^+$ et $u(t) = \frac{t(t-4)}{4} < 0$ pour $t \in]0, 4[$: **asymptote** $y = 0$, **courbe au-dessous** ; BP (Oy) en $+\infty$. (a) : asymptote $x = 0$ ($u(\ln x) \rightarrow +\infty$), BP (Ox) en $+\infty$. $u(e^x) = 0 \iff e^x = 4 \iff x = 2 \ln 2$; $u(\ln x) = 0 \iff \ln x \in \{0, 4\} \iff x \in \{1, e^4\}$.

Astuce composer à droite par exp ou ln déforme la courbe horizontalement (l'abscisse t devient $\ln t$ ou e^t) et conserve les ordonnées ; composer à gauche par une fonction croissante conserve les abscisses et les variations.

Niveau 4 · Concours ★★★★★

■ Corrigé de l'exercice 56

- $g'_k(x) = k^2(1 - kx)e^{-kx}$: g_k croît sur $[0, \frac{1}{k}]$, décroît ensuite ; $\lim_{+\infty} g_k = 0$. $M_k(\frac{1}{k}, \frac{k}{e})$: avec $x = \frac{1}{k}$, $y = \frac{k}{e} = \frac{1}{ex}$, donc $M_k \in H$. $g''_k(x) = k^3(kx - 2)e^{-kx}$: inflexion en $\frac{2}{k}$, d'ordonnée $\frac{2k}{e^2} = \frac{4}{e^2x}$: $N_k \in H'$.
- $kg_1(kx) = k \cdot kx e^{-kx} = g_k(x)$ ✓ : si $(X, Y) \in C_1$, alors $(\frac{X}{k}, kY) \in C_k$. Le produit xy est conservé : $\frac{X}{k} \times kY = XY$, donc chaque hyperbole $xy = c$ est conservée ($H : xy = \frac{1}{e}$, $H' : xy = \frac{4}{e^2}$).
- Pour $x > 0$: $g_k(x) = g_j(x) \iff k^2 e^{-kx} = j^2 e^{-jx} \iff 2 \ln k - kx = 2 \ln j - jx \iff x = \frac{2 \ln(k/j)}{k-j}$, qui est > 0 : une seule solution, plus 0. Exemple : $C_1 \cap C_2$ en $x = 2 \ln 2 \approx 1,39$ (point noir).
- $G'_k(x) = -ke^{-kx} + k(1 + kx)e^{-kx} = k^2 x e^{-kx}$ ✓. $A_k(\lambda) = G_k(\lambda) - G_k(0) = 1 - (1 + k\lambda)e^{-k\lambda} \rightarrow 1$: l'aire sous C_k vaut 1 pour tout k (l'affinité $(x, y) \mapsto (\frac{x}{k}, ky)$ conserve les aires).
- $\int_0^a g_k = 1 - (1 + ka)e^{-ka} \rightarrow 1$ ($te^{-t} \rightarrow 0$) : toute l'aire se concentre sur $[0, a]$, si petit que soit a ; la bosse devient de plus en plus haute ($\frac{k}{e}$) et étroite ($\frac{1}{k}$) (en orange : l'aire de C_4 sur $[0, 1]$, déjà $\approx 0,91$).

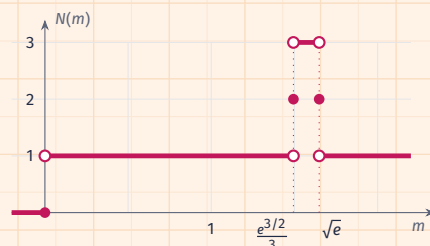


Astuce dilater les ordonnées par k et contracter les abscisses par k conserve les aires et les hyperboles $xy = c$: tous les « records » de la famille sont sur ces hyperboles.

■ Corrigé de l'exercice 57

- $\varphi'(x) = \frac{e^x(x^2+1)-2xe^x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$, nul seulement en 1 : φ est strictement croissante, de limites 0 et $+\infty$: bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. $(E_{m,1})$ a une seule solution si $m > 0$, aucune si $m \leq 0$.
- La tangente à $C_{\exp}$ en 1 est $y = ex$; $P(x) = \frac{e}{2}(x^2 + 1)$ vérifie $P(1) = e$, $P'(1) = e$: même tangente. Mais $e^x - P(x) = (x^2 + 1)(\varphi(x) - \varphi(1))$ a le signe de $x - 1$: les courbes **se traversent** en $(1, e)$.

3. $\psi'(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x + \frac{3}{4})}{(x^2 + \frac{3}{4})^2} = \frac{e^x(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2})}{(x^2 + \frac{3}{4})^2}$: ψ croît, décroît sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, puis croît ; $\psi(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} \approx 1,649$, $\psi(\frac{3}{2}) = \frac{e^{3/2}}{3} \approx 1,494$, limites 0 et $+\infty$. D'où $N(m)$: 0 si $m \leq 0$; 1 si $0 < m < \frac{e^{3/2}}{3}$; 2 si $m = \frac{e^{3/2}}{3}$; 3 si $\frac{e^{3/2}}{3} < m < \sqrt{e}$; 2 si $m = \sqrt{e}$; 1 si $m > \sqrt{e}$.

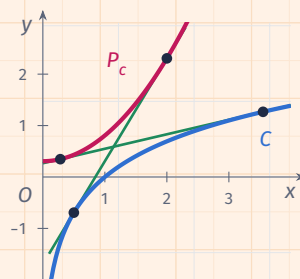


4. ψ'_c a le signe de $x^2 - 2x + c$, de discriminant $4(1 - c)$. Si $c \geq 1$: ψ_c croissante, au plus une solution. Si $0 < c < 1$: racines $1 \pm \sqrt{1 - c}$, et pour m strictement entre le minimum et le maximum locaux, le TVI donne trois solutions.

Piège une tangente commune ne signifie pas « contact sans croisement » : en $(1, e)$, $\varphi'(1) = 0$ sans extremum, et les courbes se traversent.

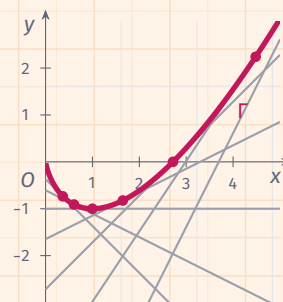
■ Corrigé de l'exercice 58

- T_a : $y = \frac{x}{a} + \ln a - 1$.
- $T_a \cap P_c$: $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{a} + (c - \ln a + 1) = 0$. Tangence $\Leftrightarrow$ racine double $\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} - 2(c - \ln a + 1) = 0 \Leftrightarrow c = \ln a - 1 + \frac{1}{2a^2} = h(a)$; le contact avec P_c a lieu en $x = \frac{1}{a}$.
- $h'(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^3} = \frac{a^2 - 1}{a^3}$: h décroît sur $]0, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$, minimum $h(1) = -\frac{1}{2}$, limites $+\infty$ en 0^+ et en $+\infty$. $c > -\frac{1}{2}$: 2 **tangentes communes** ; $c = -\frac{1}{2}$: 1 ; $c < -\frac{1}{2}$: 0. Pour $c = -\frac{1}{2}$, la seule est T_1 : $y = x - 1$, qui touche aussi $P_{-1/2}$ en $(1, 0)$: les deux courbes y sont tangentes.
- $h(\frac{1}{2}) = -\ln 2 - 1 + 2 = 1 - \ln 2$: $T_{1/2}$: $y = 2x - 1 - \ln 2$, tangente à C en $\frac{1}{2}$ et à P_c en 2. L'autre : $h(a) = 1 - \ln 2$ avec $a > 1$; $h(3,5) \approx 0,294 < 1 - \ln 2 \approx 0,307 < h(3,6) \approx 0,319$: $a \in]3,5 ; 3,6[$.
- $\frac{x^2}{2} + c - \ln x$ a pour minimum $c + \frac{1}{2}$ (en $x = 1$). Si $c > -\frac{1}{2}$, P_c est au-dessus de C (deux tangentes « séparatrices ») ; si $c < -\frac{1}{2}$, les courbes **se coupent** en deux points, et aucune droite ne peut être à la fois au-dessus de C (concave) et au-dessous de P_c (convexe).



■ Corrigé de l'exercice 59

- Pour $x > 0$: $\theta(t) = tx - e^t$, $\theta'(t) = x - e^t$ s'annule en $t = \ln x$ (θ croît puis décroît) : $\max \theta = x \ln x - x = g(x)$. Si $x < 0$: $tx - e^t \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow -\infty$, pas de maximum (et pour $x = 0$, la borne 0 n'est pas atteinte).
- $g'(x) = \ln x$. En $x = e^t$: $g(e^t) = te^t - e^t$ et $g'(e^t) = t$, d'où la tangente $y = t(x - e^t) + te^t - e^t = tx - e^t$: c'est L_t . Par définition du maximum, $tx - e^t \leq g(x)$ pour tout t : Γ est au-dessus de toutes ses tangentes L_t .
- $\rho(x) = tx - x \ln x + x$, $\rho'(x) = t - \ln x$: maximum en $x = e^t$, égal à $te^t - te^t + e^t = e^t$: l'ordonnée à l'origine de la tangente de pente t est $-e^t$. Connaître Γ , c'est connaître la famille de droites, et réciproquement (*dualité*).

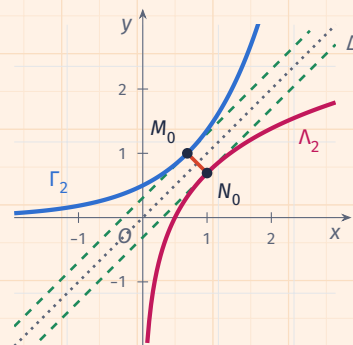


4. $t = 2 : 2x \leq e^2 + x \ln x - x$, soit $x(3 - \ln x) \leq e^2$ (égalité en $x = e^2$). $t = 0 : 0 \leq 1 + x \ln x - x$, soit $x \ln x \geq x - 1$.

Astuce une courbe convexe est « l'enveloppe » de ses tangentes : $g(x) = \max_t (tx - e^t)$ fournit d'un coup une inégalité pour chaque t .

■ Corrigé de l'exercice 60

- $y = \frac{e^x}{a} \iff x = \ln(ay) \ (y > 0) : x \mapsto \frac{e^x}{a}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, de réciproque $x \mapsto \ln(ax) : \Lambda_a$ est la symétrique de Γ_a par rapport à Δ . Les deux fonctions sont croissantes : leurs points communs sont sur Δ (voir l'exercice 43).
- $\varphi'_a(x) = \frac{e^x}{a} - 1$: minimum en $\ln a$, $\varphi_a(\ln a) = 1 - \ln a$, et $\varphi_a \rightarrow +\infty$ en $\pm\infty$. $a < e$: **aucun point commun** ; $a = e$: **un seul** ; $a > e$: **deux**. Pour $a = e$, $\Gamma_e : y = e^{x-1}$ et $\Lambda_e : y = 1 + \ln x$ sont toutes deux tangentes à Δ en $(1, 1)$.
- $d(M, \Delta) = \frac{\varphi_a(x)}{\sqrt{2}} \geq \frac{1 - \ln a}{\sqrt{2}}$, et de même pour N (son symétrique est sur Γ_a). M et N sont de part et d'autre de Δ : $[MN]$ coupe Δ en H , et $MN = MH + HN \geq d(M, \Delta) + d(N, \Delta) \geq \sqrt{2}(1 - \ln a)$. Égalité pour $M_0(\ln a, 1)$ et $N_0(1, \ln a)$, avec $(M_0N_0) \perp \Delta$.
- $a = 2$: distance minimale $\sqrt{2}(1 - \ln 2) \approx 0,43$ (en rouge). Quand $a \rightarrow e$, elle tend vers 0 : les courbes finissent par se toucher en $(1, 1)$. En M_0 , la pente de Γ_a est $\frac{e^{\ln a}}{a} = 1$; en N_0 , celle de Λ_a est $\frac{1}{1} = 1$: les tangentes en M_0 et N_0 sont **parallèles à Δ** (en vert).



Astuce pour deux courbes symétriques par rapport à Δ , la plus courte distance se lit sur Δ : cherchez le point où la tangente est parallèle à Δ .

Partie 4 · Méthodes, astuces, pièges

20 fiches pour lire et tracer vite, sans tomber dans les pièges

1 La chaîne de transformations

Tronc commun

Décomposer, puis suivre les points

Méthode : la chaîne en quatre maillons

- 1 Écrire $g(x) = k f(x - a) + b$.
- 2 Agir d'abord sur x : translation de vecteur $a\vec{i}$.
- 3 Puis sur y , dans l'ordre : ordonnées $\times |k|$, symétrie d'axe (Ox) si $k < 0$, translation de vecteur $b\vec{j}$.
- 4 Contrôler : $M(x_0, y_0) \mapsto M'(x_0 + a, k y_0 + b)$.

Exemple résolu : de $y = \frac{1}{x}$ à $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$

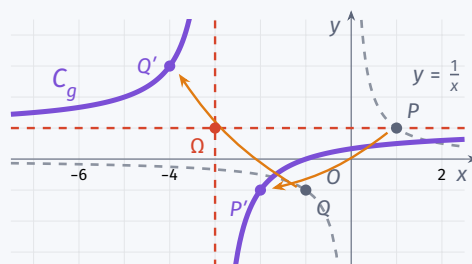
$$g(x) = 1 - \frac{2}{x+3} = -2 f(x+3) + 1 \text{ avec } f(x) = \frac{1}{x} :$$

$$\left[\frac{1}{x} \right] \xrightarrow{-3\vec{i}} \left[\frac{1}{x+3} \right] \xrightarrow{\times(-2)} \left[\frac{-2}{x+3} \right] \xrightarrow{+\vec{j}} \left[1 - \frac{2}{x+3} \right]$$

$$P(1, 1) \rightarrow (-2, 1) \rightarrow (-2, -2) \rightarrow P'(-2, -1)$$

$$Q(-1, -1) \rightarrow (-4, -1) \rightarrow (-4, 2) \rightarrow Q'(-4, 3)$$

Bilan : centre $\Omega(-3, 1)$; g croît sur chaque intervalle.



★ **Astuce de concours : suivre le centre**

Une hyperbole est connue par son centre et **un** point ; le centre suit la chaîne, $O \rightarrow (-3, 0) \rightarrow (-3, 1)$, et entraîne les asymptotes. Face à quatre courbes : tester le centre, puis un point.

Attention, piège ! $y = f(3 - x)$

$f(3-x) = f(-(x-3))$: symétrie d'axe (Oy) **puis** translation de $+3\vec{i}$, et non $-3\vec{i}$. Bilan : $(x_0, y_0) \mapsto (3-x_0, y_0)$, symétrie d'axe $x = \frac{3}{2}$.



À toi !

1. $A(1, 3) \in C_f$: quel point est sur la courbe de $y = 4 - 2f(x+3)$?

2. Quelle translation envoie $y = \frac{1}{x}$ sur $y = \frac{2x+5}{x+2}$?

Réponses. 1. $x+3 = 1$: $(-2, 4 - 2 \times 3) = (-2, -2)$. 2. $\frac{2x+5}{x+2} = 2 + \frac{1}{x+2}$: vecteur $-2\vec{i} + 2\vec{j}$.

2

Lire l'expression sur la courbe

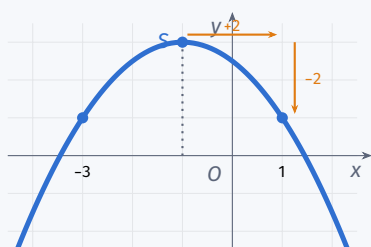
Tronc commun

Trois familles, trois lectures

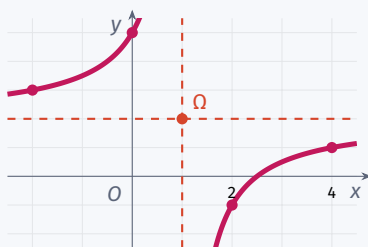
Méthode : lire avant de calculer

- 1 Reconnaître la famille : parabole $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$; hyperbole $y = \beta + \frac{k}{x - \alpha}$; ligne brisée (affine par morceaux).
- 2 Lire les éléments « gratuits » : le sommet $S(\alpha, \beta)$; le centre $\Omega(\alpha, \beta)$, intersection des deux asymptotes ; les sommets de la ligne brisée.
- 3 Un point de plus donne le dernier coefficient : a, k , ou la pente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de chaque morceau.
- 4 Contrôler avec un deuxième point lu sur le quadrillage.

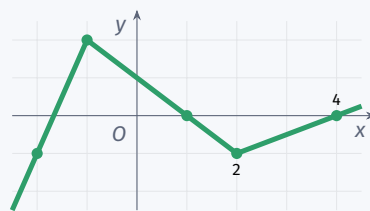
Exemple résolu : trois courbes, trois équations



(a) $S(-1, 3)$ et $(1, 1)$:
 $1 = a \times 2^2 + 3$, $a = -\frac{1}{2}$:
 $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 3$.



(b) $\Omega(1, 2)$ et $(2, -1)$:
 $k = (2 - 1)(-1 - 2) = -3$:
 $y = 2 - \frac{3}{x - 1} = \frac{2x - 5}{x - 1}$.



(c) pentes 3, -1, $\frac{1}{2}$:
 $y = 3x + 5$ si $x \leq -1$;
 $y = 1 - x$ si $-1 \leq x \leq 2$;
 $y = \frac{x}{2} - 2$ si $x \geq 2$.

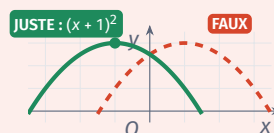
Contrôles : (a) $(-3, 1)$, symétrique de $(1, 1)$ par rapport à l'axe $x = -1$; (b) $(4, 1)$ et $(0, 5)$: produit -3 ✓ ; (c) $3 \times (-1) + 5 = 2 = 1 - (-1)$: raccord en $(-1, 2)$.

★ Astuce de concours : la constante cachée k

Pour $y = \beta + \frac{k}{x - \alpha}$, on a $k = (x - \alpha)(y - \beta)$ en tout point de la courbe : le produit des écarts au centre est constant. De même $a = \frac{y - \beta}{(x - \alpha)^2}$ pour une parabole : on lit a « à un carreau du sommet ». Signe : $k > 0$, branches au nord-est et au sud-ouest du centre ; $k < 0$, au nord-ouest et au sud-est.

Attention, piège ! le signe dans la parenthèse

Sommet $S(-1, 3)$: $x - \alpha = x - (-1) = x + 1$, donc $(x + 1)^2$ et **pas** $(x - 1)^2$; de même, l'asymptote $x = 1$ donne le dénominateur $x - 1$. Contrôle : l'abscisse du sommet doit annuler la parenthèse.



À toi !

1. Une parabole coupe (Ox) en 1 et 5, et (Oy) en $-\frac{5}{2}$. Son équation ? son sommet ?
2. Une hyperbole a pour centre $(-2, 1)$ et passe par $(-1, 4)$. Son équation ?

Réponses. 1. $y = a(x - 1)(x - 5)$ et $5a = -\frac{5}{2}$: $y = -\frac{1}{2}(x - 1)(x - 5)$, sommet $(3, 2)$. 2. $k = (-1 + 2)(4 - 1) = 3$: $y = 1 + \frac{3}{x + 2} = \frac{x + 5}{x + 2}$.

3

 $|f(x)|$, $f(|x|)$ et $|f(|x|)|$

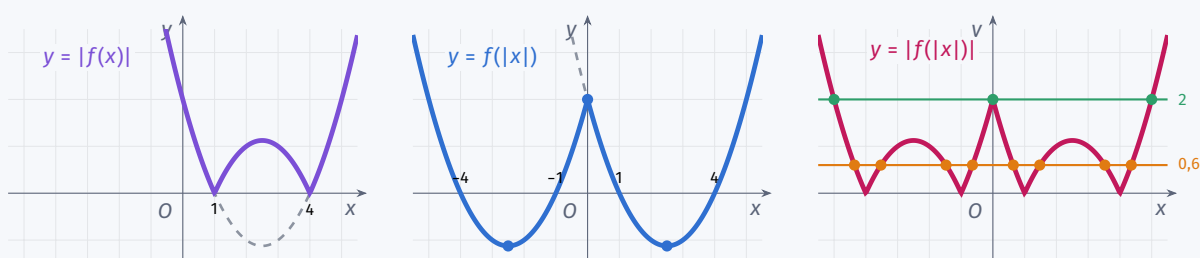
Tronc commun

Plier, recopier... ou les deux

Méthode : trois gestes

- 1 $y = |f(x)|$: on **plie** vers le haut la partie de C_f située sous (Ox).
- 2 $y = f(|x|)$: on **efface** la partie d'abscisses $x < 0$, puis on **recopie** la partie $x \geq 0$ par symétrie d'axe (Oy).
- 3 $y = |f(|x|)|$: on recopie puis on plie (ou l'inverse : le résultat est le même).
- 4 Pour compter les solutions de $|f(|x|)| = m$, on fait glisser la droite horizontale $y = m$.

Exemple résolu : $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-4)$: racines 1 et 4, sommet $(\frac{5}{2}, -\frac{9}{8})$, $f(0) = 2$



Lecture de $|f(|x|)| = m$ (on fait glisser la droite $y = m$ sur la troisième figure) :

m	$m < 0$	$m = 0$	$0 < m < \frac{9}{8}$	$m = \frac{9}{8}$	$\frac{9}{8} < m < 2$	$m = 2$	$m > 2$
solutions	0	4	8	6	4	3	2

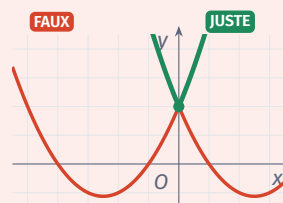
Pour $m = 0,6$: huit points (en orange) ; pour $m = 2$: 0 et ± 5 seulement.

★ **Astuce de concours : compter sans dessiner**

Avec $t = |x| \geq 0$: $|f(|x|)| = m \iff f(t) = m$ ou $f(t) = -m$. Chaque solution $t > 0$ donne **deux** réels $x = \pm t$, la solution $t = 0$ n'en donne qu'une : $N = 2 \times (\text{nombre de } t > 0) + (1 \text{ si } t = 0)$.
 Pour $m = 2$: $f(t) = 2 \iff t \in \{0; 5\}$, et $f(t) = -2$ est impossible : $N = 2 + 1 = 3$.

Attention, piège ! le sommet peut disparaître

Pour $g(x) = f(-x) = \frac{1}{2}(x+1)(x+4)$, le sommet $(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{8})$ est à **gauche** de (Oy) : il est effacé ! Sur $[0, +\infty[$, g croît depuis $g(0) = 2$: $g(|x|) \geq 2$, minimum 2 en 0 (point anguleux), aucun zéro.

**À toi !**

1. Nombre de solutions de l'équation $|x^2 - 8|x|| = 7$?
2. $f(x) = (x-2)(x+5)$: nombre de solutions de $f(|x|) = 0$?

Réponses. 1. $t^2 - 8t = 7$ ou $t^2 - 8t = -7$: $t \in \{1; 7; 4 + \sqrt{23}\}$, trois $t > 0$: 6 solutions. 2. Seule $t = 2 \geq 0$ convient : $x = \pm 2$, 2 solutions.

4

Lignes brisées et valeurs absolues

Tronc commun

Des sommets et des pentes, rien d'autre

Méthode : $f(x) = \alpha x + \beta + \sum a_i |x - x_i|$

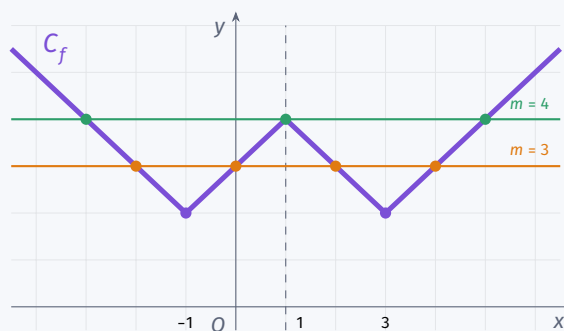
- 1 Ranger les points de cassure $x_1 < x_2 < \dots$ (là où une valeur absolue s'annule).
- 2 Pente à l'extrême droite : $\alpha + \sum a_i$; en franchissant une cassure x_i vers la gauche, la pente diminue de $2a_i$.
- 3 Calculer f **seulement** aux cassures, puis relier ; aux deux bouts, deux demi-droites.
- 4 Un coefficient $a_i > 0$ crée un « creux », un coefficient $a_i < 0$ crée un « pic ».

Exemple résolu : $f(x) = |x + 1| + |x - 3| - |x - 1|$ **Cassures :** -1, 1, 3.**Pentes**, de droite à gauche : $1 + 1 - 1 = 1$, puis (en franchissant 3) $1 - 2 = -1$, puis (en 1, où $a = -1$) $-1 + 2 = 1$, puis (en -1) $1 - 2 = -1$.**Valeurs aux cassures :** $f(-1) = 2$, $f(1) = 4$, $f(3) = 2$.

D'où, sans aucun tableau de signes :

x	$]-\infty, -1]$	$[-1, 1]$	$[1, 3]$	$[3, +\infty[$
$f(x)$	$1 - x$	$x + 3$	$5 - x$	$x - 1$

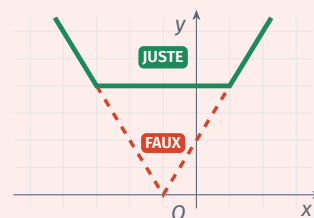
Un « W » d'axe $x = 1$. Solutions de $f(x) = m$:
 0 si $m < 2$; 2 si $m = 2$; 4 si $2 < m < 4$; 3 si $m = 4$ (-3, 1, 5) ; 2 si $m > 4$.

pour $m = 3$: $x \in \{-2; 0; 2; 4\}$ ★ **Astuce de concours :** lire l'expression sur la ligne brisée

À l'inverse, toute ligne brisée continue s'écrit $\alpha x + \beta + \sum a_i |x - x_i|$ avec, en chaque sommet x_i , $a_i = \frac{1}{2}(\text{pente après} - \text{pente avant})$, α = demi-somme des pentes extrêmes, puis β par un point. Pour le « W » : sauts +2, -2, +2, donc $a_i = 1, -1, 1$; $\alpha = \frac{1-1}{2} = 0$, et $f(1) = 4$ donne $\beta = 0$.

Attention, piège ! on n'additionne pas l'intérieur

$|x + 3| + |x - 1| \neq |2x + 2|$: les deux courbes coïncident hors de $[-3, 1]$ (où $x + 3$ et $x - 1$ ont le même signe), mais sur $[-3, 1]$ la somme garde la valeur 4 (un **palier**), tandis que $|2x + 2|$ descend jusqu'à 0. Règle : $|a| + |b| \geq |a + b|$, avec égalité si et seulement si a et b ont le même signe.

**À toi !**

1. Pentes successives et minimum de $g(x) = 2|x| - |x - 3|$?
2. Pour quel m l'équation $|x - 2| + |x + 4| = m$ a-t-elle une infinité de solutions ?

Réponses. 1. Pentes $-2 + 1 = -1$ ($x < 0$), $2 + 1 = 3$ ($0 < x < 3$), $2 - 1 = 1$ ($x > 3$) : minimum $g(0) = -3$. 2. Palier de valeur 6 sur $[-4, 2]$: $m = 6$.

5

Max et min de deux fonctions

Tronc commun

Le dessus, le dessous

Méthode : l'enveloppe

- 1 Tracer C_f et C_g dans le même repère.
- 2 Résoudre $f(x) = g(x)$: les points d'intersection sont les seuls endroits où l'on change de courbe.
- 3 Sur chaque intervalle, $\max(f, g)$ suit la courbe du **dessus**, $\min(f, g)$ celle du **dessous**.
- 4 Au besoin, revenir aux formules : $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$, $\min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$.

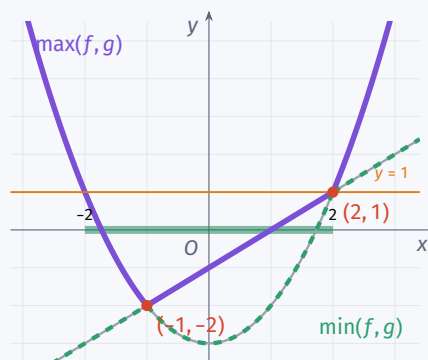
Exemple résolu : tracer $h(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x - 4 + |x^2 - x - 2|)$

Reconnaître un max : c'est $\frac{a+b+|a-b|}{2}$ avec $a = x^2 - 3$ et $b = x - 1$, car $a + b = x^2 + x - 4$ et $a - b = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Donc $h = \max(f, g)$ avec $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = x - 1$.

Points communs : $x = -1$ et $x = 2$, soit $(-1, -2)$ et $(2, 1)$: $h = g$ sur $[-1, 2]$, $h = f$ ailleurs.

Minimum de h : -2 , en $x = -1$: le point le plus bas de l'enveloppe supérieure est ici un point d'intersection.

Inéquations : $h(x) \leq 1 \iff x^2 - 3 \leq 1$ et $x - 1 \leq 1 \iff x \in [-2, 2]$ (en vert sur l'axe) ;
 $\min(f, g)(x) \geq 0 \iff x^2 \geq 3$ et $x \geq 1 \iff x \geq \sqrt{3}$.

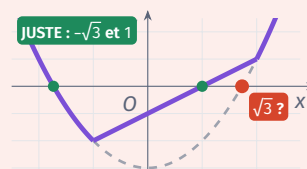


★ Astuce de concours : ET / OU

$\max(f, g) \leq c \iff f \leq c$ **et** $g \leq c$; $\max(f, g) \geq c \iff f \geq c$ **ou** $g \geq c$. Pour le minimum, on échange « et » et « ou ». Ainsi, $\max(x^2 - 3, x - 1) \leq 1$ se résout sans tracer l'enveloppe : deux inéquations, une intersection d'intervalles.

Attention, piège ! résoudre $\max(f, g) = 0$

Chaque solution doit être sur la **bonne** branche :
 $x - 1 = 0$ donne $1 \in [-1, 2]$, où $h = g$ ✓ ; $x^2 - 3 = 0$ donne $\pm\sqrt{3}$, mais $\sqrt{3} \approx 1,73$ est dans $[-1, 2]$, où $h = g$ et non f : on le **rejette**. Finalement $S = \{-\sqrt{3}; 1\}$ (et non trois solutions).



À toi !

1. Minimum de la fonction $x \mapsto \max(2x + 1, 4 - x)$?

2. Résoudre $\min(x^2, 4 - x^2) \geq 1$.

Réponses. 1. Une droite croissante, une décroissante : le minimum est au croisement, $2x + 1 = 4 - x$, $x = 1$: valeur 3.
 2. $x^2 \geq 1$ et $4 - x^2 \geq 1$: $1 \leq x^2 \leq 3$, $S = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$.

6

Compter avec une droite mobile

Tronc commun 1^{re} Bac

Glisser ou tourner : deux films

Méthode : compter des points communs

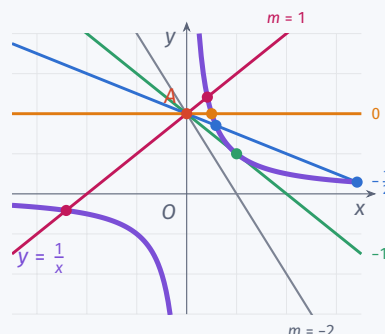
- 1 Écrire l'équation sous la forme « courbe fixe = droite mobile ».
- 2 Paramètre isolé, $g(x) = m$: la droite **horizontale** $y = m$ glisse. 3 Droite $y = m(x - a) + b$: elle **tourne** autour de $A(a, b)$.
- 4 Repérer les positions critiques (tangente, passage par un point anguleux, parallèle à une asymptote) et compter entre elles.

Exemple résolu : nombre de solutions de $\frac{1}{x} = mx + 2$ selon m

Les droites $D_m : y = mx + 2$ tournent autour de $A(0, 2)$; pour $x \neq 0$: $\frac{1}{x} = mx + 2 \iff mx^2 + 2x - 1 = 0$.

- $m \neq 0$: $\Delta' = 1 + m$, nul pour $m = -1$: D_{-1} est **tangente** en $(1, 1)$.
- $m = 0$: D_0 , **parallèle** à l'asymptote (Ox) , donne $x = \frac{1}{2}$ seulement.
- $m > 0$: produit des racines $-\frac{1}{m} < 0$: un point par branche.

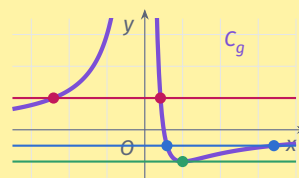
m	< -1	-1	$]-1, 0[$	0	> 0
solutions	0	1	2	1	2



le faisceau de droites passant par A

★ Astuce de concours : le deuxième film

On peut aussi **isoler** m (1^{re} Bac) : $m = \frac{1-2x}{x^2} = g(x)$, $g'(x) = \frac{2(x-1)}{x^3}$: g croît de 0 à $+\infty$ sur $]-\infty, 0[$, décroît de $+\infty$ à -1 sur $]0, 1]$, croît de -1 à 0 sur $[1, +\infty[$. La droite horizontale $y = m$ redonne le même tableau ; la valeur critique -1 est le **minimum** de g .

Attention, piège ! $m = 0$: il n'y a plus de Δ

Pour $m = 0$, l'équation $mx^2 + 2x - 1 = 0$ n'est plus du second degré : « $\Delta' = 1 > 0$, donc deux solutions » est **faux**, il n'y en a qu'une ($x = \frac{1}{2}$). La droite orange D_0 , parallèle à l'asymptote, ne coupe qu'une branche : la seconde intersection est « partie à l'infini ».

À toi !

1. Nombre de points communs à la parabole $y = x^2$ et aux droites passant par $(0, -1)$?
2. Pour quels réels m l'équation $|x| = m(x - 1)$ a-t-elle exactement deux solutions ?

Réponses. 1. $x^2 - mx + 1 = 0$, $\Delta = m^2 - 4$: 2 points si $|m| > 2$, 1 si $|m| = 2$ (tangentes $y = \pm 2x - 1$), 0 si $|m| < 2$; et 1 pour la droite $x = 0$. 2. « V » de pentes ± 1 , droites par $(1, 0)$: $-1 < m < 0$.

7

Équations « impossibles »

1^{re} Bac 2^e Bac

Pas de formule ? Deux courbes !

Méthode : croiser deux courbes

- 1 Séparer l'équation en $f(x) = g(x)$, avec deux courbes **connues**.
- 2 **Cadrer** : un encadrement (par exemple $-1 \leq \cos x \leq 1$) limite la zone de recherche.
- 3 Compter les intersections sur la figure, puis **prouver** : $h = f - g$ strictement monotone sur chaque morceau, et TVI.
- 4 Localiser chaque solution entre deux valeurs simples a et b telles que $h(a)h(b) < 0$.

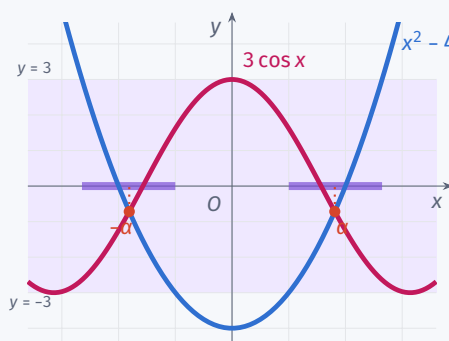
Exemple résolu : résoudre $x^2 - 4 = 3 \cos x$

Cadre : $|x^2 - 4| \leq 3 \iff 1 \leq |x| \leq \sqrt{7}$ ($\sqrt{7} \approx 2,65$); les deux membres sont pairs : on étudie $x \geq 0$.

Monotonie : sur $[1, \sqrt{7}] \subset [0, \pi]$, $h(x) = x^2 - 4 - 3 \cos x$ a pour dérivée $h'(x) = 2x + 3 \sin x > 0$; $h(1) < 0 < h(\sqrt{7})$: **une seule** solution α .

Localisation : $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 4 < 0$ et $h\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi^2}{9} - \frac{5}{2} > 0$: $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right[$ ($\alpha \approx 1,81$).

Bilan : deux solutions, $-\alpha$ et α .



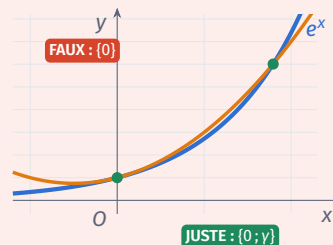
la bande $-3 \leq y \leq 3$ cadre la recherche

★ Astuce de concours : la convexité compte à votre place (2^e Bac)

Une droite coupe une courbe convexe (ou concave) en **au plus deux points** : $h = f - (\text{droite})$ est convexe, donc monotone de part et d'autre de son minimum. Ainsi $e^x = x + 3$: $h(x) = e^x - x - 3$, $h(-3) > 0$, $h(0) = -2 < 0$, $h(2) = e^2 - 5 > 0$: **exactement deux solutions**, une dans $]-3, 0[$ et une dans $]0, 2[$.

Attention, piège ! la racine évidente cache l'autre

$e^x = 1 + x + x^2$: $x = 0$ saute aux yeux, et les courbes y sont même **tangentes**... La parabole passe au-dessus, mais l'exponentielle la rattrape : $e - 3 < 0 < e^2 - 7$, d'où une deuxième solution $\gamma \in]1, 2[$ ($\gamma \approx 1,79$). (Pour $x < 0$: $e^x - 1 - x - x^2$ croît et reste négatif.)



À toi !

1. Nombre de solutions de l'équation $x^3 = \cos x$?
2. Nombre de solutions de l'équation $e^{-x} = x^2$?

Réponses. 1. Cadre $|x| \leq 1$, et $x^3 \leq 0 < \cos x$ sur $[-1, 0]$; sur $[0, 1]$, $x^3 - \cos x$ croît de -1 à $1 - \cos 1 > 0$: une solution. 2. $e^{-x} > x^2$ si $x < 0$ ($e^t - t^2$ croît, vaut 1 en 0) ; une seule solution, dans $]0, 1[$.

8

Partie entière : marches et scies

1^{re} Bac

Un morceau par marche

Méthode : marche par marche

- 1 Sur chaque intervalle $[k, k + 1[$ ($k \in \mathbb{Z}$), remplacer $E(x)$ par l'entier k .
- 2 Tracer le morceau obtenu : disque **plein** à gauche, cercle **vide** à droite.
- 3 Pour $E(u(x))$, les sauts ont lieu là où $u(x)$ est un entier.
- 4 Pour une équation, poser $k = E(x)$, résoudre, puis **vérifier** que la solution tombe bien dans $[k, k + 1[$.

Exemple résolu : résoudre $x - E(x) = \frac{x+2}{5}$

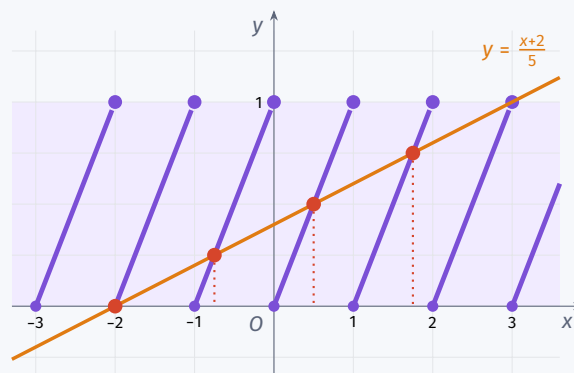
La « scie » $s(x) = x - E(x)$ vaut $x - k$ sur $[k, k + 1[$: des dents de pente 1, des valeurs dans $[0, 1[$, la période 1.

Sur $[k, k + 1[$: $x - k = \frac{x+2}{5} \iff x = \frac{5k+2}{4}$.

Condition : $k \leq \frac{5k+2}{4} < k + 1 \iff -2 \leq k < 2$.

Donc $k \in \{-2, -1, 0, 1\}$: **4 solutions** : $-2, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{4}$.

Contrôle : hors de $[-2, 3[$, la droite sort de la bande $0 \leq y < 1$ où vit la scie ; et $(3, 1)$ est un point **vide** : pas de cinquième solution.



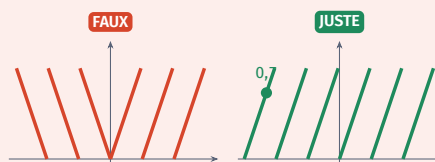
quatre points communs, dans la bande violette

★ Astuce de concours : la bande de l'escalier

$x - 1 < E(x) \leq x$: l'escalier vit dans la bande comprise entre les droites $y = x - 1$ (exclue) et $y = x$. Pour $E(x) = g(x)$, on ne cherche que là où C_g traverse cette bande : deux inéquations ordinaires, puis on teste les entiers possibles. Corollaire utile : $\frac{E(x)}{x} \rightarrow 1$ en $+\infty$, puisque $1 - \frac{1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1$ pour $x > 0$.

Attention, piège ! la scie pour $x < 0$

$x - E(x)$ n'est pas « le chiffre après la virgule » quand $x < 0$: pour $x = -2,3$, $E(x) = -3$ et $x - E(x) = 0,7$ (et non 0,3). La scie garde la **même** orientation à gauche de 0 : elle n'est pas symétrique par rapport à (Oy) .



À toi !

1. Résoudre $E(3x + 1) = 2$. 2. Résoudre $E(x) = x^2 - 2$ (utiliser la bande).

Réponses. 1. $2 \leq 3x + 1 < 3 \iff x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. 2. La bande : $x \in [-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}[\cup]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2]$; puis $x^2 = k + 2$ avec $k = E(x)$: $S = \{-1; \sqrt{3}; 2\}$.

9

La courbe de $1/f$ 1^{re} BacLà où f s'annule, $\frac{1}{f}$ s'envole

Méthode : cinq réflexes

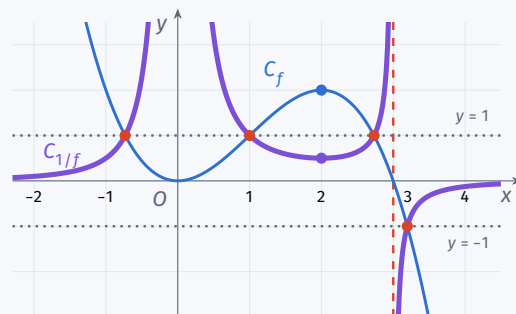
- 1 Zéros de $f \rightarrow$ asymptotes verticales de $\frac{1}{f}$: racine simple, branches de part et d'autre ($+\infty$ d'un côté, $-\infty$ de l'autre) ; racine double, $\frac{1}{f}$ garde son signe.
- 2 Là où $|f| \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{f} \rightarrow 0$: asymptote $y = 0$.
- 3 $\frac{1}{f}$ a le même signe que f .
- 4 Variations contraires sur chaque intervalle où f ne s'annule pas : un maximum $M \neq 0$ devient un minimum $\frac{1}{M}$.
- 5 Points communs : là où $f = \pm 1$.

Exemple résolu : $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3-x)$

$f'(x) = \frac{3}{2}x(2-x)$: minimum 0 en 0 (racine **double**), maximum 2 en 2, racine **simple** 3.

Donc, pour $\frac{1}{f}$: asymptote $x = 0$ ($+\infty$ des deux côtés), asymptote $x = 3$ ($+\infty$ à gauche, $-\infty$ à droite), asymptote $y = 0$; minimum local $\frac{1}{2}$ en 2 ; croissante sur $]-\infty, 0[$, décroissante sur $]0, 2[$, croissante sur $[2, 3[$ et sur $]3, +\infty[$.

Points communs : $f(x) = 1 \iff x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \iff (x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0$: $x \in \{1; 1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$; $f(x) = -1$: une solution $x \in]3, 4[$.

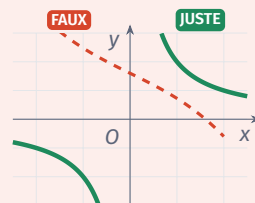
en rouge : les points où $f = \pm 1$

★ **Astuce de concours** : reconnaître $C_{1/f}$ au premier coup d'œil

QCM « quelle est la courbe de $\frac{1}{f}$? » : trois tests suffisent, les asymptotes verticales aux zéros de f (branches du même côté pour une racine double), le signe de f , et les points de C_f d'ordonnée ± 1 .

Attention, piège ! « variations contraires » : intervalle par intervalle

$f(x) = \frac{x}{2}$ croît sur $[-2, 2]$, mais $\frac{1}{f} = \frac{2}{x}$ n'est pas « décroissante sur $[-2, 2]$ » : elle n'est pas définie en 0, et $\frac{1}{f}(-1) < \frac{1}{f}(1)$. Elle décroît sur $[-2, 0[$ et sur $]0, 2]$, **séparément**.



À toi !

1. $f(x) = x^2 + 2x - 8$: asymptotes et extremum local de $\frac{1}{f}$?
2. Points communs aux courbes de x^3 et de $\frac{1}{x^3}$?

Réponses. 1. $f = (x+4)(x-2)$: asymptotes $x = -4$, $x = 2$, $y = 0$; $f(-1) = -9$ minimum de f : maximum local $-\frac{1}{9}$. 2. $x^3 = \pm 1$: $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

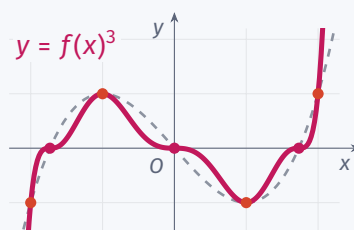
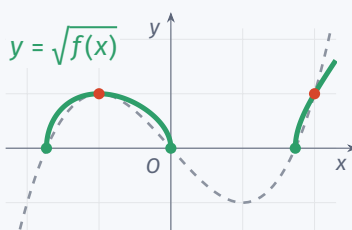
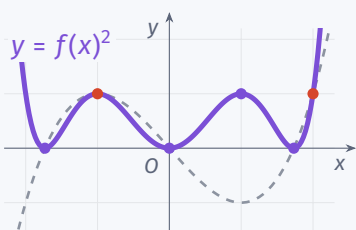
10

Les courbes de f^2 , $\sqrt{f}$ et f^3 1^{re} Bac

Zoomer sur les zéros

Méthode : ce que devient la courbe

	en un zéro simple de f	variations	si $0 < f < 1$ / si $ f > 1$
① f^2	rebond, tangente horizontale	celles de $ f $	sous $ f $ / au-dessus de $ f $
② $\sqrt{f}$ ($f \geq 0$)	tangente verticale	celles de f	au-dessus de f / au-dessous
③ f^3	inflexion à tangente horizontale	celles de f	« écrasée » / « étirée »
④	Toutes ces courbes passent par les points de C_f où $f = 0$ ou $f = 1$ (et f^3 aussi par ceux où $f = -1$).		

Exemple résolu : $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x)$: zéros 0 et $\pm\sqrt{3}$, maximum $f(-1) = 1$, minimum $f(1) = -1$ 

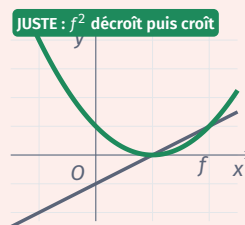
En gris pointillé : C_f . Les points rouges $(-1, 1)$ et $(2, 1)$ sont communs aux quatre courbes (avec les zéros) ; f et f^3 partagent aussi $(1, -1)$ et $(-2, -1)$. Sur $[-1, 1]$, f et f^3 décroissent, mais f^2 décroît puis croît (minimum 0 en 0). $\sqrt{f}$ n'existe que sur $[-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$, avec trois tangentes verticales.

★ Astuce de concours : compter les solutions de $f^2 = m$ et de $f^3 = m$

$f(x)^2 = m$ ($m > 0$) $\iff f(x) = \sqrt{m}$ ou $f(x) = -\sqrt{m}$: on lit deux droites sur C_f ; $f(x)^3 = m \iff f(x) = \sqrt[3]{m}$: une seule droite. Avec l'exemple : $f(x)^2 = \frac{1}{4} \iff f(x) = \pm\frac{1}{2}$, et chaque valeur, comprise entre -1 et 1 , est prise trois fois : 6 solutions.

Attention, piège ! f croissante n'entraîne pas f^2 croissante

Là où $f < 0$ et croît, $|f|$ décroît, donc f^2 **décroît** : avec $f(x) = x - 1$ sur $[-1, 2]$, f croît, mais $f(x)^2 = (x - 1)^2$ décroît sur $[-1, 1]$ avant de croître. Règle : f^2 a les variations de $|f|$, pas celles de f .



À toi !

1. Avec la fonction f de l'exemple, combien de solutions a l'équation $f(x)^3 = \frac{1}{8}$?
2. Pour $f(x) = x - 1$, sur quel ensemble la courbe de f^3 est-elle au-dessous de celle de f ?

Réponses. 1. $f(x) = \frac{1}{2}$: 3 solutions. 2. $(x - 1)^3 \leq x - 1 \iff (x - 1)x(x - 2) \leq 0 \iff x \in]-\infty, 0] \cup [1, 2]$.

11 Reconnaître f , f' et f''

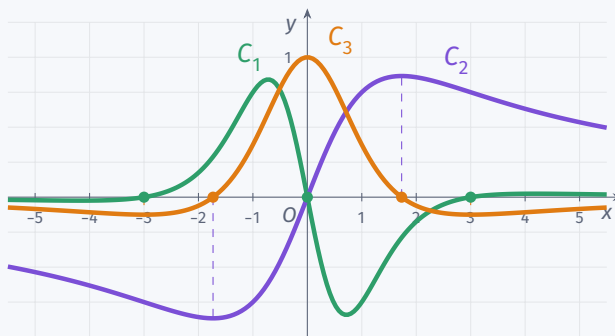
1^{re} Bac 2^e Bac

Une enquête en trois indices

Méthode : l'enquête

① Repérer les **tangentes horizontales** de chaque courbe. ② Si C_B s'annule (en changeant de signe) aux extremums de C_A , elle est candidate pour la dérivée. ③ Vérifier le **signe** : C_B au-dessus de (Ox) là où C_A monte. ④ Boucler : f'' s'annule où f' est extrémale (inflexions de C_f).

Exemple résolu : trois courbes : laquelle est C_f , laquelle $C_{f'}$, laquelle $C_{f''}$?



Enquête. C_2 a ses extremums en $\pm\sqrt{3} \approx \pm 1,7$: ce sont les zéros de C_3 , positive entre eux, là où C_2 monte. Les extremums de C_3 (en 0 et ± 3) sont les zéros de C_1 , positive là où C_3 croît. Ceux de C_1 ne sont des zéros d'aucune courbe : elle termine la chaîne.

$$C_2 = C_f, C_3 = C_{f'}, C_1 = C_{f''}.$$

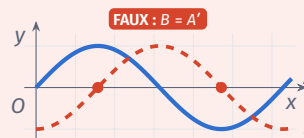
(Ici $f(x) = \frac{3x}{x^2+3}$, $f'(x) = \frac{3(3-x^2)}{(x^2+3)^2}$, $f''(x) = \frac{6x(x^2-9)}{(x^2+3)^3}$: trois inflexions, en 0 et ± 3 .)

★ Astuce de concours : les parités alternent

Si f est impaire, f' est paire et f'' impaire (et inversement). Ici, la seule courbe symétrique par rapport à (Oy) est C_3 : c'est forcément $C_{f'}$, enquête finie en une seconde. Pour un polynôme : le degré baisse de 1 à chaque dérivation.

Attention, piège ! les zéros ne suffisent pas, il faut le signe

La courbe $B : y = -\cos x$ s'annule exactement aux extremums de la courbe $A : y = \sin x$... mais elle est **négative** sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, où $\sin$ croît : B est la courbe de $-f'$, pas celle de f' .



À toi !

- $C_{f'}$: parabole de sommet $(2, -1)$ coupant (Ox) en 1 et 3. Extremums de f ? inflexion ?
- $C_{f''}$ est au-dessus de (Ox) sur I : et f' ? et C_f ?

Réponses. 1. Signe de f' : +, -, + : maximum local en 1, minimum local en 3 ; f' minimale en 2 : inflexion en $x = 2$. 2. f' croît sur I : C_f y est convexe.

12

Centres et axes cachés

1^{re} Bac

Deviner, puis vérifier

Méthode : changer d'origine

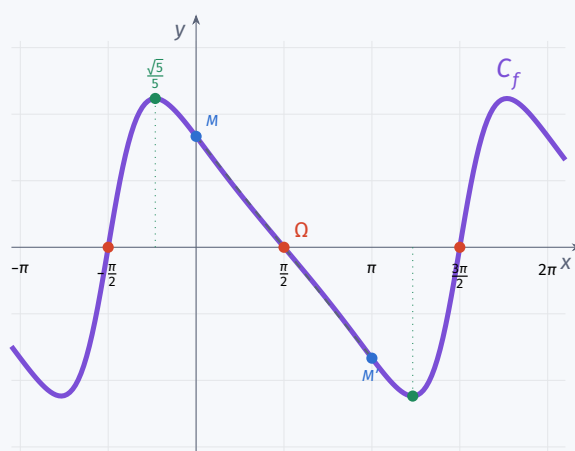
- 1 **Deviner** un candidat : milieu de deux points de même ordonnée, extremum (axe), zéro « central » (centre). 2 Poser $X = x - a$, $Y = y - b$: on regarde la courbe depuis $\Omega(a, b)$. 3 Axe $x = a \iff f(2a - x) = f(x)$; centre $\Omega(a, b) \iff f(2a - x) + f(x) = 2b$. 4 **Exploiter** : étudier sur une moitié.

Exemple résolu : $f(x) = \frac{\cos x}{3 + 2 \sin x}$

$3 + 2 \sin x \geq 1 > 0$: $D_f = \mathbb{R}$, période 2π . On voit $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ et on teste $(\frac{\pi}{2}, 0)$: $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, donc $f(\pi - x) = -f(x)$: centre $\Omega(\frac{\pi}{2}, 0)$; de même $f(-\pi - x) = -f(x)$: centre $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Étude sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $f'(x) = \frac{-3 \sin x + 2}{(3 + 2 \sin x)^2}$ s'annule en x_0 , $\sin x_0 = -\frac{2}{3}$ ($x_0 \approx -0,73$) ; $\cos x_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}$: f croît de 0 à $f(x_0) = \frac{\sqrt{5}/3}{5/3} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, puis décroît jusqu'à 0.

Par le centre Ω : minimum $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ en $\pi - x_0$.



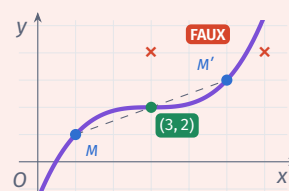
centres $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$: M et M' symétriques par rapport à Ω

★ Astuce de concours : les fonctions de $\sin x$

Comme $\sin(\pi - x) = \sin x$, toute fonction de la forme $g(\sin x)$ admet la droite $x = \frac{\pi}{2}$ pour axe, et $\cos x \times g(\sin x)$ admet $(\frac{\pi}{2}, 0)$ pour centre. De même, $g(\cos x)$ est paire et admet aussi l'axe $x = \pi$. Ces symétries « cachées » divisent l'étude par deux, avant tout calcul.

Attention, piège ! lire correctement la relation

Si $f(x) + f(6 - x) = 4$ pour tout x , les points $M(x, f(x))$ et $M'(6 - x, f(6 - x))$ ont pour milieu $(\frac{x+6-x}{2}, \frac{f(x)+f(6-x)}{2}) = (3, 2)$: centre $(3, 2)$, ni $(3, 4)$ ni $(6, 4)$. (Ex. : $2 + \frac{(x-3)^3}{8}$.)



À toi !

1. Un axe de symétrie pour la courbe de $y = \sin^2 x - \sin x$?
2. Centre de symétrie de la courbe de $y = x + 2 + \frac{1}{x+1}$?

Réponses. 1. Fonction de $\sin x$: axe $x = \frac{\pi}{2}$. 2. Asymptotes $x = -1$ et $y = x + 2$: centre $(-1, 1)$; contrôle $f(-2 - x) + f(x) = 2$.

13 Périodicité : |sin| et compagnie

1^{re} Bac

Un motif, puis on recopie

Méthode : trouver LA période

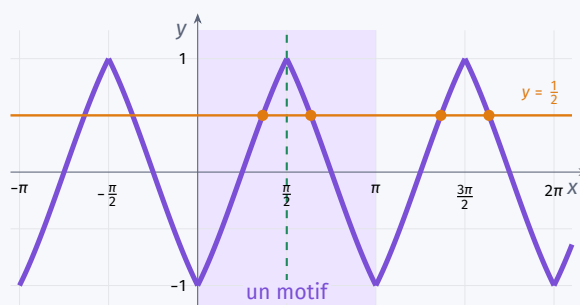
- ① Périodes des morceaux : $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$: $\frac{2\pi}{|a|}$; $|\sin x|$, $|\cos x|$, $\sin^2 x$, $\tan x$: π . ② Une somme admet tout multiple commun T pour période.
 ③ Tester $\frac{T}{2}$, $\frac{T}{4}$... : une valeur prise une seule fois par motif tranche. ④ Étudier sur un motif (réduit par symétrie), puis recopier par translations de $T\vec{i}$.

Exemple résolu : $f(x) = |\sin x| - |\cos x|$

$|\sin|$ et $|\cos|$ sont π -périodiques, donc f aussi. Mieux : $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = |\cos x| - |\sin x| = -f(x)$: décaler de $\frac{\pi}{2}$ change le signe, donc $\frac{\pi}{2}$ n'est pas une période ($f(0) = -1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$) : période π .

f est paire et $f(\pi - x) = f(x)$: axes $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $f(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ croît de -1 à 1 et s'annule en $\frac{\pi}{4}$. On complète par l'axe, puis par période : une « vague » entre -1 et 1 , avec un point anguleux en chaque $k\frac{\pi}{2}$ (pentes ± 1).

Équation $f(x) = \frac{1}{2}$: deux solutions par période, donc quatre sur $[0, 2\pi[$.



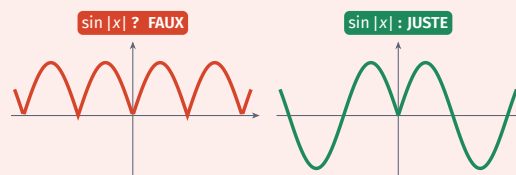
le motif $[0, \pi]$ (violet) est recopié ; axe $x = \frac{\pi}{2}$ en vert

★ Astuce de concours : deux symétries donnent une période

Si C_f admet deux axes $x = a$ et $x = b$, alors f est périodique de période $2|b - a|$; un axe $x = a$ et un centre (b, c) donnent la période $4|b - a|$. Ici : axes $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, d'où la période π ; pour $\sin$: axe $x = \frac{\pi}{2}$ et centre O , d'où $4 \times \frac{\pi}{2} = 2\pi$.

Attention, piège ! $\sin |x|$ n'est pas périodique

$|\sin x|$ (on **plie**) est π -périodique ; mais $\sin |x|$ (on **recopie** la partie $x \geq 0$) est seulement paire. Preuve express : son unique point anguleux est en 0 ; une fonction périodique en aurait une infinité.



À toi !

1. Période de la fonction $x \mapsto \cos^2(2x)$?

2. Période de la fonction $x \mapsto \sin 3x + \cos 2x$?

Réponses. 1. $\cos^2(2x) = \frac{1+\cos 4x}{2}$: période $\frac{\pi}{2}$. 2. $\frac{2\pi}{3}$ et π ont pour plus petit multiple commun 2π : période 2π .

14

Courbes « implicites »

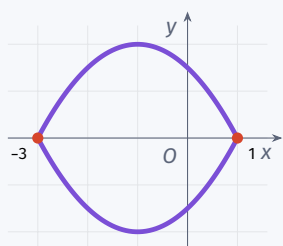
Concours 1^{re} Bac

Ce ne sont pas des fonctions... et pourtant

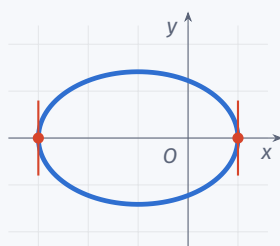
Méthode : isoler, couper, déplier

- ❶ Isoler : $|y| = g(x) \iff y = \pm g(x)$ avec $g(x) \geq 0$; $y^2 = f(x) \iff y = \pm\sqrt{f(x)}$ avec $f(x) \geq 0$.
- ❷ Symétries gratuites : $y \rightarrow -y$ ne change rien : axe (Ox) ; $x \rightarrow -x$: axe (Oy).
- ❸ Tracer dans le quart $x \geq 0, y \geq 0$, puis **déplier**.
- ❹ $|x| + |y| = a$: losange de sommets $(\pm a, 0), (0, \pm a)$; $\max(|x|, |y|) = a$: carré de sommets $(\pm a, \pm a)$.

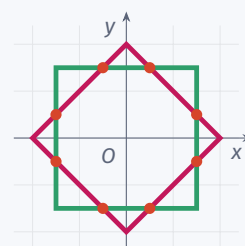
Exemple résolu : avec $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)(1-x)$, puis un losange et un carré



(a) $|y| = f(x)$: une lentille à deux coins.



(b) $y^2 = f(x)$: une ellipse.



(c) $|x| + |y| = 2$ et $\max(|x|, |y|) = \frac{3}{2}$: 8 points.

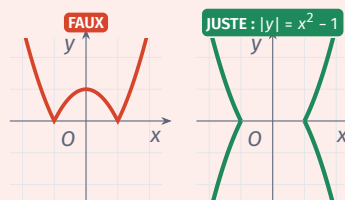
(a) $f(x) \geq 0 \iff x \in [-3, 1]$: hors de cet intervalle, **aucun** point ; en $(-3, 0)$ et $(1, 0)$, les arcs se croisent avec des pentes ± 2 . (b) $f(x) = \frac{4-(x+1)^2}{2}$: $y^2 = f(x) \iff (x+1)^2 + 2y^2 = 4$, ellipse de centre $(-1, 0)$, demi-axes 2 et $\sqrt{2}$, tangentes verticales en $(-3, 0)$ et $(1, 0)$. (c) Sur le côté $x = \frac{3}{2}$ ($|y| \leq \frac{3}{2}$) : $|y| = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$; par symétrie : $(\pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}), (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2})$.

★ Astuce de concours : aires et points entiers en un clin d'œil

Le losange $|x| + |y| \leq a$ est un carré de diagonale $2a$: aire $2a^2$; le carré $\max(|x|, |y|) \leq a$ pour aire $4a^2$. Points à coordonnées entières sur $|x| + |y| = n$ ($n \geq 1$ entier) : $4n$.

Attention, piège ! on efface, on ne plie pas

$|y| = x^2 - 1$ n'est pas $y = |x^2 - 1|$: pour $|x| < 1$, $x^2 - 1 < 0$ et **aucun** y ne convient. On efface cette partie, puis on ajoute la symétrique par rapport à (Ox) : deux « branches » $y = \pm(x^2 - 1)$, pour $|x| \geq 1$.



À toi !

1. Combien de points à coordonnées entières sur la courbe $|x| + |y| = 4$?
2. Aire du domaine défini par $\max(|x|, |y|) \leq 2$ et $|x| + |y| \geq 2$?

Réponses. 1. $4 \times 4 = 16$. 2. $4 \times 2^2 - 2 \times 2^2 = 16 - 8 = 8$ (quatre triangles aux coins du carré).

15

Asymptotes : position express

1^{re} Bac

Un seul tableau de signes

Méthode : tout lire sur $f(x) - (ax + b)$

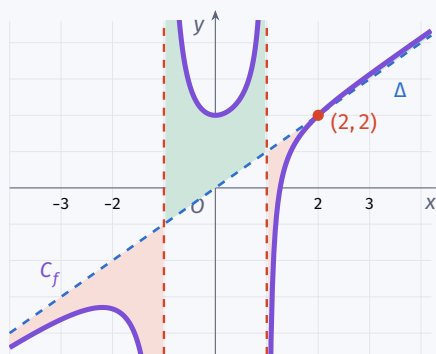
- 1 Écrire $f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$ (division, $\deg R < \deg Q$) : $y = ax + b$ est asymptote en $\pm\infty$.
- 2 Dresser **un seul** tableau de signes de $\frac{R}{Q}$: zéros de R (traversées) et de Q (asymptotes verticales).
- 3 $\frac{R}{Q} > 0$: au-dessus de l'asymptote ; $\frac{R}{Q} < 0$: au-dessous. 4 Près d'un zéro de Q : le signe donne $\pm\infty$.

Exemple résolu : $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 - 1}$

$x^3 - 2 = x(x^2 - 1) + x - 2$, donc $f(x) = x + \frac{x-2}{(x-1)(x+1)}$: asymptotes Δ : $y = x$ en $\pm\infty$, et $x = \pm 1$.

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$\frac{x-2}{x^2-1}$	-	+	-	0	+

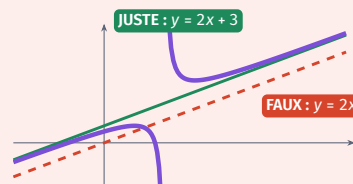
Lecture : au-dessous de Δ , au-dessus, au-dessous, au-dessus ; traversée en $(2, 2)$. Près de ± 1 , le signe de la case voisine donne : $f \rightarrow -\infty$ en -1^- , $+\infty$ en -1^+ , $+\infty$ en 1^- , $-\infty$ en 1^+ .

vert : au-dessus de Δ ; rouge : au-dessous★ **Astuce de concours : le signe du reste, à l'infini**

Pour la position « tout au bout », pas besoin du tableau : $\frac{R(x)}{Q(x)}$ se comporte comme $\frac{r}{q} x^{\deg R - \deg Q}$ (r, q : coefficients dominants). Ici $\frac{x-2}{x^2-1} \approx \frac{1}{x}$: positif en $+\infty$ (au-dessus), négatif en $-\infty$ (au-dessous).

Attention, piège ! l'asymptote n'est pas le quotient des termes dominants

$f(x) = \frac{2x^2 - x - 4}{x - 2}$: tentant d'écrire « $f(x) \approx \frac{2x^2}{x} = 2x$ » et de conclure $y = 2x$. Faux : $f(x) - 2x = \frac{3x-4}{x-2} \rightarrow 3$; la division donne $f(x) = 2x + 3 + \frac{2}{x-2}$: asymptote $y = 2x + 3$.

**À toi !**

1. Position de $y = \frac{2x^2 + 3x}{x + 2}$ par rapport à son asymptote oblique ?
2. Position de $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$ par rapport à la droite $y = 1$?

Réponses. 1. $2x^2 + 3x = (x + 2)(2x - 1) + 2$: $y = 2x - 1 + \frac{2}{x+2}$, au-dessus de $y = 2x - 1$ si $x > -2$, au-dessous si $x < -2$. 2. $y - 1 = \frac{2-2x}{x^2+1}$: au-dessus si $x < 1$, au-dessous si $x > 1$, traversée en $(1, 1)$.

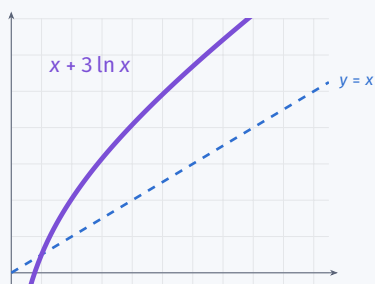
16

Branches paraboliques

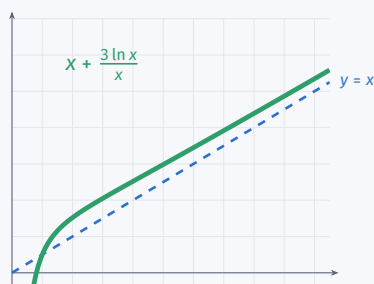
2^e Bac $\frac{f(x)}{x}$ d'abord, $f(x) - ax$ ensuite

Méthode : deux limites, dans l'ordre

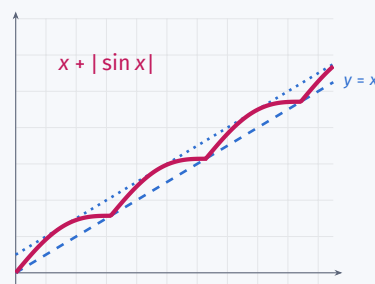
- 1 Si $f(x) \rightarrow \pm\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, calculer $\lim \frac{f(x)}{x}$. 2 Limite $\pm\infty$: branche parabolique de direction (Oy) ; limite 0 : direction (Ox).
 3 Limite a réelle non nulle : calculer $\lim (f(x) - ax)$. 4 Limite b réelle : asymptote $y = ax + b$; limite $\pm\infty$: branche parabolique de direction $y = ax$; pas de limite : ni l'une ni l'autre.

Exemple résolu : trois courbes qui « ressemblent » à $y = x$ en $+\infty$ 

(a) $f(x) - x = 3 \ln x \rightarrow +\infty$:
branche parabolique de
direction $y = x$.



(b) $g(x) - x = \frac{3 \ln x}{x} \rightarrow 0$:
asymptote $y = x$ (au-dessus si
 $x > 1$).



(c) $h(x) - x = |\sin x|$ n'a pas de
limite : ni asymptote, ni
direction.

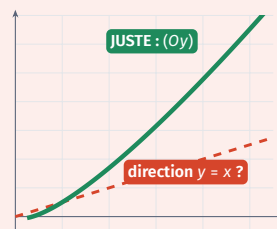
Dans les trois cas, $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$ (car $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{|\sin x|}{x} \rightarrow 0$) : c'est l'écart $f(x) - x$ qui décide. En (a), la courbe s'éloigne de $y = x$, de plus en plus lentement ; en (b), elle s'en rapproche ; en (c), elle « rebondit » indéfiniment entre $y = x$ et $y = x + 1$.

★ Astuce de concours : l'échelle des écarts

Une fois a trouvé, on compare l'écart $f(x) - ax$ aux références : s'il se comporte comme $\ln x$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$... (tend vers l'infini « lentement ») : **branche parabolique** ; comme $\frac{\ln x}{x}$, $\frac{1}{x}$, e^{-x} : **asymptote** ; comme une fonction bornée qui oscille : **ni l'une ni l'autre**.

Attention, piège ! $f(x)/x$ d'abord, toujours

« $f(x) - x \rightarrow +\infty$, donc branche parabolique de direction $y = x$ » : **faux** si $\frac{f(x)}{x}$ ne tend pas vers 1. Pour $f(x) = x(1 + \ln x)$: $f(x) - x = x \ln x \rightarrow +\infty$, mais $\frac{f(x)}{x} = 1 + \ln x \rightarrow +\infty$: c'est une branche parabolique de direction (Oy), la courbe se redresse au lieu de suivre une droite.



À toi !

1. Branche infinie en $+\infty$ de $f(x) = 3x - \ln x$?
 2. Branches infinies de $g(x) = e^{x/3} - 2x$ en $+\infty$ et en $-\infty$?

Réponses. 1. $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 3$ et $f(x) - 3x = -\ln x \rightarrow -\infty$: branche parabolique de direction $y = 3x$. 2. En $+\infty$: $\frac{g(x)}{x} \rightarrow +\infty$, direction (Oy) ; en $-\infty$: $g(x) + 2x = e^{x/3} \rightarrow 0$: asymptote $y = -2x$.

17

Convexité : tangentes et cordes

2^e Bac

Coincer la courbe entre deux droites

Méthode : l'encadrement par convexité

- 1 Signe de f'' sur l'intervalle I : $f'' \geq 0$, C_f convexe ; $f'' \leq 0$, concave.
- 2 Convexe : la courbe est **au-dessus de ses tangentes** sur I et, sur $[a, b] \subset I$, **au-dessous de sa corde**.
- 3 On obtient $T(x) \leq f(x) \leq C(x)$: 4 en évaluant ou en intégrant, on encadre un nombre.

Exemple résolu : encadrer $\ln 3$ grâce à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[1, 3]$

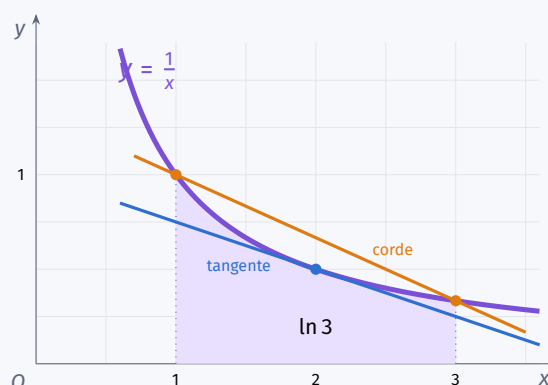
$f(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ sur $]0, +\infty[$: convexe.

Tangente au milieu, en 2 : $T(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 2) = 1 - \frac{x}{4}$.

Corde entre $(1, 1)$ et $(3, \frac{1}{3})$: $C(x) = \frac{4-x}{3}$.

Sur $[1, 3]$: $1 - \frac{x}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{4-x}{3}$ (égalité en 2, resp. en 1 et 3 seulement). On intègre sur $[1, 3]$: les deux trapèzes ont pour aires 1 et $\frac{4}{3}$, et $\int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln 3$, d'où

$$1 < \ln 3 < \frac{4}{3} \quad (\text{en effet } \ln 3 \approx 1,0986).$$



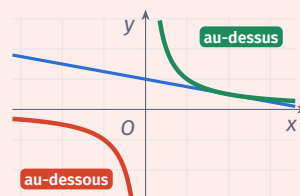
la courbe est coincée entre la tangente et la corde

★ Astuce de concours : le maximum d'une fonction convexe est au bord

Sur un segment, une fonction convexe reste au-dessous de sa corde : **son maximum est atteint à une borne**. Pour $g(x) = e^x + e^{-2x}$ ($g'' > 0$) sur $[-1, 1]$: $g(-1) = e^{-1} + e^2 \approx 7,76$ et $g(1) = e + e^{-2} \approx 2,85$: le maximum est $e^2 + \frac{1}{e}$, sans tableau de variations.

Attention, piège ! convexe sur $]0, +\infty[$, pas sur $\mathbb{R}^*$

La tangente $y = 1 - \frac{x}{4}$ est au-dessous de la courbe de $\frac{1}{x}$ pour $x > 0$... mais pour $x < 0$, $\frac{1}{x} < 0 < 1 - \frac{x}{4}$: la courbe passe **au-dessous**. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty, 0[$: une inégalité de convexité ne vaut que sur un **intervalle** où la fonction est convexe.



À toi !

1. Montrer que $\ln x \geq \frac{x-1}{e-1}$ pour tout $x \in [1, e]$.
2. f est convexe sur $[0, 4]$, $f(0) = 1$ et $f(4) = 9$: majorer $f(1)$.

Réponses. 1. $\ln$ est concave : sur $[1, e]$, sa courbe est au-dessus de la corde joignant $(1, 0)$ et $(e, 1)$. 2. La corde est $y = 1 + 2x$: $f(1) \leq 3$.

18

La courbe de la réciproque

2^e BacTout se lit dans le miroir $y = x$

Méthode : le miroir

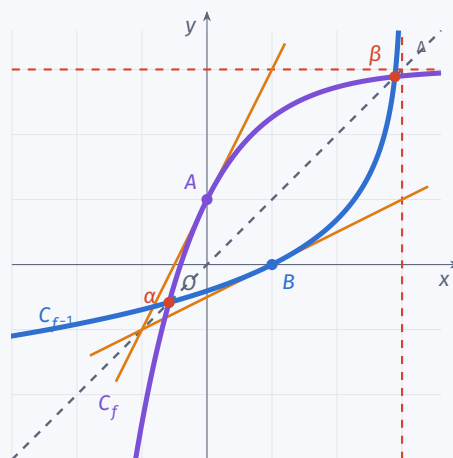
- 1 f continue et strictement monotone sur I : bijection de I sur $J = f(I)$.
- 2 Chaque point (a, b) de C_f donne le point (b, a) de $C_{f^{-1}}$; une pente $p \neq 0$ devient $\frac{1}{p}$ (horizontale $\leftrightarrow$ verticale).
- 3 Les asymptotes s'échangent : $y = \ell \leftrightarrow x = \ell$; direction (Oy) $\leftrightarrow$ direction (Ox).
- 4 Si f est croissante et concave, f^{-1} est croissante et convexe.

Exemple résolu : $f(x) = 3 - 2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2e^{-x} > 0$, $f \rightarrow -\infty$ en $-\infty$, $f \rightarrow 3$ en $+\infty$: bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty, 3[$, et $f^{-1}(x) = \ln 2 - \ln(3 - x)$. **Dans le miroir :**

- $A(0, 1)$ et la tangente $y = 2x + 1$ deviennent $B(1, 0)$ et la tangente $y = \frac{x-1}{2}$;
- l'asymptote $y = 3$ devient l'asymptote $x = 3$;
- en $-\infty$, $\frac{f(x)}{x} \rightarrow +\infty$: direction (Oy) pour C_f , donc (Ox) pour $C_{f^{-1}}$;
- $f'' < 0$: f concave, donc f^{-1} convexe.

Points communs : sur Δ (f croissante) : $3 - 2e^{-x} = x$ a deux solutions, $\alpha \in]-1, 0[$ et $\beta \in]2, 3[$.

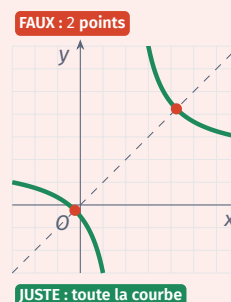


★ Astuce de concours : f croissante : on cherche sur Δ

Si f est strictement croissante, C_f et $C_{f^{-1}}$ ne se coupent que sur $\Delta : y = x$. En effet, si $f(a) = b$ et $f(b) = a$ avec $a < b$, la croissance donne $b = f(a) < f(b) = a$: absurde. On résout donc $f(x) = x$, une équation à une seule inconnue.

Attention, piège ! si f décroît, le miroir réserve des surprises

$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, décroissante sur chaque intervalle, vérifie $f(f(x)) = x$: $f^{-1} = f$ et $C_f = C_{f^{-1}}$! Les points communs ne sont pas seulement les deux points de Δ (abscisses $2 \pm \sqrt{5}$) : ce sont **tous** les points de la courbe.



À toi !

1. $f(x) = e^x + x - 1$ (bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$) : où $C_{f^{-1}}$ coupe-t-elle Δ , avec quelle pente ?
2. f croît strictement et tend vers 3 en $+\infty$: et $C_{f^{-1}}$?

Réponses. 1. $f(x) = x \iff e^x = 1 \iff x = 0$: en O, pente $\frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$. 2. La droite $x = 3$ est son asymptote verticale.

19

Suites : escalier et escargot

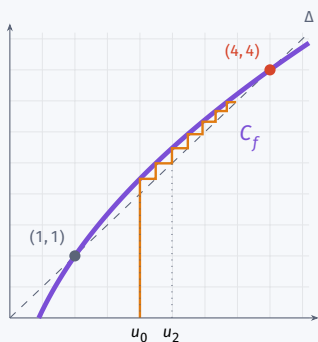
2^e Bac

La suite se dessine avant de se calculer

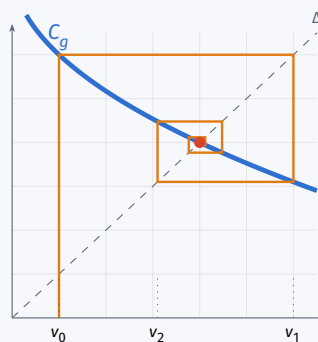
Méthode : la toile

1 Tracer C_f et $\Delta : y = x$. 2 De u_0 sur (Ox) , aller verticalement jusqu'à C_f (ordonnée u_1), puis horizontalement jusqu'à Δ ... et recommencer. 3 f croissante : **escalier** ; f décroissante : **escargot**. 4 La limite éventuelle est l'abscisse d'un point de $C_f \cap \Delta$.

Exemple résolu : $u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} - 2$ ($u_0 = 2$) et $v_{n+1} = 8 - 2\sqrt{v_n}$ ($v_0 = 1$)



escalier ($f'(4) = \frac{3}{4}$) : 2 ; 2,24 ; 2,49 ; 2,74...



escargot ($g'(4) = -\frac{1}{2}$) : 1 ; 6 ; 3,10 ; 4,48 ; 3,77...

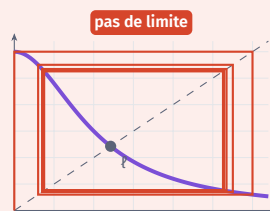
Les deux suites tendent vers $4 = f(4) = g(4)$. **Preuve (escalier)** : f est croissante, $[1, 4]$ est stable ($f(1) = 1$, $f(4) = 4$) et $f(x) \geq x$ sur $[1, 4]$ (astuce) : (u_n) croît, majorée par 4, et converge vers un point fixe supérieur à $u_0 = 2$: c'est 4. (Escargot : g décroissante, (v_{2n}) croît et (v_{2n+1}) décroît.)

★ Astuce de concours : le signe de $f(x) - x$

Si I est stable et $f(x) \geq x$ sur I , alors $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$: la suite croît, sans autre calcul. Et $f(x) - x$ se factorise grâce aux points fixes : $3\sqrt{x} - 2 - x = -(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$, positif sur $[1, 4]$, négatif au-delà de 4.

Attention, piège ! un escargot peut ne jamais se refermer

$f(x) = \frac{3}{1+x^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$, avec un seul point fixe $\ell \approx 1,21$; mais $f'(\ell) \approx -1,19$. Avec $u_0 = 0$, la toile ne s'enroule pas vers ℓ : elle s'approche d'un carré. (u_n) oscille entre $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (un cycle d'ordre 2) et ne converge pas.



À toi !

- $u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} - 2$ avec $u_0 = 9$: sens de variation et limite ?
- $v_{n+1} = 8 - 2\sqrt{v_n}$ avec $v_0 = 1$: ranger v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 et 4.

Réponses. 1. $u_1 = 7 < u_0$; $[4, +\infty[$ est stable et $f(x) \leq x$ sur cet intervalle : (u_n) décroît vers 4. 2. $v_0 < v_2 < v_4 < 4 < v_3 < v_1$ (1 ; 3,10 ; 3,77 ; 4,48 ; 6).

20 Lire une aire sur un graphique

2^e Bac

Des carreaux, des unités, des signes

Méthode : lire, découper, convertir

- Repérer qui est **au-dessus** : si $f \geq g$ sur $[a, b]$, l'aire vaut $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.
- Découper aux points où l'ordre change.
- Convertir : $1 \text{ u.a.} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.
- Contrôler** : compter les carreaux, ou encadrer par des triangles.

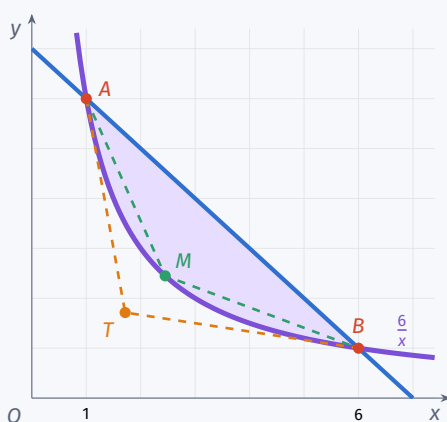
Exemple résolu : aire du domaine compris entre $y = \frac{6}{x}$ et $y = 7 - x$

$\frac{6}{x} = 7 - x \iff x^2 - 7x + 6 = 0 \iff x \in \{1; 6\}$:
 $A(1, 6)$ et $B(6, 1)$. Sur $[1, 6]$, la droite est au-dessus :
 $7 - x - \frac{6}{x} = -\frac{(x-1)(x-6)}{x} \geq 0$.

$$A = \int_1^6 \left(7 - x - \frac{6}{x}\right) dx = \left[7x - \frac{x^2}{2} - 6 \ln x\right]_1^6 = \frac{35}{2} - 6 \ln 6$$

soit $A \approx 6,75 \text{ u.a.}$ Avec $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$, $1 \text{ u.a.} = 2 \text{ cm}^2$: $A = 35 - 12 \ln 6 \approx 13,5 \text{ cm}^2$.

Contrôle : le domaine contient le triangle ABM , $M(\sqrt{6}, \sqrt{6})$, d'aire $\frac{5}{2}(7 - 2\sqrt{6}) \approx 5,25$, et il est contenu dans le triangle ABT formé par (AB) et les tangentes en A et B , d'aire $\frac{125}{14} \approx 8,93$.



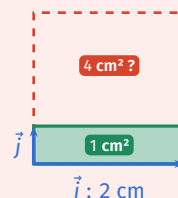
$5,25 < A < 8,93$: le résultat est plausible

★ Astuce de concours : les aires « translatées »

Entre C_f et sa translatée de vecteur $k\vec{j}$ ($k > 0$), sur $[a, b]$, l'aire vaut toujours $k(b - a)$: on la découpe en bandes verticales de hauteur k . Ainsi, entre $y = \ln x$ et $y = \ln x + 2$, pour $1 \leq x \leq 4$:
 aire = $2 \times 3 = 6$, sans primitive. De même, une translation horizontale ne change pas l'aire :
 $\int_{a+h}^{b+h} f(x - h) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Attention, piège ! 1 u.a. n'est pas $\|\vec{i}\|^2$

Avec $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 0,5 \text{ cm}$, l'unité d'aire est le rectangle construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$: $1 \text{ u.a.} = 2 \times 0,5 = 1 \text{ cm}^2$, et non $2^2 = 4 \text{ cm}^2$. Dans un repère non orthonormé, « carreau » et « unité d'aire » ne se confondent qu'en lisant les deux graduations.



À toi !

- $\|\vec{i}\| = 3 \text{ cm}$, $\|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$: combien de cm^2 pour une aire de $\frac{5}{2} \text{ u.a.}$?
- Lire, sans primitive, la valeur de $\int_0^3 E(x) dx$.

Réponses. 1. $1 \text{ u.a.} = 6 \text{ cm}^2$: 15 cm^2 . 2. Trois rectangles de largeur 1 et de hauteurs 0, 1, 2 : $0 + 1 + 2 = 3$.

Partie 5 • Questions de concours

60 questions à choix multiples, du tronc commun au Bac, souvent graphiques

Mode d'emploi

- **Six séries de dix questions**, de difficulté croissante (★★ à ★★★★★), du tronc commun au 2^e Bac ; plus de deux questions sur trois se jouent sur une **figure**.
- Questions 1 à 8 de chaque série : **une seule** bonne réponse parmi (A) (B) (C) (D), les trois autres sont des pièges plausibles (pour des courbes, la lettre est sous la vignette). Questions 9 et 10 : **réponse numérique**, un entier (positif, négatif ou nul).
- **Barème** : +4 par bonne réponse, -1 par QCM faux, 0 sinon. **Temps conseillé** : 25 minutes par série, **sans calculatrice**. La grille des réponses suit la série 6 ; corrigés à partir de la page 129.
- Sur les figures : **disque plein** = point de la courbe, **cercle vide** = point exclu ; asymptotes en pointillés rouges ; dans les vignettes, le petit « 1 » marque l'unité de chaque axe.

1

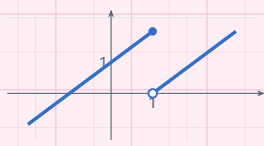
Série 1 • Lire une courbe

Tronc commun Domaine, image, antécédents, parité, opérations sur les courbes, résolutions graphiques.

Question 1 Strictement croissante ? ★★

corrigé p.129

Laquelle de ces courbes est celle d'une fonction *strictement croissante* sur $[-2, 3]$?



(A)



(B)



(C)



(D)

Question 2 Antécédents ★★

corrigé p.129

Les questions 2 et 3 portent sur la courbe ci-contre, celle d'une fonction f définie sur $[-4, 4]$. L'ensemble des antécédents du nombre $f(0)$ par f est :

- (A) $\{2\}$ (B) $\{-3; 0; 3\}$
(C) $\{0\}$ (D) $\{-3; 3\}$



Question 3 Image d'un intervalle ★★

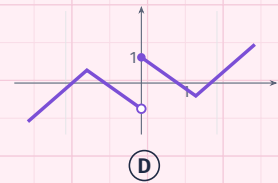
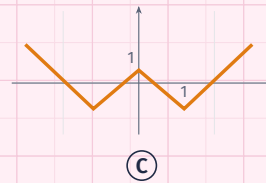
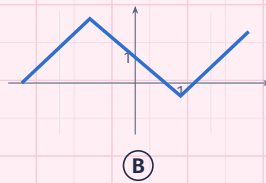
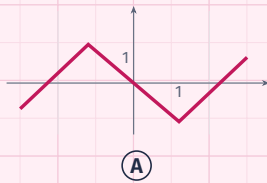
corrigé p.129

L'image de l'intervalle $[-4, 0]$ par f est :

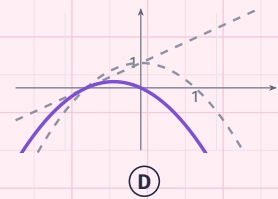
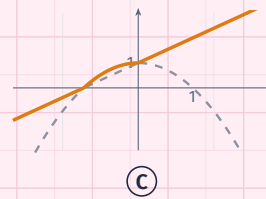
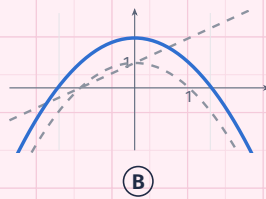
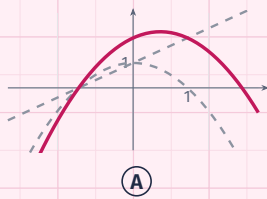
- (A) $[1, 2]$ (B) $[2, 3]$ (C) $[1, 3]$ (D) $]1, 3[$

Question 4 Une fonction impaire ★★★

corrigé p.129

Laquelle de ces portions de courbes est celle d'une fonction *impaire* définie sur $\mathbb{R}$?**Question 5 La somme de deux courbes ★★★**

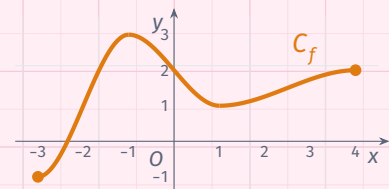
corrigé p.129

En pointillés gris : les courbes d'une fonction affine f (droite) et d'une fonction g (parabole). Quelle vignette montre la courbe de $f + g$?**Question 6 Une équation à transformer ★★★**

corrigé p.129

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $[-3, 4]$. Combien de solutions l'équation $f(x) + x = 2$ admet-elle ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

**Question 7 Une droite qui balaie ★★★**

corrigé p.130

On note C la courbe de la fonction $f(x) = x^2 + 2x - 7$ restreinte à l'intervalle $[-3, 2]$. La droite d'équation $y = m$ coupe C en deux points distincts si et seulement si :

- (A) $m \in]-8, +\infty[$ (B) $m \in]-8, -4]$ (C) $m \in [-8, -4]$ (D) $m \in]-8, 1]$

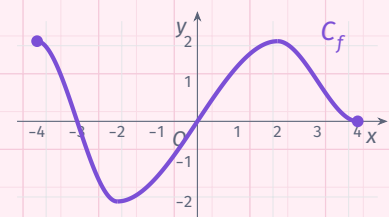
Question 8 Le domaine se lit aussi ★★★

corrigé p.130

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $[-4, 4]$. L'ensemble de définition de la fonction

$$g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{f(x) - 2} \text{ est :}$$

- (A) $[-4, -3] \cup [0, 4]$
 (B) $[-4, -3] \cup [0, 2[\cup]2, 4]$
 (C) $] -4, -3[\cup]0, 2[\cup]2, 4[$
 (D) $] -4, -3[\cup [0, 2[\cup]2, 4]$

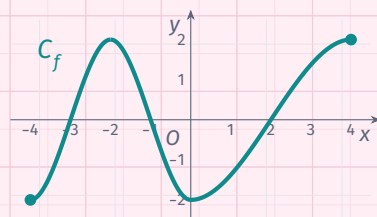


Question 9 Trois solutions ★★★

corrigé p. 130

Les questions 9 et 10 portent sur la courbe ci-contre, celle d'une fonction f définie sur $[-4, 4]$. Pour combien d'entiers relatifs m l'équation $f(x) = m$ admet-elle exactement trois solutions ?

Réponse numérique (un entier) : _____

**Question 10** Une composée ★★★★★

corrigé p. 130

Nombre de solutions de l'équation $f(f(x)) = 0$?

Réponse numérique (un entier) : _____

2

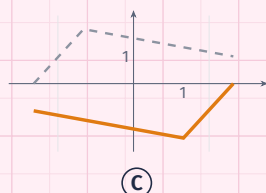
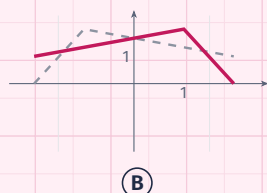
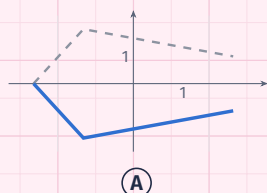
Série 2 · Transformations

Tronc commun Translations, symétries, dilatations : de la formule à la courbe, et retour.

Question 11 Miroir vertical ★★

corrigé p. 130

En pointillés gris : la courbe d'une fonction f . Quelle vignette montre la courbe de $x \mapsto f(-x)$?

**Question 12** Vecteur caché ★★ corrigé p. 130

La parabole d'équation $y = x^2 + 6x + 11$ est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur :

(A) $\vec{u}(3; 2)$

(B) $\vec{u}(6; 11)$

(C) $\vec{u}(-3; 11)$

(D) $\vec{u}(-3; 2)$

Question 13 Hyperbole ★★★

corrigé p. 130

La courbe de la fonction $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$ est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \frac{4}{x}$ par la translation de vecteur :

(A) $\vec{u}(-1; 3)$

(B) $\vec{u}(1; 3)$

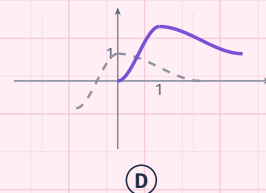
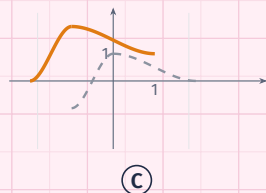
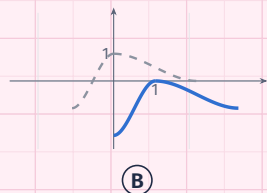
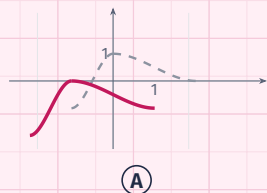
(C) $\vec{u}(3; 1)$

(D) $\vec{u}(1; -3)$

Question 14 Dans quel sens glisser ? ★★★

corrigé p. 130

En pointillés gris : la courbe de f . Quelle vignette montre la courbe de $x \mapsto f(x+1) - 1$?

**Question 15** Une parabole à identifier ★★★

corrigé p. 131

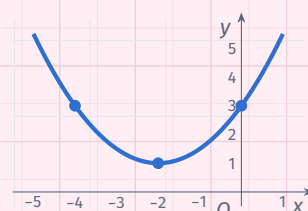
La courbe ci-contre est une parabole ; les trois points marqués ont des coordonnées entières. Elle représente la fonction :

(A) $x \mapsto \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$

(B) $x \mapsto 2(x+2)^2 + 1$

(C) $x \mapsto \frac{1}{2}(x+2)^2 + 1$

(D) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$



Question 16 Compresser ou étirer ? ★★★

corrigé p. 131

En pointillés gris : la courbe d'une fonction f . Quelle vignette montre la courbe de $x \mapsto f(2x)$?

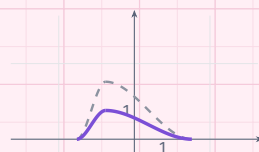
(A)



(B)



(C)



(D)

Question 17 Quelle transformation ? ★★★

corrigé p. 131

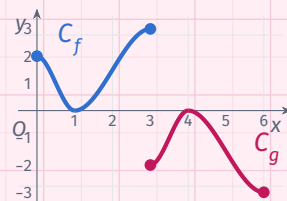
La courbe C_g d'une fonction g définie sur $[3, 6]$ est l'image de la courbe C_f d'une fonction f définie sur $[0, 3]$ par une transformation simple. Pour tout réel x de $[3, 6]$:

(A) $g(x) = f(x - 3) - 3$

(B) $g(x) = -f(6 - x)$

(C) $g(x) = -f(x + 3)$

(D) $g(x) = -f(x - 3)$

**Question 18** Symétrie centrale ★★★

corrigé p. 131

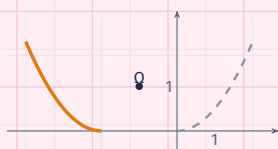
En pointillés gris : la courbe C_f . Quelle vignette montre l'image de C_f par la symétrie de centre $\Omega(-1; 1)$?



(A)



(B)



(C)



(D)

Question 19 Deux hyperboles ★★★ corrigé p. 131

On note H l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et H' son image par la translation de vecteur $\vec{u}(2; 2)$. Combien de points communs ont H et H' ?

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 20 Passer par O ★★★ corrigé p. 131

On note H l'hyperbole d'équation $y = \frac{12}{x}$. Pour combien de vecteurs $\vec{u}(a; b)$, où a et b sont des entiers compris entre -6 et 6 , l'image de H par la translation de vecteur $\vec{u}$ passe-t-elle par l'origine O du repère ?

Réponse numérique (un entier) : _____

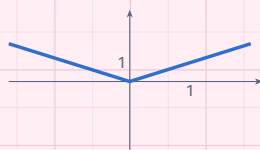
3

Série 3 · $|x|$ et partie entière

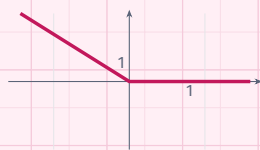
Tronc commun

1^{re} BacCourbes « pliées », points exclus, marches et créneaux de la partie entière E .**Question 21** Une demi-droite pliée ★★

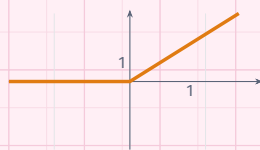
corrigé p. 131

Laquelle de ces courbes est celle de la fonction $x \mapsto |x| - x$?

(A)



(B)



(C)



(D)

Question 22 Marche double ★★ corrigé p.132

L'ensemble des solutions de l'équation $E(|x|) = 1$ est :

- (A) $[1, 2[$ (B) $[-2, -1[\cup [1, 2[$
 (C) $[-2, 2[$ (D) $]-2, -1] \cup [1, 2[$

Question 23 Deux V croisés ★★★ corrigé p.132

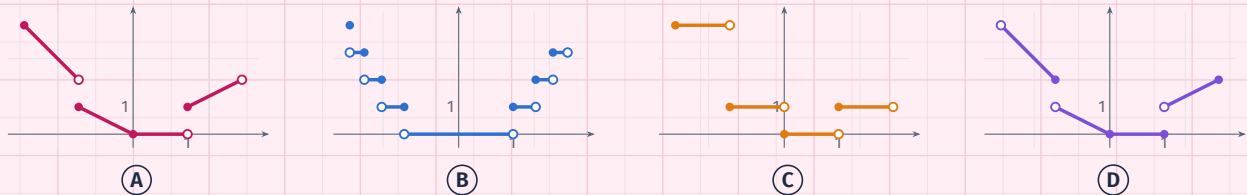
L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x - 1| < 2|x|$ est :

- (A) $]-\infty, -1[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$ (B) $]-1, \frac{1}{3}[$
 (C) $]\frac{1}{3}, +\infty[$ (D) $]-\infty, -\frac{1}{3}[\cup]1, +\infty[$

Question 24 Des segments en éventail ★★★

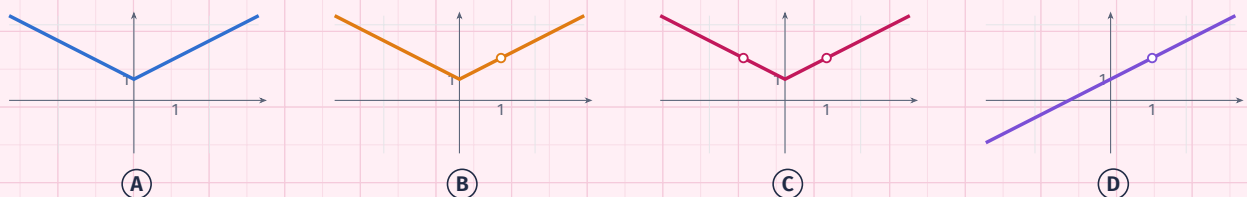
corrigé p.132

Laquelle de ces courbes est celle de la fonction $x \mapsto x E(x)$ sur $[-2, 2[$?

**Question 25 Simplifier sans oublier ★★★**

corrigé p.132

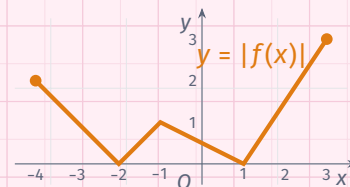
Laquelle de ces courbes est celle de la fonction $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}$?

**Question 26 Ce que cache une valeur absolue ★★★**

corrigé p.132

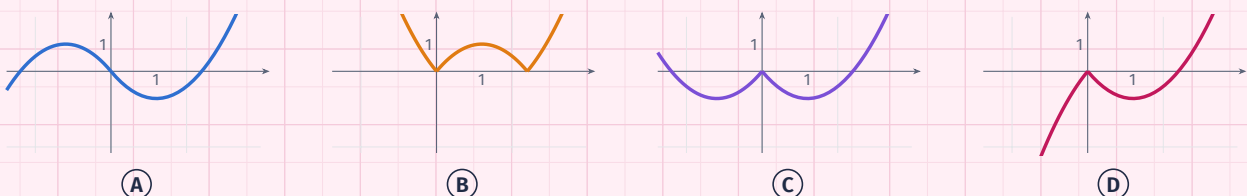
La courbe ci-contre est celle de $x \mapsto |f(x)|$, où f est une fonction définie sur $[-4, 3]$. Laquelle de ces affirmations est *nécessairement* vraie ?

- (A) $f(x) \geq 0$ pour tout x de $[-4, 3]$
 (B) $f(3) = 3$
 (C) l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions
 (D) le minimum de f sur $[-4, 3]$ est 0

**Question 27 Deux paraboles recollées ★★★**

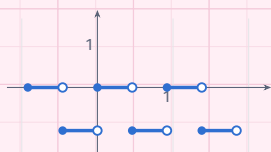
corrigé p.132

Laquelle de ces courbes est celle de la fonction $x \mapsto |x|(x - 2)$?

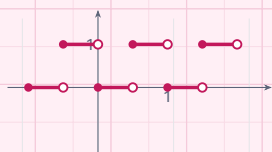


Question 28 Un créneau entier ★★★★★

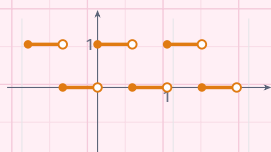
corrigé p. 132

Laquelle de ces courbes est celle de la fonction $x \mapsto E(2x) - 2E(x)$ sur $[-1, 2[$?

(A)



(B)



(C)



(D)

Question 29 Une équation repliée ★★

corrigé p. 133

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $[-3, 5]$. Combien de solutions l'équation $f(|x|) = 1$ admet-elle ?Réponse numérique (un entier) : **Question 30** L'escalier et l'hyperbole ★★★★★

corrigé p. 133

Combien de points communs ont la courbe de la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$ et l'hyperbole d'équation $y = \frac{20}{x}$?Réponse numérique (un entier) :

4

Série 4 · Asymptotes et tangentes**1^{re} Bac** Limites lues, asymptotes et position, nombre dérivé, demi-tangentes, points anguleux.**Question 31** Une pente à lire ★★

corrigé p. 133

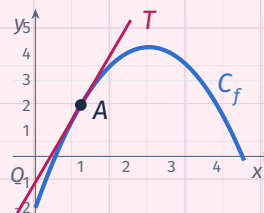
Questions 31 et 40 : la droite T est tangente au point A d'abscisse 1 à la courbe C_f d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ (figure ci-contre). Le nombre dérivé $f'(1)$ vaut :

(A) 3

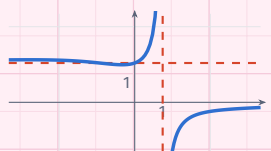
(B) $\frac{1}{3}$

(C) -1

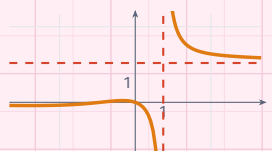
(D) 2

**Question 32** Quatre limites imposées ★★

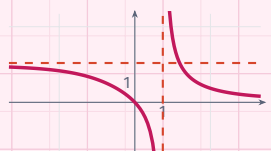
corrigé p. 133

Laquelle de ces courbes est celle d'une fonction f vérifiant à la fois : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

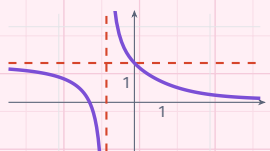
(A)



(B)



(C)



(D)

Question 33 Position ★★★ *corrigé p. 133*

La courbe de la fonction $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^2}$ admet une asymptote oblique Δ , en $+\infty$ comme en $-\infty$. Alors :

- (A) $\Delta : y = x$, et C_f est au-dessus de Δ
- (B) $\Delta : y = x - 1$, et C_f est au-dessus de Δ sur $\mathbb{R}^*$
- (C) $\Delta : y = x - 1$, et C_f est au-dessous de Δ pour $x < 0$
- (D) $\Delta : y = x - 1$, et C_f coupe Δ en un point

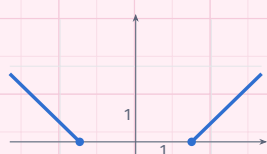
Question 34 Un pli ★★★ *corrigé p. 133*

Au point $A(4; 0)$, la courbe de la fonction $f(x) = |x^2 - 2x - 8|$ admet :

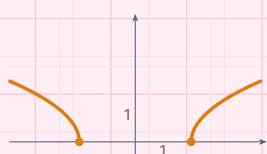
- (A) une tangente horizontale
- (B) une demi-tangente verticale
- (C) deux demi-tangentes de pentes -4 et 4
- (D) deux demi-tangentes de pentes -6 et 6

Question 35 Des départs à la verticale ★★★*corrigé p. 134*

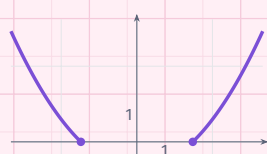
Laquelle de ces courbes est celle de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$?



(A)



(B)



(C)

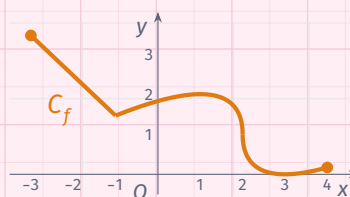


(D)

Question 36 Où la dérivée fait défaut ★★★*corrigé p. 134*

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f continue sur $[-3, 4]$. L'ensemble des réels de $]-3, 4[$ en lesquels f n'est pas dérivable est :

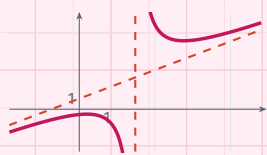
- (A) $\{-1; 2\}$
- (B) $\{-1\}$
- (C) $\{-1; 1; 2; 3\}$
- (D) $\{1; 3\}$

**Question 37** La bonne asymptote oblique ★★★*corrigé p. 134*

Laquelle de ces courbes est celle de la fonction $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$? (Asymptotes en pointillés.)



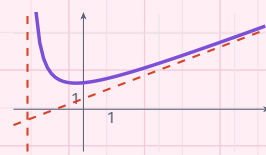
(A)



(B)



(C)



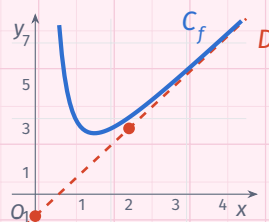
(D)

Question 38 L'asymptote au travail ★★★*corrigé p. 134*

La droite D est asymptote en $+\infty$ à la courbe C_f ci-contre (les points de D marqués ont des coordonnées entières). Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)^2 - 4x^2}{x} =$$

- (A) -1
- (B) -2
- (C) -4
- (D) 0



Question 39 Coefficients ★★★ corrigé p.134

La droite d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe de la fonction $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x - 2}$, où a et b sont des réels. Calculer $f(3)$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 40 Produit ★★★★★ corrigé p.135

On reprend la fonction f de la question 31 (figure page 122) et l'on pose $g(x) = x f(x)$. La tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées en un point. Quelle est son ordonnée ?

Réponse numérique (un entier) : _____

5

Série 5 · Dérivées et réciproque

1^{re} Bac **2^e Bac** Lire f' sur C_f , retrouver f sur $C_{f'}$, convexité, inflexion, courbe de f^{-1} .

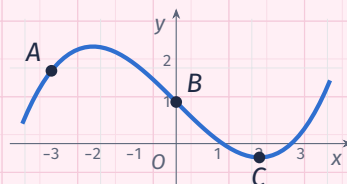
Question 41 Comparer des pentes ★★

corrigé p.135

Les points A, B et C de la courbe ci-contre, celle d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, ont pour abscisses -3, 0 et 2 ; la courbe admet en C une tangente horizontale.

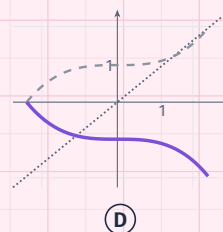
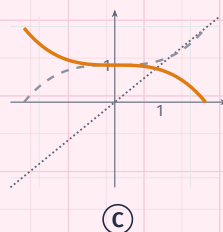
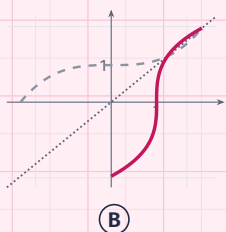
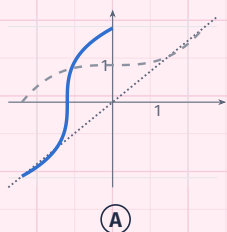
Alors :

- (A) $f'(2) < f'(0) < f'(-3)$ (B) $f'(-3) < f'(0) < f'(2)$
 (C) $f'(0) < f'(2) < f'(-3)$ (D) $f'(2) < f'(-3) < f'(0)$

**Question 42 Le miroir de la réciproque ★★**

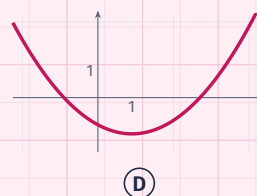
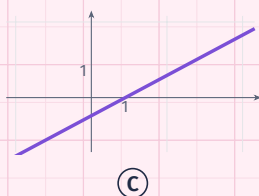
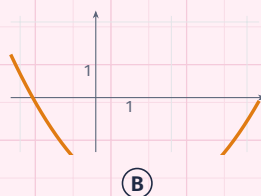
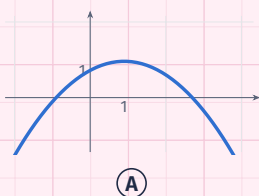
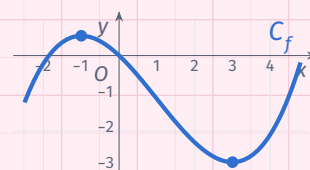
corrigé p.135

En pointillés gris : la courbe d'une bijection f (la droite $y = x$ est tracée). Quelle vignette montre la courbe de f^{-1} ?

**Question 43 De f à f' ★★★**

corrigé p.135

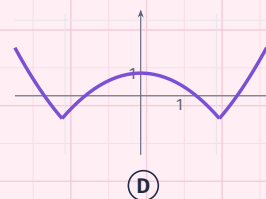
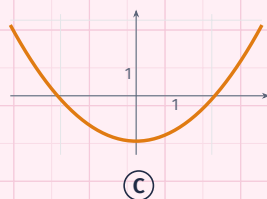
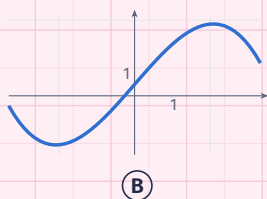
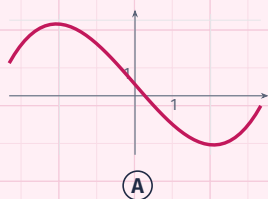
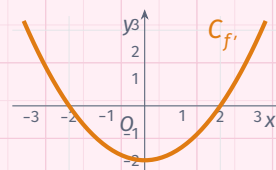
La courbe ci-contre est celle d'une fonction polynôme f ; ses deux extremums locaux (points marqués) ont des abscisses entières. Laquelle des courbes ci-dessous est celle de la dérivée f' ?



Question 44 De f' à f ★★★

corrigé p.135

La courbe ci-contre est celle de la **dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. Laquelle des courbes ci-dessous peut être celle de f ?

**Question 45** Une inflexion en 0 ★★★

corrigé p.135

Laquelle de ces fonctions a une courbe qui admet un point d'inflexion d'abscisse 0 ?

(A) $x \mapsto x^5 + 3x$

(B) $x \mapsto x^4 - x$

(C) $x \mapsto x^6 + 2x$

(D) $x \mapsto |x|^3$

Question 46 Lire la convexité sur f'' ★★★

corrigé p.135

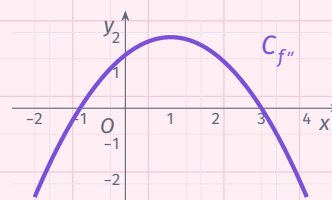
La courbe ci-contre est celle de la dérivée seconde f'' d'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (f'' garde hors de la fenêtre le signe qu'elle a aux bords). Le plus grand intervalle sur lequel la courbe de f est au-dessus de ses tangentes est :

(A) $]-\infty, 1]$

(B) $[-1, 3]$

(C) $[3, +\infty[$

(D) $[1, +\infty[$

**Question 47** Tangente renversée ★★★

corrigé p.136

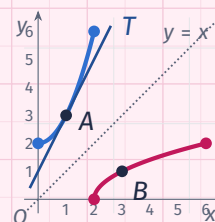
En bleu, la courbe d'une bijection f de $[0, 2]$ sur $[2, 6]$ et sa tangente T en $A(1; 3)$; en rouge, la courbe de f^{-1} . La tangente à la courbe de f^{-1} en $B(3; 1)$ a pour équation :

(A) $y = 2x - 5$

(B) $y = -2x + 7$

(C) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

(D) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

**Question 48** Réciproque d'une convexe ★★★

corrigé p.136

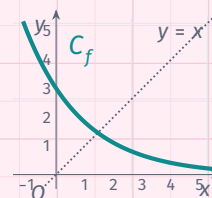
Ci-contre, la courbe d'une fonction f strictement décroissante et convexe, bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Sa réciproque f^{-1} est, sur $]0, +\infty[$:

(A) décroissante, concave

(B) croissante, concave

(C) décroissante, convexe

(D) croissante, convexe

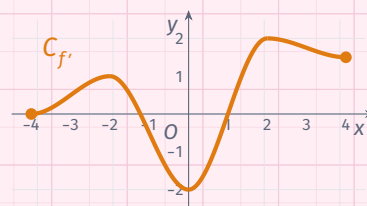


Question 49 Inflexions ★★★

corrigé p.136

Questions 49 et 50 : ci-contre, la courbe de la **dérivée** f' d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-4, 4]$. Combien de points d'inflexion la courbe de f a-t-elle sur $]-4, 4[$?

Réponse numérique (un entier) : _____

**Question 50** Tangentes parallèles ★★★

corrigé p.136

Combien de points de la courbe de f ont une tangente parallèle à la droite $y = x$?

Réponse numérique (un entier) : _____

6

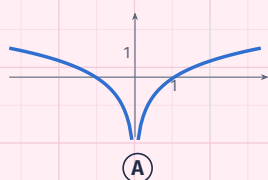
Série 6 · ln, exp et défis

2^e Bac Courbes de ln et exp transformées, domaines, branches infinies, croissances comparées, symétries.

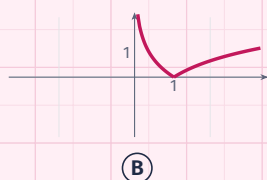
Question 51 Un logarithme replié ★★

corrigé p.136

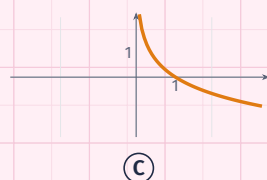
Laquelle de ces courbes est celle de la fonction $x \mapsto |\ln x|$?



(A)



(B)



(C)

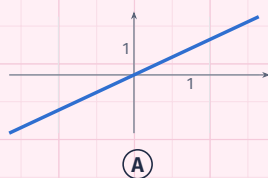


(D)

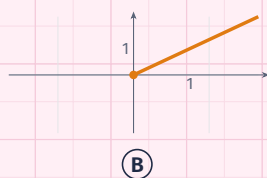
Question 52 Exponentielle d'un logarithme ★★

corrigé p.136

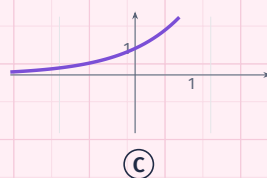
Laquelle de ces courbes est celle de la fonction $x \mapsto e^{\ln x}$?



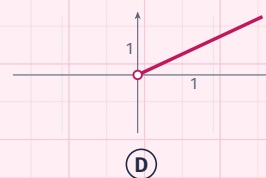
(A)



(B)



(C)



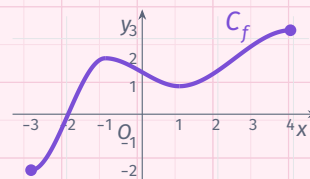
(D)

Question 53 Le logarithme d'une courbe ★★★

corrigé p.136

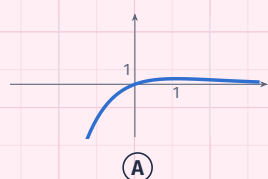
Voici la courbe d'une fonction f définie sur $[-3, 4]$; on pose $g(x) = \ln(f(x))$. Alors :

- (A) $g(1) = 0$ est un minimum local de g
- (B) g est définie sur $[-3, 4]$
- (C) g est croissante sur $]-2, 4]$
- (D) l'équation $g(x) = 0$ a une seule solution

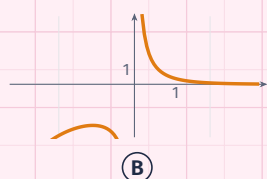
**Question 54** Exponentielle sur x ★★★

corrigé p.137

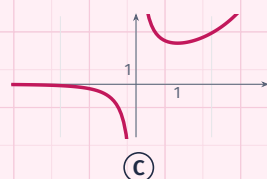
Laquelle de ces courbes est celle de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$?



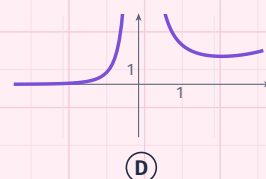
(A)



(B)



(C)

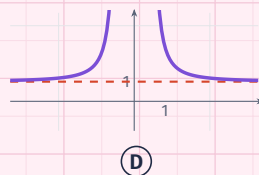
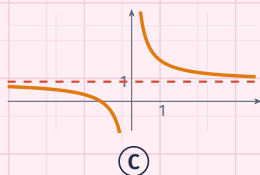
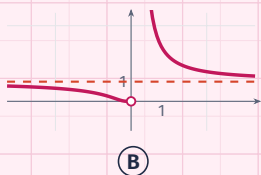
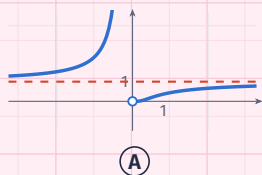


(D)

Question 55 Exponentielle de l'inverse ★★★

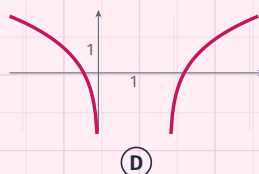
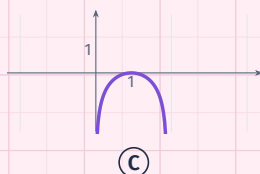
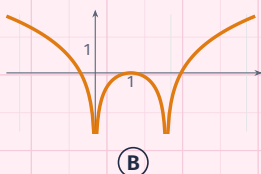
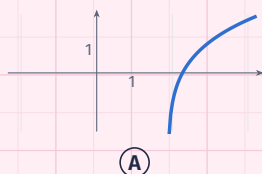
corrigé p.137

Laquelle de ces courbes est celle de la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$? (La droite $y = 1$ est en pointillés.)

**Question 56 Le domaine avant tout ★★★**

corrigé p.137

Laquelle de ces courbes est celle de la fonction $x \mapsto \ln(x^2 - 2x)$?

**Question 57 Un axe caché ★★★**

corrigé p.137

La courbe de la fonction $f(x) = \ln(x+1) + \ln(5-x)$ admet pour élément de symétrie :

- (A) l'axe $x = 3$ (B) le centre $(2; \ln 9)$
 (C) l'axe $x = 2$ (D) l'axe $x = \frac{5}{2}$

Question 58 Course à l'infini ★★★

corrigé p.137

Laquelle de ces fonctions l'emporte en $+\infty$ sur les trois autres ?

- (A) $x \mapsto e^{\frac{x}{20}}$ (B) $x \mapsto x^{20}$
 (C) $x \mapsto (\ln x)^{50}$ (D) $x \mapsto 1,04^x$

Question 59 Asymptotes ★★★

corrigé p.137

La courbe de $f(x) = \ln(e^x + e^3)$ a une asymptote horizontale en $-\infty$ et une asymptote oblique en $+\infty$. Abscisse de leur point d'intersection ?

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 60 Jumelles ★★★

corrigé p.137

Les équations $e^x + x = 4$ et $\ln x + x = 4$ ont chacune une unique solution, notée a et b . Calculer $a + b$ (sans calculatrice !).

Réponse numérique (un entier) : _____

7

Grille des réponses

Pour chaque question : son numéro (en petit) puis la bonne réponse (lettre du QCM ou entier). Les questions 9 et 10 de chaque série sont à réponse numérique.

Série	QCM								Numériques	
1 Lire une courbe	1 D	2 B	3 C	4 A	5 A	6 C	7 B	8 D	9 3	10 5
2 Transformations	11 B	12 D	13 B	14 A	15 C	16 C	17 D	18 A	19 1	20 8
3 $ x $ et partie entière	21 B	22 D	23 A	24 A	25 C	26 C	27 D	28 B	29 5	30 0
4 Asymptotes et tangentes	31 A	32 C	33 B	34 D	35 D	36 A	37 B	38 C	39 13	40 -3
5 Dérivées et réciproque	41 C	42 B	43 D	44 A	45 A	46 B	47 D	48 C	49 3	50 2
6 ln, exp et défis	51 B	52 D	53 A	54 C	55 B	56 D	57 C	58 A	59 3	60 4

Calculer son score

Pour une série : **score** = $4 \times (\text{bonnes réponses}) - 1 \times (\text{QCM faux})$. Les réponses numériques fausses et les questions sans réponse valent 0.

Exemple : 6 bonnes réponses, 3 QCM faux et 1 question sans réponse donnent $4 \times 6 - 3 = 21$ points sur 40.

Repères : moins de 16 : revois le cours et les fiches de la partie concernée ; de 16 à 28 : bon niveau ; plus de 28 : niveau concours.

Reporte tes scores dans le tableau « Mon bilan » à la fin du livret.

8

Corrigés des questions

Pour chaque question : la réponse, une justification courte, la **méthode express** et le **piège** tendu par la proposition (ou la valeur) la plus tentante.

■ Série 1 • Lire une courbe

■ Question 1

Réponse : D

« Strictement croissante » : si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$. La courbe D monte de gauche à droite sans jamais redescendre ni marquer de palier ; en $x = \frac{1}{2}$, la tangente est horizontale, mais la courbe continue de monter (comme celle de $x \mapsto x^3$ en 0). A : $f(1) = 2 > f(1,5) = 0,5$; B : f est constante sur $[0 ; 1,5]$; C : la courbe redescend entre 0 et 0,8. **Piège** : A est croissante sur $[-2, 1]$ et sur $]1, 3]$, mais pas sur leur réunion (saut vers le bas).

Méthode express : suivre la courbe du doigt, de gauche à droite : il doit monter tout le temps ; un replat réduit à un point ne gêne pas.

■ Question 2

Réponse : B

On lit $f(0) = 2$. La droite d'équation $y = 2$ coupe la courbe en trois points, d'abscisses -3 , 0 et 3 (milieux des trois arcs). **Piège** : D oublie le point de départ lui-même (0 est un antécédent de $f(0)$) ; A confond image et antécédent.

Méthode express : tracer l'horizontale $y = f(0)$: elle repasse par le point de départ.

■ Question 3

Réponse : C

Sur $[-4, 0]$, f part de $f(-4) = 1$, monte jusqu'à $f(-2) = 3$, puis redescend jusqu'à $f(0) = 2$: son minimum est 1, son maximum 3, et (courbe sans saut) l'image est $[1, 3]$. **Piège** : A : $[f(-4), f(0)] = [1, 2]$ oublie le maximum atteint entre les bornes.

Méthode express : projeter sur (Oy) le morceau de courbe situé au-dessus de $[-4, 0]$.

■ Question 4

Réponse : A

Une fonction impaire a une courbe symétrique par rapport à O et, si elle est définie en 0, $f(0) = -f(0)$, donc $f(0) = 0$. A : les sommets $(-2,5; -1)$, $(-1; 1,5)$ ont pour symétriques $(2,5; 1)$, $(1; -1,5)$, qui sont sur la courbe ✓. B est symétrique par rapport à $(0; 1)$, C par rapport à (Oy) (paire). **Piège** : D est symétrique par rapport à O partout... sauf en 0 : le disque plein en $(0; 1)$ donne $f(0) = 1 \neq 0$.

Méthode express : tester O , puis un sommet et son symétrique.

■ Question 5

Réponse : A

On additionne les ordonnées. Aux zéros de f : $(f+g)(-1) = g(-1) = 0$; aux zéros de g : $(f+g)(1) = f(1) = 2$; et $(f+g)(0) = 1 + 1 = 2$. Seule A passe par $(-1; 0)$, $(0; 2)$ et $(1; 2)$: c'est la parabole $y = 2 + x - x^2$. B = $2 - x^2$ (on n'a ajouté que $f(0)$), C = $\max(f, g)$, D = $g - f$. **Piège** : B, qui a la bonne ordonnée à l'origine.

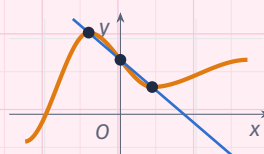
Méthode express : aux zéros de f , la somme vaut g ; aux zéros de g , elle vaut f .

■ Question 6

Réponse : C

$f(x) + x = 2 \iff f(x) = 2 - x$: on cherche les points communs à C_f et à la droite $\Delta : y = 2 - x$, qui passe par $(-1; 3)$, $(0; 2)$ et $(1; 1)$, trois points de C_f (l'arc entre $(-1; 3)$ et $(1; 1)$ est symétrique par rapport à son milieu $(0; 2)$). Sur $[-3, -1]$, $f(x) < 3 < 2 - x$; sur $]1, 4]$, $f(x) > 1 > 2 - x$: **trois solutions**. **Piège** : B : on voit les deux sommets, pas la traversée en $(0; 2)$.

Méthode express : isoler $f(x)$, puis tracer la droite $y = 2 - x$.



■ Question 7

Réponse : B

$f(x) = (x+1)^2 - 8$ décroît sur $[-3, -1]$ de $f(-3) = -4$ à -8 , puis croît sur $[-1, 2]$ de -8 à $f(2) = 1$. La droite $y = m$ coupe les deux branches si et seulement si $-8 < m \leq -4$ ($m = -8$: le seul sommet ; $-4 < m \leq 1$: la seule branche de droite). **Piège** : A oublie la restriction à $[-3, 2]$; C compte le sommet deux fois.

Méthode express : deux points $\iff m$ entre le sommet et la plus basse des deux extrémités.

■ Question 8

Réponse : D

$g(x)$ existe si et seulement si $f(x) \geq 0$ (racine carrée) et $f(x) \neq 2$ (dénominateur). On lit $f(x) \geq 0 \iff x \in [-4, -3] \cup [0, 4]$ (zéros $-3, 0$ et 4), et $f(x) = 2 \iff x = -4$ ou $x = 2$. D'où $D_g =]-4, -3] \cup [0, 2[\cup]2, 4]$.

Piège : B oublie que l'extrémité $(-4; 2)$ est à la hauteur 2 ; C exclut à tort les zéros ($\sqrt{0} = 0$ existe).

Méthode express : deux lectures : au-dessus de (Ox) , puis contact avec la droite $y = 2$.

■ Question 9

Réponse : 3

Pour $-2 < m < 2$, chacun des trois arcs (qui balaie tout l'intervalle $[-2, 2]$) est coupé une fois par la droite $y = m$: trois solutions. Pour $m = 2$: $x = -2$ et $x = 4$; pour $m = -2$: $x = -4$ et $x = 0$ (deux solutions) ; hors de $[-2, 2]$: aucune. Entiers retenus : $-1, 0, 1$, soit 3. **Piège** : 5, en comptant $m = \pm 2$.

Méthode express : les extrémités et les sommets sont les seules valeurs « critiques » de m .

■ Question 10

Réponse : 5

On pose $u = f(x)$: $f(u) = 0 \iff u \in \{-3; -1; 2\}$ (zéros de f , milieux des arcs). $f(x) = -3$: impossible ($f \geq -2$) ; $f(x) = -1$: trois solutions ; $f(x) = 2$: deux solutions ($x = -2$ et $x = 4$). Total : $0 + 3 + 2 = 5$. **Piège** : 3 (les zéros de f seulement) ou 6 (compter trois solutions pour $f(x) = 2$).

Méthode express : résoudre $f(u) = 0$, puis $f(x) = u$ pour chaque racine u , en lisant chaque horizontale.

■ Série 2 • Transformations

■ Question 11

Réponse : B

$x \mapsto f(-x)$: symétrie d'axe (Oy) ; $(-2; 0)$, $(-1; 2)$, $(2; 1)$ deviennent $(2; 0)$, $(1; 2)$, $(-2; 1)$: B. A représente $-f$ (axe (Ox)), C représente $-f(-x)$ (centre O), D est la symétrique par rapport à $y = x$ (ce n'est même pas une fonction). **Piège** : A : confondre $f(-x)$ et $-f(x)$.

Méthode express : $f(-x)$: le signe change dans la parenthèse, on retourne de gauche à droite.

■ Question 12

Réponse : D

$x^2 + 6x + 11 = (x+3)^2 + 2$: la parabole a pour sommet $S(-3; 2)$; la translation qui envoie le sommet O de $y = x^2$ sur S a pour vecteur $\vec{u}(-3; 2)$. **Piège** : A : lire « +3 » dans $(x+3)^2$.

Méthode express : le vecteur est donné par le sommet $\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

■ Question 13

Réponse : B

$3x + 1 = 3(x-1) + 4$, donc $f(x) = 3 + \frac{4}{x-1}$: la courbe de f est l'image de $y = \frac{4}{x}$ par la translation de vecteur $\vec{u}(1; 3)$; centre de symétrie $\Omega(1; 3)$. **Piège** : A : lire -1 dans $x-1$.

Méthode express : forme réduite $b + \frac{k}{x-a}$: vecteur $(a; b)$.

■ Question 14

Réponse : A

$y = f(x+1) - 1$: le point $(x; y)$ de C_f devient $(x-1; y-1)$, translation de vecteur $(-1; -1)$; le sommet $(0; 1)$ arrive en $(-1; 0)$: A. **Piège** : B : $f(x+1)$ décale la courbe vers la gauche.

Méthode express : suivre le sommet : il doit arriver en $(-1; 0)$.

■ Question 15

Réponse : C

Sommet $S(-2; 1)$: $f(x) = a(x+2)^2 + 1$; le point $(0; 3)$ donne $4a + 1 = 3$, donc $a = \frac{1}{2}$ (et $(-4; 3)$ convient par symétrie). **Piège** : D : $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$ a pour sommet $(-2; -1)$; A a pour sommet $(2; 1)$; pour B, $f(0) = 9$.

Méthode express : forme canonique avec le sommet, puis un point pour trouver a .

■ Question 16

Réponse : C

$f(2x)$: le point $(x; y)$ devient $(\frac{x}{2}; y)$, contraction horizontale de rapport $\frac{1}{2}$; le sommet $(-1; 2)$ devient $(-\frac{1}{2}; 2)$ et l'intervalle $[-2, 2]$ devient $[-1, 1]$: C. B et D modifient les ordonnées. **Piège** : A : $f(\frac{x}{2})$ étire au lieu de contracter.

Méthode express : $f(2x)$ « arrive deux fois plus tôt » : les abscisses sont divisées par 2.

■ Question 17

Réponse : D

C_g est C_f retournée par rapport à (Ox) puis décalée de 3 vers la droite : $g(x) = -f(x - 3)$. Contrôle : $g(3) = -f(0) = -2$, $g(4) = -f(1) = 0$, $g(6) = -f(3) = -3$ ✓. B $(-f(6 - x))$, symétrie de centre $(3; 0)$ donnerait $g(3) = -f(3) = -3$; A donne $g(3) = f(0) - 3 = -1$; C n'est pas défini sur $[3, 6]$. **Piège** : B, qui retourne aussi la courbe de gauche à droite.

Méthode express : tester une extrémité : $g(3) = -2 = -f(0)$.

■ Question 18

Réponse : A

La symétrie de centre $\Omega(-1; 1)$ envoie $M(x; y)$ sur $M'(-2 - x; 2 - y)$: $(0; 0) \mapsto (-2; 2)$, $(2; 2) \mapsto (-4; 0)$ et $(1; \frac{1}{2}) \mapsto (-3; \frac{3}{2})$; l'image est la courbe de $x \mapsto 2 - f(-2 - x)$, arc concave de $(-4; 0)$ à $(-2; 2)$: A. C et D sont des symétries axiales ($x = -1$, $y = 1$). **Piège** : B, la translation $f(x + 4)$, a les mêmes extrémités mais reste convexe (en $-3 : \frac{1}{2} \neq \frac{3}{2}$).

Méthode express : suivre un point intérieur : $(1; \frac{1}{2})$ doit aller en $(-3; \frac{3}{2})$.

■ Question 19

Réponse : 1

$H' : y = \frac{1}{x-2} + 2$. Pour $x \notin \{0; 2\}$: $\frac{1}{x} = \frac{1}{x-2} + 2 \iff x - 2 = x + 2x(x - 2) \iff 2x^2 - 4x + 2 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0$. Une racine double : H et H' sont tangentes au seul point $(1; 1)$. **Piège** : 2 (on attend deux points d'intersection).

Méthode express : racine double $\iff$ courbes tangentes.

■ Question 20

Réponse : 8

L'image passe par O si et seulement si $O = M + \vec{u}$ pour un point M de H , c'est-à-dire $M(-a; -b) \in H$: $-b = \frac{12}{-a}$, soit $ab = 12$. Avec a et b entiers de $[-6, 6]$: $a \in \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6\}$ et $b = \frac{12}{a}$ ($a = \pm 1$ donnerait $b = \pm 12$) : 8 vecteurs. **Piège** : 12 (oublier la contrainte sur b) ou 4 (oublier les diviseurs négatifs).

Méthode express : compter les points à coordonnées entières de H dans le carré $[-6, 6]^2$.

■ Série 3 · $|x|$ et partie entière

■ Question 21

Réponse : B

Pour $x \geq 0$: $|x| - x = 0$; pour $x < 0$: $|x| - x = -2x > 0$. Demi-droite de pente -2 à gauche de O , puis le demi-axe $[0, +\infty[$: B. A = $|x|$, C = $|x| + x$, D = $x - |x|$. **Piège** : C, qui confond $|x| - x$ et $|x| + x$.

Méthode express : découper selon le signe de x : deux formules affines.

■ Question 22

Réponse : D

$E(|x|) = 1 \iff 1 \leq |x| < 2 \iff x \in [1, 2[\text{ ou } x \in]-2, -1]$. **Piège** : B recopie $[1, 2[$ en $[-2, -1[$: par symétrie, les crochets se retournent ($x = -1$ convient, pas $x = -2$). A oublie les négatifs, C ne retire pas $] -1, 1[$.

Méthode express : symétriser l'intervalle, crochets compris.

■ Question 23

Réponse : A

Les deux membres sont positifs : $|x - 1| < 2|x| \iff (x - 1)^2 < 4x^2 \iff 3x^2 + 2x - 1 > 0 \iff (3x - 1)(x + 1) > 0 \iff x < -1 \text{ ou } x > \frac{1}{3}$. Graphiquement, le V de $y = 2|x|$ passe au-dessus de celui de $y = |x - 1|$ en dehors de $[-1, \frac{1}{3}]$. **Piège** : C oublie le croisement en -1 : à gauche, le V le plus pentu repasse au-dessus.

Méthode express : deux nombres positifs se comparent comme leurs carrés.

■ Question 24

Réponse : A

Sur $[n, n + 1[$, $x E(x) = nx$: segment de pente n allant de $(n; n^2)$ (disque plein) à $(n + 1; n(n + 1))$ (cercle vide) : de $(-2; 4)$ à $(-1; 2)$, de $(-1; 1)$ à $(0; 0)$, nul sur $[0, 1[$, de $(1; 1)$ à $(2; 2)$: A. B = $E(x^2)$, C = $E(x)^2$ (paliers). **Piège** : D : les disques pleins sont à gauche de chaque morceau (E est continue à droite).

Méthode express : sur chaque marche $[n, n + 1[$, remplacer $E(x)$ par n .

■ Question 25

Réponse : C

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et, comme $x^2 = |x|^2$: $f(x) = \frac{(|x| - 1)(|x| + 1)}{|x| - 1} = |x| + 1$. C'est le V de sommet $(0; 1)$ privé des points $(-1; 2)$ et $(1; 2)$: C. **Piège** : B oublie que -1 est aussi exclu ; D simplifie comme si l'on avait $x - 1$ au dénominateur.

Méthode express : écrire $x^2 - 1 = (|x| - 1)(|x| + 1)$.

■ Question 26

Réponse : C

$|f(x)| = 0 \iff f(x) = 0$: les zéros -2 et 1 sont certains, quel que soit le signe de f ailleurs. Contre-exemple pour A, B et D : $f = |f|$ sur $[-4, 0]$ et $f = -|f|$ sur $]0, 3]$; alors $f(3) = -3$ et le minimum de f vaut -3 . **Piège** : D : lire la courbe de $|f|$ comme celle de f .

Méthode express : $|f|$ efface le signe : seuls les zéros et les distances à l'axe sont sûrs.

■ Question 27

Réponse : D

Pour $x \geq 0$: $x(x - 2)$ (parabole tournée vers le haut, minimum -1 en 1) ; pour $x \leq 0$: $-x(x - 2) = -x^2 + 2x$, toujours négatif, qui plonge vers $-\infty$. Point anguleux en O (pentes 2 à gauche, -2 à droite) : D. B = $|x(x - 2)|$ est positive, C = $x^2 - 2|x|$ est paire. **Piège** : A : $x(|x| - 2)$ coïncide pour $x \geq 0$, mais vaut $-x^2 - 2x > 0$ sur $] -2, 0[$.

Méthode express : signe pour $x < 0$: $|x|(x - 2) < 0$.

■ Question 28

Réponse : B

Si $x \in [n, n + \frac{1}{2}[$, alors $2x \in [2n, 2n + 1[$ et $E(2x) = 2n$: la différence vaut 0 . Si $x \in [n + \frac{1}{2}, n + 1[$, $E(2x) = 2n + 1$: elle vaut 1 . Créneau $0 / 1$ de période 1 , disques pleins à gauche : B. A est son opposé ($2E(x) - E(2x)$), D a ses disques à droite. **Piège** : C, créneau décalé d'une demi-période.

Méthode express : tester $x = 0$, $x = 0,5$ et $x = 0,7$.

■ Question 29

Réponse : 5

$f(|x|) = 1 \iff |x| = t$ avec $t \geq 0$ et $f(t) = 1$. Sur la courbe, $f(t) = 1$ pour $t = -2, 0, \frac{5}{2}$ et $\frac{9}{2}$ (milieux des arcs) ; on ne garde que $t \geq 0$: $t = 0$ donne $x = 0$, $t = \frac{5}{2}$ et $t = \frac{9}{2}$ donnent $x = \pm\frac{5}{2}$ et $x = \pm\frac{9}{2}$. Total : 5. **Piège** : 4 (les solutions de $f(x) = 1$) ou 6 (compter $x = 0$ deux fois).

Méthode express : chaque solution $t > 0$ de $f(t) = 1$ en donne deux, $t = 0$ une seule, $t < 0$ aucune.

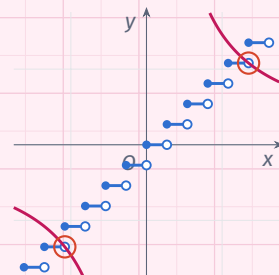
■ Question 30

Réponse : 0

On pose $k = E(x) \in \mathbb{Z}$: $E(x) = \frac{20}{x} \iff x = \frac{20}{k}$ avec $k \leq \frac{20}{k} < k+1$.

Pour $k > 0$: $k^2 \leq 20 < k^2 + k$, impossible ($k = 4$: $20 < 20$ est faux ; $k \leq 3$: $k^2 + k \leq 12$; $k \geq 5$: $k^2 > 20$). Pour $k < 0$ (on multiplie par k , l'ordre change) : $k^2 + k < 20 \leq k^2$, impossible ($k = -5$: $20 < 20$; $k = -4$: $20 \leq 16$). **Aucun point commun** : l'hyperbole se glisse entre les marches, en passant exactement par les cercles vides $(5; 4)$ et $(-4; -5)$. **Piège** : 2, en prenant ces deux points exclus pour des points de l'escalier.

Méthode express : $k = E(x)$, puis l'encadrement $k \leq x < k+1$.



■ Série 4 · Asymptotes et tangentes

■ Question 31

Réponse : A

La tangente T passe par les nœuds $(0; -1)$ et $(2; 5)$ du quadrillage : sa pente vaut $\frac{5-(-1)}{2-0} = 3$, d'où $f'(1) = 3$ (ici $f(x) = -x^2 + 5x - 2$). **Piège** : D : $2 = f(1)$ est l'ordonnée du point de contact ; B est l'inverse de la pente, C l'ordonnée à l'origine de T .

Méthode express : pente = $\frac{\text{montée}}{\text{avancée}}$ entre deux nœuds de la tangente.

■ Question 32

Réponse : C

Il faut : à gauche de la verticale $x = 1$, une descente vers $-\infty$; à droite, une montée vers $+\infty$; une asymptote $y = 2$ en $-\infty$ et l'axe (Ox) en $+\infty$: C. A inverse les côtés de la verticale, B échange les asymptotes horizontales, D a son asymptote verticale en $x = -1$. **Piège** : A, qui a les bonnes asymptotes.

Méthode express : contrôler une limite à la fois, en commençant par les côtés de la verticale.

■ Question 33

Réponse : B

$x^3 - x^2 + 2 = x^2(x - 1) + 2$, donc $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x^2}$; $f(x) - (x - 1) = \frac{2}{x^2} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$, et $\frac{2}{x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}^*$: Δ : $y = x - 1$, C_f au-dessus de Δ des deux côtés. **Piège** : C : $\frac{2}{x^2}$ est positif aussi pour $x < 0$ (ce n'est pas $\frac{2}{x}$) ; A oublie le terme $-\frac{x^2}{x^2} = -1$.

Méthode express : signe de $f(x) - (ax + b)$ après la division.

■ Question 34

Réponse : D

$g(x) = x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$ change de signe en 4, avec $g'(4) = 6$. Comme $f = |g|$: pente -6 à gauche de 4 (où $f = -g$), pente 6 à droite : point anguleux. **Piège** : A : A est un minimum de f , mais pas à tangente horizontale ; C prend $x = 4$ pour la pente.

Méthode express : en un zéro simple a de g , $|g|$ a deux demi-tangentes de pentes $\pm g'(a)$.

■ Question 35

Réponse : D

$D_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. En 2 : $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} \rightarrow +\infty$: demi-tangente verticale (de même en -2). En $\pm\infty$: $f(x) - |x| = \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + |x|} \rightarrow 0$: asymptotes $y = x$ et $y = -x$: D. **Piège** : B part aussi à la verticale, mais s'écarte de $y = |x|$ (pas d'asymptote) ; A et C partent avec la pente ± 1 .

Méthode express : $\sqrt{u}$, avec u qui s'annule en changeant de signe : départ vertical.

■ Question 36

Réponse : A

En -1 : point anguleux (pente -1 à gauche, environ 0,4 à droite). En 2 : tangente verticale, la courbe « tombe » à la verticale : f n'est pas dérivable. En 1 et en 3 : extremums à tangente horizontale, $f'(1) = f'(3) = 0$, donc f est dérivable. **Piège** : C : une tangente horizontale signifie $f' = 0$, pas « non dérivable ».

Méthode express : non dérivable = coin ou tangente verticale ; un sommet arrondi est dérivable.

■ Question 37

Réponse : B

$x^2 - x + 1 = (x-2)(x+1) + 3$, donc $f(x) = x + 1 + \frac{3}{x-2}$: asymptotes $x = 2$ et $y = x + 1$, courbe au-dessus de l'asymptote oblique pour $x > 2$, au-dessous pour $x < 2$, et $f(0) = -\frac{1}{2}$: B. C a pour asymptote $y = x - 1$, D a pour asymptote $x = -2$. **Piège** : A, mêmes asymptotes mais positions inversées ($f(0)$ vaudrait $\frac{5}{2}$).

Méthode express : après la division, contrôler un point : $f(0) = -\frac{1}{2}$.

■ Question 38

Réponse : C

D passe par (0; -1) et (2; 3) : D : $y = 2x - 1$, donc $f(x) - 2x \rightarrow -1$ et $\frac{f(x) + 2x}{x} \rightarrow 4$. Alors $\frac{f(x)^2 - 4x^2}{x} = (f(x) - 2x) \times \frac{f(x) + 2x}{x} \rightarrow (-1) \times 4 = -4$. **Piège** : A (-1) : oublier le facteur $\frac{f(x) + 2x}{x}$; D (0) : croire que f^2 et $4x^2$ « se compensent ».

Méthode express : factoriser $f^2 - (ax)^2 = (f - ax)(f + ax)$.

■ Question 39

Réponse : 13

La division donne $f(x) = ax + (b + 2a) + \frac{4a + 2b + 1}{x - 2}$. L'asymptote $y = 3x + 1$ impose $a = 3$ et $b + 6 = 1$, soit $b = -5$: $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 2} = 3x + 1 + \frac{3}{x - 2}$ et $f(3) = \frac{27 - 15 + 1}{1} = 13$. **Piège** : 10 : la valeur de l'asymptote en 3, sans le reste $\frac{3}{x-2}$.

Méthode express : identifier a et b sur la partie entière de la division.

■ Question 40

Réponse : -3

Question 31 : $f(1) = 2$ et $f'(1) = 3$. $g'(x) = f(x) + x f'(x)$, donc $g'(1) = 2 + 3 = 5$, et $g(1) = 2$. Tangente : $y = 5(x - 1) + 2 = 5x - 3$: ordonnée à l'origine -3. **Piège** : -1, l'ordonnée à l'origine de T (tangente à C_f , non à C_g).

Méthode express : la tangente en a coupe (Oy) en $g(a) - a g'(a) = 2 - 5$.

■ Série 5 • Dérivées et réciproque

■ Question 41

Réponse : C

En A la courbe monte : $f'(-3) > 0$; en B elle descend : $f'(0) < 0$; en C elle est horizontale : $f'(2) = 0$. Donc $f'(0) < f'(2) < f'(-3)$ (ici $f'(x) = \frac{x^2}{4} - 1$ vaut -1, 0 et $\frac{5}{4}$). **Piège** : A classe les ordonnées $f(2) < f(0) < f(-3)$ au lieu des pentes.

Méthode express : le signe de f' dit si l'on monte ou descend, pas la hauteur du point.

■ Question 42

Réponse : B

La courbe de f^{-1} est la symétrique de C_f par rapport à $y = x$: le point $(a; b)$ devient $(b; a)$; $(-2; 0) \mapsto (0; -2)$, $(0; 1) \mapsto (1; 0)$, $(2; 2)$ reste en place : B , C et D sont les symétriques par rapport à (Oy) et à (Ox) . **Piège** : A , symétrique par rapport à l'autre diagonale $y = -x$.

Méthode express : échanger les coordonnées de deux ou trois points.

■ Question 43

Réponse : D

f' s'annule aux abscisses des extremums de f (-1 et 3), elle est positive là où f croît ($x < -1$ et $x > 3$) et négative entre les deux : parabole tournée vers le haut, de racines -1 et 3 : D (ici $f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{3}$). A a les signes inversés, C est f'' . **Piège** : B s'annule aux zéros de f (vers -1,85 et 4,85), pas en ses extremums.

Méthode express : zéros de f' = abscisses des sommets de C_f ; signe de f' = sens de variation.

■ Question 44

Réponse : A

$f' < 0$ sur $]-2, 2[$ et $f' > 0$ ailleurs : f croît, décroît puis croît, avec un maximum en -2 et un minimum en 2 : A (une primitive de $\frac{x^2-4}{2}$ est $\frac{x^3}{6} - 2x + \frac{1}{2}$). B a les variations inversées, C est la courbe de f' elle-même. **Piège** : D , $\frac{|x^2-4|}{2} - 1$, a des extremums en -2, 0 et 2 : on a pris le minimum de f' (en 0) pour un extremum de f .

Méthode express : ne garder que le signe de f' : + - +.

■ Question 45

Réponse : A

$f(x) = x^5 + 3x$: $f''(x) = 20x^3$ s'annule en 0 en changeant de signe : O est un point d'inflexion. B ($f'' = 12x^2$), C ($f'' = 30x^4$) et D ($f''(x) = 6|x|$) ont une dérivée seconde positive qui s'annule en 0 sans changer de signe : courbes convexes, sans inflexion. **Piège** : B ou C : $f''(0) = 0$ ne suffit pas.

Méthode express : inflexion $\iff f''$ s'annule en changeant de signe.

■ Question 46

Réponse : B

« Au-dessus de ses tangentes » signifie convexe, c'est-à-dire $f'' \geq 0$: on lit $f'' \geq 0$ sur $[-1, 3]$. C ($[3, +\infty[$) est une zone où $f'' \leq 0$ (concavité). **Piège** : A : $]-\infty, 1]$ est l'intervalle où f'' croît ; la convexité se lit sur le signe de f'' , pas sur ses variations.

Méthode express : convexe $\iff f'' \geq 0$: courbe de f'' au-dessus de (Ox) .

■ Question 47

Réponse : D

T passe par $(0; 1)$ et $A(1; 3)$: $T : y = 2x + 1$. Par la symétrie d'axe $y = x$, la tangente à la courbe de f^{-1} en $B(3; 1)$ est l'image de $T : x = 2y + 1$, soit $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; sa pente $\frac{1}{2} = \frac{1}{f'(1)}$ est l'inverse de celle de T . **Piège** : A garde la pente 2 ; B et C ont une pente négative.

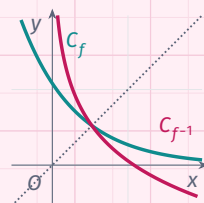
Méthode express : la symétrique de la droite $y = mx + p$ par rapport à $y = x$ est la droite $x = my + p$.

■ Question 48

Réponse : C

La courbe de f^{-1} est la symétrique de C_f par rapport à $y = x$. Une courbe décroissante reste décroissante. Pour la convexité, sur l'exemple tracé, $f(x) = 3e^{-\frac{x}{2}}$: $f^{-1}(x) = 2 \ln 3 - 2 \ln x$ et $(f^{-1})''(x) = \frac{2}{x^2} > 0$: décroissante et convexe. En général, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$ avec $y = f^{-1}(x)$: quand x croît, y décroît, $f'(y) < 0$ décroît, donc $\frac{1}{f'(y)}$ croît. **Piège** : A : « la réciproque d'une convexe est concave » n'est vrai que pour une fonction croissante.

Méthode express : faire le dessin : la symétrique d'une courbe décroissante convexe garde sa « cuvette ».



■ Question 49

Réponse : 3

Point d'inflexion de $C_f \iff f''$ s'annule en changeant de signe $\iff f'$ admet un extremum local : en -2 (maximum), 0 (minimum) et 2 (maximum), soit 3 points. **Piège** : 2 : les zéros de f' donnent les extremums de f , pas ses inflexions.

Méthode express : inflexion de f = sommet de $C_{f'}$.

■ Question 50

Réponse : 2

Tangente parallèle à $y = x \iff f'(x) = 1$. La droite $y = 1$ touche $C_{f'}$ en son maximum $(-2; 1)$, puis la recoupe une fois sur $]0, 2[$ (où f' monte de -2 à 2) ; ailleurs, $f' < 1$ (sur $[-4, -2[$ et $]-2, 0]$) ou $f' \geq 1,5$ (sur $[2, 4]$) : 2 points. **Piège** : 1, en oubliant le point de contact en -2 .

Méthode express : lire les solutions de $f'(x) = 1$ sur la courbe de f' .

■ Série 6 · ln, exp et défis

■ Question 51

Réponse : B

$|\ln x|$ est définie sur $]0, +\infty[$; elle vaut $-\ln x$ sur $]0, 1]$ et $\ln x$ sur $[1, +\infty[$: point anguleux en $(1; 0)$ (pentes -1 et 1) et $+\infty$ en 0^+ : B. A = $\ln |x|$ (définie sur $\mathbb{R}^*$), C = $-\ln x$. **Piège** : D, $(\ln x)^2$, qui touche l'axe en douceur (tangente horizontale).

Méthode express : une valeur absolue crée un pli là où la fonction change de signe.

■ Question 52

Réponse : D

$e^{\ln x}$ n'existe que pour $x > 0$, et vaut alors x : demi-droite $y = x$, ouverte en O : D. A oublie le domaine, C est la courbe de exp. **Piège** : B : le disque plein en O , alors que $\ln 0$ n'existe pas.

Méthode express : simplifier, mais en gardant le domaine de départ.

■ Question 53

Réponse : A

$g = \ln \cdot f$ est définie là où $f > 0$, c'est-à-dire sur $]-2, 4[$ ($f(-2) = 0$), et, $\ln$ étant strictement croissante, elle a les mêmes variations que f : croissante sur $]-2, -1]$, décroissante sur $[-1, 1]$, croissante sur $[1, 4]$. En 1, f a un minimum local égal à 1, donc $g(1) = \ln 1 = 0$ est un minimum local de g : A. B est faux ($f \leq 0$ sur $[-3, -2]$), C aussi (g décroît sur $[-1, 1]$). **Piège** : D : $g(x) = 0 \iff f(x) = 1$, qui a deux solutions (l'une dans $]-2, -1[$, l'autre en 1).

Méthode express : $\ln \cdot f$: mêmes variations que f , là où $f > 0$; et $\ln \cdot f = 0 \iff f = 1$.

■ Question 54

Réponse : C

$\frac{e^x}{x}$ a le signe de x . Pour $x > 0$: $+\infty$ en 0^+ et en $+\infty$ (croissances comparées), minimum e en 1 ; pour $x < 0$: limite 0^- en $-\infty$, $-\infty$ en 0^- : C. $A = x e^{-x}$ (pas d'asymptote verticale), $D = \frac{e^x}{x^2}$ (positive des deux côtés). **Piège** : B, $\frac{e^{-x}}{x}$, symétrique de C par rapport à O.

Méthode express : signe, puis limites aux quatre bornes.

■ Question 55

Réponse : B

En 0^+ : $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$; en 0^- : $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, donc $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$ (la courbe arrive sur O, point exclu) ; en $\pm\infty$: $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow e^0 = 1$. Courbe toujours au-dessus de (Ox) : B. $C = 1 + \frac{1}{x}$ devient négative près de 0^- , $D = e^{\frac{1}{x^2}}$ tend vers $+\infty$ des deux côtés. **Piège** : A, $e^{-\frac{1}{x}}$, symétrique de B par rapport à (Oy).

Méthode express : traiter séparément les limites à gauche et à droite de 0.

■ Question 56

Réponse : D

$x^2 - 2x > 0 \iff x < 0$ ou $x > 2$: deux branches, symétriques par rapport à $x = 1$, d'asymptotes verticales $x = 0$ et $x = 2$: D. $B = \ln |x^2 - 2x|$ (trois branches), $C = \ln(2x - x^2)$ (branche du milieu). **Piège** : A : $\ln x + \ln(x - 2)$ n'est définie que pour $x > 2$; l'égalité $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ exige $a > 0$ et $b > 0$.

Méthode express : le domaine d'abord : signe du trinôme.

■ Question 57

Réponse : C

$D_f =]-1, 5[$, symétrique par rapport à 2, et $f(4 - x) = \ln(5 - x) + \ln(x + 1) = f(x)$: la droite $x = 2$ est axe de symétrie (en fait $f(x) = \ln(9 - (x - 2)^2)$). B : $f(4 - x) + f(x) = 2f(x) \neq 2 \ln 9$ en général. **Piège** : D, $\frac{5}{2}$, milieu de 0 et 5 au lieu de -1 et 5.

Méthode express : $\ln(x - a) + \ln(b - x)$: axe au milieu de a et b .

■ Question 58

Réponse : A

On compare les logarithmes : $\ln\left(e^{\frac{x}{20}}\right) = 0,05x$; $\ln(1,04^x) = x \ln 1,04 < 0,04x$ (car $\ln(1 + t) < t$) ; $\ln(x^{20}) = 20 \ln x$ et $\ln((\ln x)^{50}) = 50 \ln(\ln x)$ sont négligeables devant x . C'est donc $e^{\frac{x}{20}}$ qui l'emporte, même si x^{20} est bien plus grand pour $x = 100$. **Piège** : D : $1,04^x = e^{x \ln 1,04}$ est une exponentielle, mais de « taux » $\ln 1,04 < 0,05$.

Méthode express : tout écrire sous la forme $e^{(\dots)}$ et comparer les exposants.

■ Question 59

Réponse : 3

En $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow \ln(e^3) = 3$: asymptote $y = 3$. En $+\infty$: $f(x) = \ln(e^x(1 + e^{3-x})) = x + \ln(1 + e^{3-x})$, et $\ln(1 + e^{3-x}) \rightarrow 0$: asymptote $y = x$. Elles se coupent en $(3; 3)$. **Piège** : e^3 ou 0, en se trompant d'asymptote.

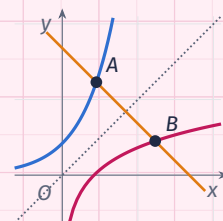
Méthode express : mettre en facteur, dans le $\ln$, le terme qui domine.

■ Question 60

Réponse : 4

$e^a + a = 4 \iff e^a = 4 - a$: le point $A(a; e^a)$ est commun à $C_{\exp}$ et à la droite $\Delta : y = 4 - x$. De même, $B(b; \ln b)$ est commun à $C_{\ln}$ et à Δ . Or Δ , perpendiculaire à $y = x$, est sa propre symétrique, et $C_{\ln}$ est la symétrique de $C_{\exp}$: le symétrique $(e^a; a)$ de A est sur $C_{\ln} \cap \Delta = \{B\}$. Donc $b = e^a$ et $a + b = a + e^a = 4$. (Unicité : $x \mapsto e^x + x$ et $x \mapsto \ln x + x$ sont strictement croissantes.) **Piège** : chercher $a \approx 1,07$ et $b \approx 2,93$ à la main.

Méthode express : B est le symétrique de A par rapport à $y = x$.



Partie 6 · Grands problèmes

6 problèmes de synthèse, du tronc commun au Bac

★ Astuce de concours : lire un grand problème

Chaque problème tourne autour d'une **figure** : commence par la regarder longuement et note ce qu'elle « dit » (points communs, sommets, asymptotes, positions). Les questions démontrent ensuite ce que l'œil a deviné. Une question non résolue ne bloque rien : on admet le résultat et on avance.

1 Lire, tracer, discuter

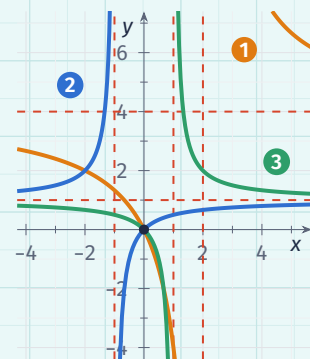
Exercice 61 Problème 1 · Un faisceau d'hyperboles ★★★

corrigé p. 143

Tronc commun Pour tout réel $m \neq 0$, on pose $h_m(x) = \frac{m^2 x}{x - m}$ pour $x \neq m$; H_m est la courbe de h_m dans un repère orthonormé.

Partie A Centres et point commun.

1. a) Montrer que $h_m(x) = m^2 + \frac{m^3}{x - m}$. b) En déduire que H_m est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \frac{m^3}{x}$ par une translation à préciser ; donner son centre Ω_m , ses deux asymptotes (droites passant par Ω_m , parallèles aux axes) et le sens de variation de h_m selon le signe de m .
2. a) Montrer que toutes les courbes H_m passent par O , et que H_1 et H_{-1} n'ont pas d'autre point commun.
b) Quel ensemble le centre Ω_m décrit-il quand m décrit $\mathbb{R}^*$?
c) Montrer que H_{-m} est la symétrique de H_m par rapport à l'axe (Oy) .
3. La figure montre trois courbes ①, ②, ③ de la famille et leurs asymptotes (en tirets). Retrouver la valeur de m de chacune.



Partie B Par un point donné, combien d'hyperboles passent-elles ?

Soit $M(a, b)$ un point du plan, avec $a \neq 0$.

4. Montrer que $M \in H_m$ si et seulement si $am^2 + bm - ab = 0$ et $m \neq 0$ (on vérifiera que la condition $m \neq a$ est alors automatique).
5. a) Discuter, selon a et b , le nombre de courbes H_m qui passent par M ; on fera intervenir la parabole P' d'équation $y = -4x^2$. Que dire des points de (Oy) ? b) Colorier sur une figure

la zone Z des points par lesquels ne passe aucune courbe H_m . **c)** Combien de courbes H_m passent par $B(1, -3)$? par $C(1, -4)$? par $D(1, 2)$? Préciser à chaque fois m .

6. Soit $N(a, -4a^2)$ un point de P' , avec $a \neq 0$. Vérifier que $h_{2a}(x) + 4x^2 = \frac{4x(x-a)^2}{x-2a}$, puis montrer que, de part et d'autre de N , la courbe H_{2a} reste au-dessous de P' : elle *touche* P' en N sans la traverser.

Exercice 62 Problème 2 · Le polygone inscrit dans une parabole ★★★

corrigé p. 144

1^{re} Bac $E(x)$ désigne la partie entière de x . Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = E(x)^2 + (2E(x) + 1)(x - E(x)),$$

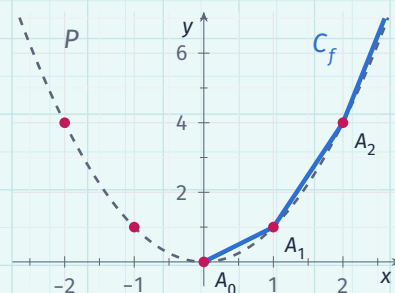
C_f sa courbe et P la parabole d'équation $y = x^2$.

1. **a)** Écrire $f(x)$ sans partie entière sur $[-2, -1[$, $[-1, 0[$, $[0, 1[$, $[1, 2[$ et $[2, 3[$.

b) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $f(x) = (2n+1)x - n(n+1)$ pour tout $x \in [n, n+1[$, et que $f(n) = n^2$.

2. **a)** Montrer que f est continue en tout entier n , puis sur $\mathbb{R}$.

b) Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en n ; interpréter graphiquement.



3. **a)** Montrer que $f(x) - x^2 = (x - E(x))(E(x) + 1 - x)$, puis que $x^2 \leq f(x) \leq x^2 + \frac{1}{4}$ pour tout réel x . **b)** Décrire C_f à l'aide des points $A_n(n, n^2)$ de P . Où l'écart vertical entre C_f et P est-il maximal ?

4. Montrer que $E(-x) = -E(x) - 1$ si $x \notin \mathbb{Z}$, puis que f est paire. Compléter la figure (qui montre C_f sur $[0; 2,6[$) et donner le sens de variation de f .

5. **Discussion graphique.** **a)** Soit $g(x) = f(x) - 3x$. Étudier le sens de variation de g sur chaque intervalle $[n, n+1[$. En déduire, selon le réel m , l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 3x + m$ (pour une valeur de m , il y en a une infinité !). Résoudre $f(x) = 3x$.

b) Pour $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que φ est constante sur $]0, 1[$, puis strictement croissante sur $[1, +\infty[$ avec $\varphi(n) = n$ pour tout entier $n \geq 1$. En déduire, selon m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m|x|$; la résoudre pour $m = 2$ et pour $m = \frac{5}{2}$.

Exercice 63 Problème 3 · Retrouver f grâce à C_f et à $C_{f'}$ ★★★★★

corrigé p. 146

1^{re} Bac Soit $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$, où a, b, c sont des réels. La figure ci-dessous montre, dans un repère orthogonal, la courbe C_f et la courbe Γ de la dérivée f' , sans dire laquelle est laquelle, ainsi que leurs asymptotes (en tirets).

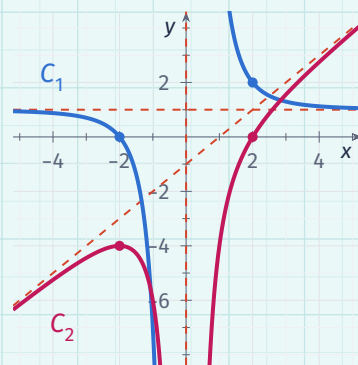
Partie A Lecture graphique, puis calcul de a, b, c .

1. **a)** Laquelle des courbes C_1 (bleue), C_2 (framboise) est C_f ? Justifier soigneusement. **b)** Lire $f(-2)$, $f(2)$, $f'(-2)$, $f'(2)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ et le sens de variation de f .

2. Calculer $f'(x)$. Déterminer a, b, c à l'aide de trois des lectures, puis contrôler les autres. Vérifier que $f(x) = \frac{(x-2)(x^2+x+2)}{x^2}$.

Partie B Étude et tangentes.

3. Calculer les limites de f en 0, en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que la droite $D : y = x - 1$ est asymptote à C_f et que C_f est au-dessous de D . Dresser le tableau de variations de f et résoudre $f(x) = 0$.
4. a) Écrire la tangente T à C_f en $A(2, 0)$. Montrer que $f(x) - (2x - 4) = -\frac{(x+1)(x-2)^2}{x^2}$; en déduire la position de C_f et de T , et le point B où T recoupe C_f .
b) Montrer qu'aucune tangente à C_f ne passe par O , et qu'aucune n'est parallèle à D .

**Partie C** La courbe de $h = \frac{1}{f}$.

5. a) Déterminer D_h et les limites de h en 0, en 2, en $-\infty$ et en $+\infty$; interpréter. b) Déduire de la question 3, sans nouveau calcul de dérivée, le sens de variation et le signe de h ; préciser son extremum local.
6. a) Au voisinage de O , la courbe C_h semble avoir un maximum local en O . Qu'en est-il ? b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^2}$; interpréter à l'aide de la parabole d'équation $y = -\frac{x^2}{4}$. Montrer que la fonction $\tilde{h}$ égale à h sur D_h et telle que $\tilde{h}(0) = 0$ est continue et dérivable en 0.
7. Tracer C_f , D , T et C_h (on fera apparaître le point exclu de C_h).

2

Exponentielle et logarithme**Exercice 64 Problème 4 · Une courbe, sa réciproque et leur lunule ★★★**

corrigé p. 147

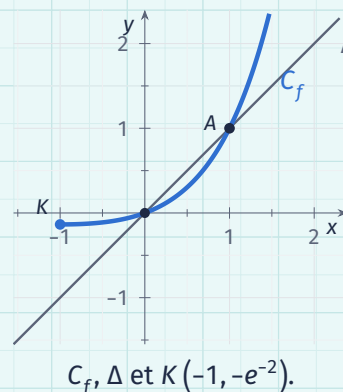
2^e Bac Soit f la fonction définie sur $I = [-1, +\infty[$ par $f(x) = x e^{x-1}$; C_f est sa courbe dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm) et Δ la droite d'équation $y = x$.

Partie A Étude de f et position par rapport à Δ .

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; interpréter. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, dresser le tableau de variations de f et étudier la convexité de C_f .
2. a) Résoudre $f(x) = x$ et étudier le signe de $f(x) - x$ sur I . b) Écrire les tangentes T_O et T_A à C_f en O et en $A(1, 1)$.

Partie B La fonction réciproque.

- Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J à préciser (on ne cherchera pas à exprimer $f^{-1}(x)$).
- Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et en 1 ; calculer $(f^{-1})'(0)$ et $(f^{-1})'(1)$.
 - f^{-1} est-elle dérivable à droite en $-e^{-2}$? Interpréter graphiquement.
- Soit $M(\alpha, \beta)$ un point commun à C_f et à $C_{f^{-1}}$. Montrer que $f(\alpha) = \beta$ et $f(\beta) = \alpha$, puis, grâce à la monotonie de f , que $\alpha = \beta$. En déduire les points communs à C_f et $C_{f^{-1}}$.
- Construire sur la figure $C_{f^{-1}}$ et les images de T_O et T_A par la symétrie d'axe Δ .

**Partie C** Des aires, sans jamais connaître f^{-1} .

- À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^1 x e^{x-1} dx$. En déduire l'aire A_1 du domaine compris entre C_f et Δ .
- Expliquer pourquoi l'aire de la « lunule » comprise entre C_f et $C_{f^{-1}}$ vaut $2A_1$; la donner en cm^2 .
- En découpant le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ par C_f , montrer que $\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f^{-1}(x) dx = 1$, puis calculer $\int_0^1 f^{-1}(x) dx$.

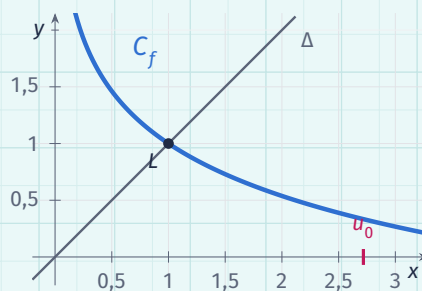
Exercice 65 Problème 5 • Escargot, puis escalier ★★★★★

corrigé p. 149

2^e Bac Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{2}{3} \ln x$, C_f sa courbe et Δ la droite $y = x$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie A Conjecture graphique.

- Sans calcul, construire u_1, u_2, u_3, u_4 sur l'axe des abscisses à l'aide de C_f et de Δ . Quelle forme prend le tracé ? Conjecturer le comportement de (u_n) et la position de ses termes par rapport à 1.

**Partie B** Premiers résultats.

- Étudier f (limites, branches infinies, variations), puis montrer que l'équation $f(x) = x$ a pour unique solution 1.
- Calculer u_1 et u_2 . Montrer que $f(I) \subset I$, où $I = [\frac{1}{3}, e]$, puis que $u_n \in I$ pour tout n .
- Montrer que $u_{2n} > 1$ et $u_{2n+1} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie C L'escalier de $f \circ f$.

On pose $g = f \circ f$ et $v_n = u_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Justifier que g est définie et strictement croissante sur $]0, e^{3/2}[$, et que $g(1) = 1$.

- b)** Montrer que $g'(x) = \frac{4}{9xf(x)}$. Étudier les variations de $x \mapsto xf(x)$ sur I et en déduire que $xf(x) \geq \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$ pour tout $x \in I$, puis que $0 < g'(x) < 1$ sur I . **c)** En déduire le signe de $g(x) - x$ sur I .
6. **a)** Vérifier que $v_{n+1} = g(v_n)$; tracer l'allure de C_g sur I , puis l'escalier de (v_n) à l'aide de C_g et de Δ .
b) Montrer que (v_n) est décroissante et minorée par 1, puis qu'elle converge vers 1. **c)** En déduire que (u_{2n+1}) est croissante, puis que (u_n) converge vers 1.
7. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = -\frac{2}{3}$. Comment ce résultat se lit-il sur l'escargot ?

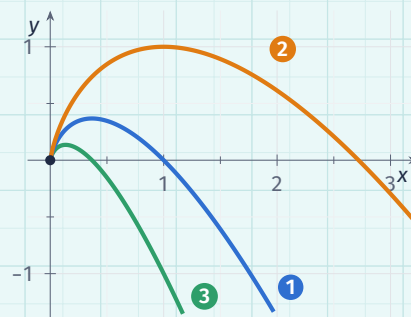
Exercice 66 Problème 6 · Une famille de courbes homothétiques ★★★★★

corrigé p. 150

2^e Bac Pour tout réel k , on définit f_k sur $[0, +\infty[$ par $f_k(x) = x(k - \ln x)$ si $x > 0$ et $f_k(0) = 0$; C_k est sa courbe dans un repère orthonormé, Δ la droite $y = x$ et H la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Partie A Toute la famille d'un coup.

- a)** Étudier la continuité et la dérivabilité de f_k à droite en 0 ; interpréter. **b)** Étudier la branche infinie de C_k .
- a)** Calculer $f_k(x) - f_p(x)$; en déduire les points communs à C_k et C_p ($k \neq p$) et leur position relative.
b) La figure montre C_{-1} , C_0 et C_1 : identifier les courbes 1, 2, 3.
- Dresser le tableau de variations de f_k . Montrer que C_k a un unique sommet S_k ; déterminer le lieu des points S_k quand k décrit $\mathbb{R}$.
- Montrer que C_k recoupe (Ox) en un unique point Z_k , où la tangente T_k a une pente indépendante de k .



Partie B L'explication : une homothétie.

5. **a)** Soit $x > 0$ et y réels. Montrer que $M(x, y) \in C_0$ si et seulement si $M'(e^k x, e^k y) \in C_k$. En déduire que C_k est l'image de C_0 par une homothétie h_k que l'on précisera. **b)** Retrouver ainsi, sans calcul, les résultats des questions 3 et 4.

Partie C Points communs avec H , puis une aire.

6. **a)** Montrer que C_k et H ont un point commun d'abscisse $x > 0$ si et seulement si $k = \psi(x)$, où $\psi(x) = \ln x + \frac{1}{x^2}$.
b) Étudier ψ et discuter, selon k , le nombre de points communs à C_k et H ; on notera k_0 la valeur « critique ». **c)** Montrer que C_{k_0} et H ont la même tangente en leur point commun, et que C_{k_0} est au-dessous de H . **d)** Vérifier que H passe par le sommet S_1 .
7. **a)** Vérifier que $F_k(x) = \frac{x^2}{4}(2k + 1 - 2 \ln x)$ est une primitive de f_k sur $]0, +\infty[$.
b) Calculer l'aire A_k du domaine limité par C_k , l'axe (Ox) et les droites $x = e^{k-1}$ et $x = e^k$. Montrer que $A_k = e^{2k} A_0$, et expliquer ce résultat à l'aide de l'homothétie h_k .

3

Corrigés des grands problèmes

■ Corrigé de l'exercice 61

Partie A

- a) Pour $x \neq m$: $m^2 + \frac{m^3}{x-m} = \frac{m^2(x-m) + m^3}{x-m} = \frac{m^2x}{x-m} = h_m(x)$.

b) Si $M(x, y)$ est sur l'hyperbole $y = \frac{m^3}{x}$, son image par la translation de vecteur $\vec{u}(m; m^2)$ est $M'(x+m, y+m^2)$, et $y+m^2 = m^2 + \frac{m^3}{(x+m)-m} = h_m(x+m)$: H_m est l'image de $y = \frac{m^3}{x}$ par la translation de vecteur $\vec{u}(m; m^2)$. Centre : $\Omega_m(m, m^2)$; asymptotes : $x = m$ et $y = m^2$. Si $m > 0$, alors $m^3 > 0$ et h_m est décroissante sur $]-\infty, m[$ et sur $]m, +\infty[$; si $m < 0$, elle est croissante sur chacun de ces intervalles.
- a) $h_m(0) = \frac{0}{-m} = 0$: $O \in H_m$ pour tout m . Pour $x \notin \{-1, 1\}$: $\frac{x}{x-1} = \frac{x}{x+1} \iff x(x+1) = x(x-1) \iff 2x = 0$. Donc $H_1 \cap H_{-1} = \{O\}$ et O est le seul point commun à toutes les courbes. (Attention : deux courbes H_m et H_p avec $p \neq -m$ se recoupent au point d'abscisse $\frac{mp}{m+p}$; ainsi H_1 et H_2 se recoupent en $(\frac{2}{3}, -2)$.)

b) $\Omega_m(m, m^2)$ est sur la parabole $P : y = x^2$; réciproquement, tout point (t, t^2) avec $t \neq 0$ est le centre Ω_t . Le lieu des centres est la parabole P privée de O .

c) $h_{-m}(-x) = \frac{m^2(-x)}{-x+m} = \frac{m^2x}{x-m} = h_m(x)$: $M(x, y) \in H_m \iff M'(-x, y) \in H_{-m}$, et M' est le symétrique de M par rapport à (Oy) .
- Les asymptotes se coupent au centre : ❶ a pour centre $(2, 4)$, donc $m = 2$; ❷ a pour centre $(-1, 1)$: $m = -1$; ❸ a pour centre $(1, 1)$: $m = 1$. Contrôles : ❶ et ❸ décroissent ($m > 0$), ❷ croît ($m < 0$), et ❷, ❸ sont symétriques par rapport à (Oy) .

Partie B

- $M \in H_m \iff a \neq m$ et $b = \frac{m^2a}{a-m} \iff a \neq m$ et $b(a-m) = m^2a \iff a \neq m$ et $am^2 + bm - ab = 0$, avec $m \neq 0$ (H_0 n'existe pas). Si $m = a$ vérifiait l'équation, on aurait $a^3 + ab - ab = a^3 = 0$, impossible car $a \neq 0$: la condition $m \neq a$ est automatique.

5. a) Équation du second degré en m ($a \neq 0$), de discriminant

$$\Delta = b^2 + 4a^2b = b(b + 4a^2),$$

et dont le produit des racines vaut $\frac{-ab}{a} = -b$.

• $b > 0$ ou $b < -4a^2$: $\Delta > 0$, deux racines, non nulles (produit $-b \neq 0$) : **deux courbes**.

• $b = -4a^2$ (point de P') : racine double $m = -\frac{b}{2a} = 2a$: **une courbe**, H_{2a} .

• $-4a^2 < b < 0$: $\Delta < 0$: **aucune**.

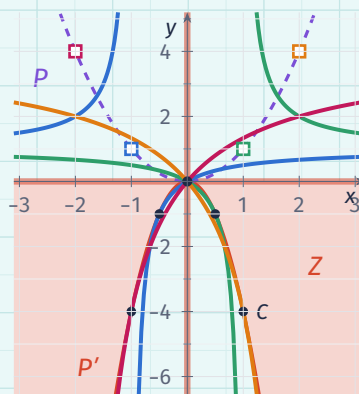
• $b = 0$: l'équation devient $am^2 = 0$, soit $m = 0$, exclu : **aucune**.

Sur (Oy) : $h_m(0) = 0$, donc seul O est atteint ; les points $(0, b)$ avec $b \neq 0$ ne sont sur aucune courbe.

b) Z = la bande comprise entre P' (exclue) et (Ox) (incluse), plus l'axe (Oy) , privés de O (en rouge sur la figure). Les courbes H_m contournent cette zone sans jamais y entrer.

c) $B(1, -3)$: $-4 < -3 < 0$, **aucune** courbe. $C(1, -4)$ est sur P' : **une seule**, $m = 2$ (et $h_2(1) = \frac{4}{-1} = -4$).

$D(1, 2)$: $m^2 + 2m - 2 = 0$, d'où **deux** courbes, $m = -1 \pm \sqrt{3}$.



H_1 (vert), H_{-1} (bleu), H_2 (orange), H_{-2} (framboise) ; centres (carrés) sur P ; chaque courbe touche P' (points noirs) sans entrer dans Z .

6. $h_{2a}(x) + 4x^2 = \frac{4a^2x + 4x^2(x - 2a)}{x - 2a} = \frac{4x(x^2 - 2ax + a^2)}{x - 2a} = \frac{4x(x - a)^2}{x - 2a}$. Cette quantité s'annule en $x = 0$ et en $x = a$: H_{2a} et P' se rencontrent en O et en N . Pour x strictement compris entre 0 et $2a$, les nombres x et $x - 2a$ sont de signes contraires : $h_{2a}(x) + 4x^2 < 0$ pour $x \neq a$ voisin de a . H_{2a} **reste au-dessous de P' des deux côtés de N : elle la touche sans la traverser** (le facteur $(x - a)^2$ ne change pas de signe).

★ Astuce de concours : l'enveloppe d'une famille

Le bord de la zone « balayée » par une famille de courbes est une courbe que chacune *touche* : on la trouve en annulant le discriminant de l'équation en m ($\Delta = 0 \iff b = -4a^2$). Ici, H_m touche P' au point $(\frac{m}{2}, -m^2)$.

■ Corrigé de l'exercice 62

1. a) Sur $[n, n + 1[$, $E(x) = n$ et $f(x) = n^2 + (2n + 1)(x - n)$:

intervalle	$[-2, -1[$	$[-1, 0[$	$[0, 1[$	$[1, 2[$	$[2, 3[$
$f(x)$	$-3x - 2$	$-x$	x	$3x - 2$	$5x - 6$

b) Pour $x \in [n, n + 1[$: $f(x) = n^2 + (2n + 1)x - 2n^2 - n = (2n + 1)x - n(n + 1)$, et $f(n) = n^2 + 0 = n^2$.

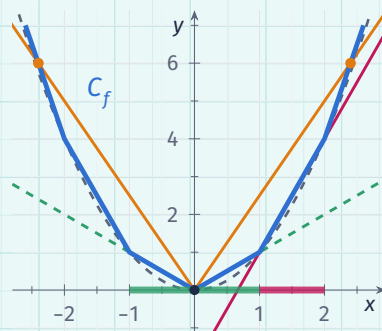
2. a) À droite de n , f est affine sur $[n, n + 1[$, donc $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = f(n)$. À gauche, pour $x \in [n - 1, n[$: $f(x) = (2n - 1)x - (n - 1)n \xrightarrow{x \rightarrow n^-} (2n - 1)n - n^2 + n = n^2 = f(n)$. Donc f **est continue en tout entier**, et aussi sur chaque $]n, n + 1[$ où elle est affine : **f est continue sur $\mathbb{R}$** .

- b)** $f'_d(n) = 2n + 1$ (pente du segment de droite) et $f'_g(n) = 2n - 1$ (pente du segment de gauche) : f n'est pas dérivable en n . Le point $A_n(n, n^2)$ est un **point anguleux**, avec deux demi-tangentes de pentes $2n - 1$ et $2n + 1$; la tangente à P en A_n , de pente $2n$, passe « entre les deux ».
3. **a)** Posons $n = E(x)$ et $t = x - n \in [0, 1[$. Alors $x^2 = n^2 + 2nt + t^2$ et $f(x) = n^2 + (2n + 1)t$, donc $f(x) - x^2 = t - t^2 = t(1 - t) = (x - E(x))(E(x) + 1 - x)$. Comme $t \in [0, 1[$, $t(1 - t) \geq 0$ et $t(1 - t) = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$: $x^2 \leq f(x) \leq x^2 + \frac{1}{4}$.
- b)** Sur $[n, n + 1]$, C_f est le segment $[A_n A_{n+1}]$ (il passe par A_n et A_{n+1}) : **C_f est la ligne brisée inscrite dans P de sommets $A_n(n, n^2)$** , au-dessus de P (corde d'une courbe convexe). L'écart vaut 0 aux sommets et atteint son maximum $\frac{1}{4}$ pour $t = \frac{1}{2}$, aux milieux $x = n + \frac{1}{2}$ des cordes.
4. Si $n < x < n + 1$, alors $-n - 1 < -x < -n$, d'où $E(-x) = -n - 1 = -E(x) - 1$ et $t(-x) = -x + n + 1 = 1 - t(x)$. Donc $f(-x) = x^2 + (1 - t)t = f(x)$; et $f(-n) = n^2 = f(n)$. **f est paire** : C_f est symétrique par rapport à (Oy) . Les pentes $2n + 1$ sont positives pour $n \geq 0$, négatives pour $n \leq -1$: f décroît sur $]-\infty, 0]$ et croît sur $[0, +\infty[$.

5. **a)** g est continue et, sur $[n, n + 1]$, affine de pente $(2n + 1) - 3 = 2(n - 1)$: négative si $n \leq 0$, nulle si $n = 1$, positive si $n \geq 2$. Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$, **constante** égale à $g(1) = -2$ sur $[1, 2]$, strictement croissante sur $[2, +\infty[$; et $g(x) \geq x^2 - 3x$ tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$. D'où, pour $f(x) = 3x + m \iff g(x) = m$:

- $m < -2$: aucune solution ;
- $m = -2$: **$S = [1, 2]$, une infinité de solutions** : la droite $y = 3x - 2$ porte le côté $[A_1 A_2]$;
- $m > -2$: exactement deux solutions, l'une < 1 , l'autre > 2 .

$f(x) = 3x$ ($m = 0$) : sur $[0, 1[$, $x = 3x$ donne $x = 0$; sur $[3, 4[$, $7x - 12 = 3x$ donne $x = 3$: **$S = \{0, 3\}$** (la corde $[A_0 A_3]$ de P).



C_f (bleu), P (tirets), $y = 3x - 2$ (framboise), $y = |x|$ (vert) et $y = \frac{5}{2}|x|$ (orange). En couleur sur (Ox) : les intervalles solutions.

b) Sur $]0, 1]$, $f(x) = x$ (et $f(1) = 1$), donc $\varphi(x) = 1$. Sur $[n, n + 1]$ ($n \geq 1$) : $\varphi(x) = 2n + 1 - \frac{n(n + 1)}{x}$, strictement croissante, avec $\varphi(n) = n$ et $\varphi(n + 1) = n + 1$: φ est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, de 1 à $+\infty$. L'équation $f(x) = m|x|$ a toujours la solution 0 ; pour $x > 0$, elle équivaut à $\varphi(x) = m$, qui a, si $m > 1$, une unique solution $x_m > 1$; pour $x < 0$, on conclut par parité. Bilan :

m	$m < 1$	$m = 1$	$m > 1$
solutions de $f(x) = m x $	$\{0\}$	$[-1, 1]$ (infinité)	$\{-x_m, 0, x_m\}$: trois
$m = 2$: $\varphi(2) = 2$, donc $S = \{-2, 0, 2\}$ (la droite $y = 2x$ passe par le sommet A_2). $m = \frac{5}{2}$: sur $[2, 3]$, $5 - \frac{6}{x} = \frac{5}{2}$ donne $x = \frac{12}{5}$, donc $S = \{-\frac{12}{5}, 0, \frac{12}{5}\}$; et $f(\frac{12}{5}) = 6$.			

■ Corrigé de l'exercice 63

Partie A

1. a) C_1 s'annule en -2 , là où C_2 a une tangente horizontale ; C_1 est positive sur $]-\infty, -2[$ et sur $]0, +\infty[$, où C_2 monte, et négative sur $]-2, 0[$, où C_2 descend. L'inverse est impossible : C_2 est positive sur $]2, +\infty[$ alors que C_1 y descend ; et C_2 s'annule en 2 sans que C_1 ait une tangente horizontale. Donc $C_2 = C_f$ et $C_1 = \Gamma$.
- b) $f(-2) = -4$, $f(2) = 0$, $f'(-2) = 0$, $f'(2) = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$. f croît sur $]-\infty, -2]$ et sur $]0, +\infty[$, décroît sur $]-2, 0[$.

Attention, piège ! : une même valeur, deux lectures

$f'(2) = 2$ se lit comme une **ordonnée** sur Γ (le point $(2; 2)$) et comme une **pente** sur C_f (la tangente en A). Ne pas confondre avec la pente de Γ en 2 , qui vaut $f''(2)$.

2. $f'(x) = a - \frac{2c}{x^3}$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = a = 1$; $f'(-2) = a + \frac{c}{4} = 0$: $c = -4$; $f(2) = 2a + b + \frac{c}{4} = 0$: $b = -1$. Donc $a = 1, b = -1, c = -4$. Contrôles : $f(-2) = -2 - 1 - 1 = -4$ ✓, $f'(2) = 1 + 1 = 2$ ✓. Et $f(x) = x - 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x^2 + x + 2)}{x^2}$ (on développe : $x^3 + x^2 + 2x - 2x^2 - 2x - 4$).

Partie B

3. En 0 (des deux côtés) : $-\frac{4}{x^2} \rightarrow -\infty$, donc $f \rightarrow -\infty$: **asymptote** $x = 0$, la courbe plonge des deux côtés. En $\pm\infty$: $f(x) \rightarrow \pm\infty$ et $f(x) - (x - 1) = -\frac{4}{x^2} \rightarrow 0$, avec $-\frac{4}{x^2} < 0$: **D est asymptote et C_f est au-dessous de D**. $f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x^3}$, avec $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$. $f(x) = 0 \iff x = 2$, car $x^2 + x + 2 > 0$ (discriminant -7).

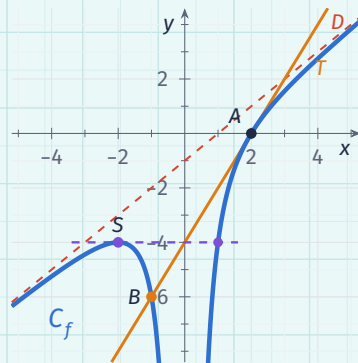
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-4	$-\infty$	0	$+\infty$

4. a) $f(2) = 0$, $f'(2) = 2$: $T : y = 2x - 4$. Puis

$$f(x) - (2x - 4) = -\frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = -\frac{(x+1)(x-2)^2}{x^2},$$

du signe de $-(x+1)$: C_f est au-dessus de T sur $]-\infty, -1[$, au-dessous sur $]-1, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$. Le facteur $(x-2)^2$ traduit le contact en A ; **T recoupe C_f en $B(-1, -6)$.**

b) La tangente au point d'abscisse α passe par O si et seulement si $f(\alpha) = \alpha f'(\alpha)$, soit $\alpha - 1 - \frac{4}{\alpha^2} = \alpha + \frac{8}{\alpha^2}$, c'est-à-dire $-1 = \frac{12}{\alpha^2}$: **impossible**. Et $f'(\alpha) = 1 \iff \frac{8}{\alpha^3} = 0$: impossible aussi ; **aucune tangente ne passe par O , aucune n'est parallèle à D .**



T recoupe C_f en B ; la tangente horizontale en $S(-2, -4)$ (tirets violets) la recoupe en $(1, -4)$.

Partie C

5. a) h est définie si $x \neq 0$ et $f(x) \neq 0$:

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, \text{ et } h(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x^2+x+2)}.$$

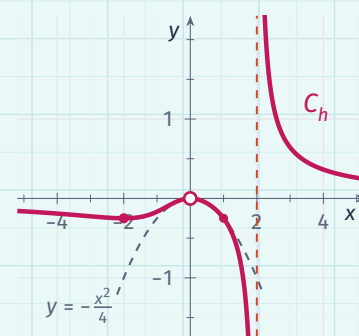
En 0 , $f \rightarrow -\infty$ donc $h \rightarrow 0$; en 2 , $f \rightarrow 0^-$ à gauche et 0^+ à droite, donc $h \rightarrow -\infty$ puis $+\infty$: **asymptote** $x = 2$; en $\pm\infty$, $h \rightarrow 0$: **asymptote** $y = 0$.

b) $h' = -\frac{f'}{f^2}$ a le signe contraire de f' : h décroît sur $]-\infty, -2]$, croît sur $[-2, 0[$, décroît sur $]0, 2[$ et sur $]2, +\infty[$. h a le signe de f : $h < 0$ sur $]-\infty, 0[\cup]0, 2[$, $h > 0$ sur $]2, +\infty[$. Minimum local $h(-2) = \frac{1}{f(-2)} = \boxed{-\frac{1}{4}}$ (valeur reprise en $x = 1$, car $f(1) = -4$).

6. a) À gauche de O , h croît vers 0 ; à droite, elle décroît depuis 0 : on croirait un maximum local en O . Mais $0 \notin D_h$: O n'est pas un point de C_h : c'est un « trou » (cercle vide), et h n'a pas de maximum.

b) $\frac{h(x)}{x^2} = \frac{1}{x^3 - x^2 - 4} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{4}$: près de O , $h(x) \approx -\frac{x^2}{4}$, et C_h épouse la parabole $y = -\frac{x^2}{4}$ (tirets). Avec $\tilde{h}(0) = 0$: $\tilde{h}(x) \rightarrow 0 = \tilde{h}(0)$ (continuité) et $\frac{\tilde{h}(x) - \tilde{h}(0)}{x} = x \cdot \frac{h(x)}{x^2} \rightarrow 0$: $\tilde{h}$ est dérivable en 0 , $\tilde{h}'(0) = 0$ (tangente horizontale).

7. Figures ci-dessus (on a placé le point exclu O de C_h par un cercle vide).



C_h : un trou en O (tangente horizontale « fantôme »), une asymptote $x = 2$.

■ Corrigé de l'exercice 64

Partie A

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = e^{x-1} \rightarrow +\infty$: **branche parabolique de direction** (Oy) . $f'(x) = (1+x)e^{x-1} \geq 0$ sur I , nul seulement en -1 : f est strictement croissante, de $f(-1) = -e^{-2}$ à $+\infty$; tangente horizontale en $K(-1, -e^{-2})$. $f''(x) = (2+x)e^{x-1} > 0$ sur I : C_f est convexe.

2. a) $f(x) - x = x(e^{x-1} - 1)$, et $e^{x-1} - 1$ a le signe de $x - 1$:

x	-1	0	1	$+\infty$
x	-	0	+	+
$e^{x-1} - 1$	-	-	0	+
$f(x) - x$	+	0	-	+

$f(x) = x \iff x \in \{0, 1\}$; C_f est au-dessous de Δ sur $]0, 1[$, au-dessus sur $[-1, 0[\cup]1, +\infty[$.

b) $f(0) = 0$, $f'(0) = e^{-1}$: $T_O : y = \frac{x}{e}$. $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$: $T_A : y = 2x - 1$ (C_f , convexe, est au-dessus de ses tangentes).

Partie B

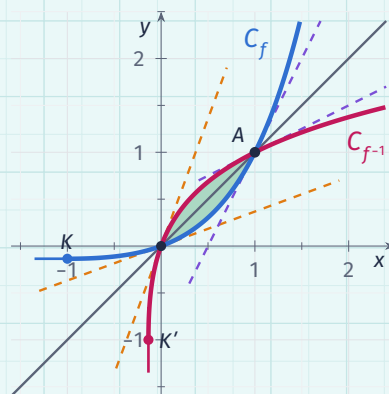
3. f est continue et strictement croissante sur I : c'est une bijection de I sur $J = f(I) = [-e^{-2}, +\infty[$.

4. a) $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{e} \neq 0$: f^{-1} est dérivable en 0 et $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = e$. De même $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$: $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$.

b) $f'(-1) = 0$: pour $y \rightarrow (-e^{-2})^+$, on pose $x = f^{-1}(y) \rightarrow -1^+$ et $\frac{f^{-1}(y) + 1}{y + e^{-2}} = \frac{x + 1}{f(x) - f(-1)} \rightarrow +\infty$ (le quotient inverse tend vers $f'(-1) = 0^+$). f^{-1} n'est pas dérivable à droite en $-e^{-2}$: $C_{f^{-1}}$ a une **demi-tangente verticale en $K'(-e^{-2}, -1)$** , image de la tangente horizontale en K .

5. $M \in C_f$: $\beta = f(\alpha)$; $M \in C_{f^{-1}}$: $\beta = f^{-1}(\alpha)$, soit $f(\beta) = \alpha$. Si $\alpha < \beta$, alors $f(\alpha) < f(\beta)$, c'est-à-dire $\beta < \alpha$: absurde ; de même $\alpha > \beta$ est absurde. Donc $\alpha = \beta$ et $f(\alpha) = \alpha$: $C_f \cap C_{f^{-1}} = \{O, A\}$, sur Δ .

6. $C_{f^{-1}}$ est la symétrique de C_f par rapport à Δ (framboise) ; les images des tangentes sont T'_O : $y = ex$ et T'_A : $y = \frac{x+1}{2}$ (pentés inverses).



La lunule (verte) et les tangentes en O (orange) et en A (violet), avec leurs images.

Partie C

7. Par parties ($u = x$, $v' = e^{x-1}$) :

$$\int_0^1 x e^{x-1} dx = \left[x e^{x-1} \right]_0^1 - \int_0^1 e^{x-1} dx = 1 - \left(1 - \frac{1}{e} \right),$$

$$\text{soit } \int_0^1 x e^{x-1} dx = \frac{1}{e}. \text{ Sur } [0, 1], f(x) \leq x : A_1 =$$

$$\int_0^1 (x - f(x)) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \text{ u.a. } \approx 0,132 \text{ u.a.}$$

8. La symétrie d'axe Δ conserve les aires et échange C_f et $C_{f^{-1}}$; Δ coupe la lunule en deux parties symétriques, dont l'une est le domaine de A_1 . Donc $A = 2A_1 = \left[1 - \frac{2}{e} \right] \text{ u.a. Avec } 1 \text{ u.a.} = 4 \text{ cm}^2 :$

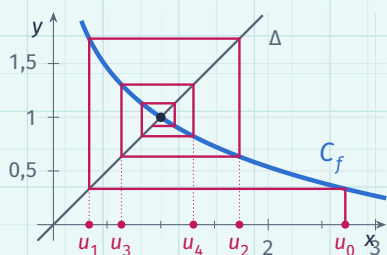
$$A = 4 - \frac{8}{e} \approx 1,06 \text{ cm}^2.$$

9. C_f joint O à A et découpe le carré unité en deux parties : sous C_f (aire $\int_0^1 f$), et entre C_f et (Oy). La symétrie d'axe Δ envoie cette seconde partie sur le domaine sous $C_{f^{-1}}$, d'aire $\int_0^1 f^{-1}$. Donc $\int_0^1 f + \int_0^1 f^{-1} = 1$, et $\int_0^1 f^{-1}(x) dx = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,632$ — sans connaître f^{-1} ! (Contrôle : $\int_0^1 (f^{-1} - f) = 1 - \frac{2}{e} = A$.)

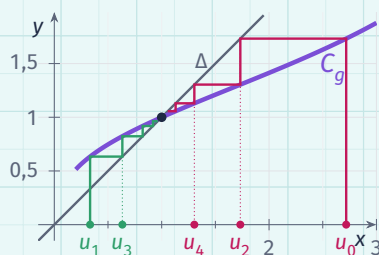
★ **Astuce de concours : l'intégrale d'une réciproque**

Pour f continue strictement croissante : $\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy = b f(b) - a f(a)$. C'est une simple découpe de rectangle, lue sur le dessin.

■ Corrigé de l'exercice 65



L'escargot de (u_n) autour de $L(1, 1)$ (Partie A).



Sur $C_{f,f}$: escalier descendant des u_{2n} (framboise), montant des u_{2n+1} (vert) (Partie C).

Partie A

1. On monte de u_0 à C_f , on se reporte horizontalement sur Δ , on redescend sur (Ox) : on lit u_1 , puis on recommence. Le tracé **s'enroule autour de $L(1, 1)$** : c'est un **escargot**. Conjecture : (u_n) converge vers 1, ses termes étant alternativement au-dessus (u_0, u_2, u_4) et au-dessous (u_1, u_3) de 1.

Partie B

2. $\lim_{0^+} f = +\infty$ (asymptote $x = 0$) ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$: branche parabolique de direction (Ox) . $f'(x) = -\frac{2}{3x} < 0$: f est strictement décroissante. $\varphi(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante et continue, et $\varphi(1) = 0$: **1 est l'unique solution de $f(x) = x$** .

3. $u_1 = f(e) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ et $u_2 = f\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{2}{3} \ln 3 \approx 1,732$. f étant décroissante, $f(I) = \left[f(e), f\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \left[\frac{1}{3}, 1 + \frac{2}{3} \ln 3\right] \subset I$ (car $\ln 3 < \frac{3}{2}$, donc $1 + \frac{2}{3} \ln 3 < 2 < e$). Par récurrence : $u_0 = e \in I$, et si $u_n \in I$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f(I) \subset I$.

4. Récurrence : $u_0 = e > 1$. Si $u_{2n} > 1$, alors $u_{2n+1} = f(u_{2n}) < f(1) = 1$ (f strictement décroissante), puis $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) > f(1) = 1$. **Une fonction décroissante fait « sauter » la suite d'un côté à l'autre du point fixe.**

Partie C

5. a) $f(x) > 0 \iff \ln x < \frac{3}{2} \iff x < e^{3/2}$: pour $x \in]0, e^{3/2}[$, $f(x) \in]0, +\infty[$ et $g(x) = f(f(x)) = 1 - \frac{2}{3} \ln\left(1 - \frac{2}{3} \ln x\right)$ existe. Composée de deux fonctions strictement décroissantes, g est **strictement croissante** ; $g(1) = f(1) = 1$.

b) $g'(x) = f'(f(x))f'(x) = \left(-\frac{2}{3f(x)}\right)\left(-\frac{2}{3x}\right) = \frac{4}{9xf(x)}$. Soit $\theta(x) = xf(x)$: $\theta'(x) = f(x) + xf'(x) = \frac{1-2\ln x}{3}$, positif sur $\left[\frac{1}{3}, \sqrt{e}\right]$, négatif sur $[\sqrt{e}, e]$. Le minimum de θ sur I est donc atteint en une borne : $\theta\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \ln 3 \approx 0,577$ et $\theta(e) = \frac{e}{3} \approx 0,906$; ainsi $xf(x) \geq \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$. Donc $0 < g'(x) \leq \frac{4}{3+2\ln 3} \approx 0,77 < 1$ sur I .

c) $\psi(x) = g(x) - x$ a pour dérivée $g'(x) - 1 < 0$: ψ est strictement décroissante sur I , et $\psi(1) = 0$. Donc $g(x) > x$ sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ et $g(x) < x$ sur $]1, e]$.

6. a) $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(f(u_{2n})) = g(v_n)$; g étant croissante, le tracé est un **escalier**.

b) Par récurrence, $1 < v_n \leq e$ (car $1 = g(1) < g(v_n) \leq g(e) = u_2 < e$), et $v_{n+1} - v_n = \psi(v_n) < 0$: (v_n) décroît et converge vers $\ell \in [1, e]$; g continue et $g([1, e]) \subset [1, e]$ donnent $g(\ell) = \ell$, d'où **$\ell = 1$** .

c) $u_{2n+1} = f(v_n)$ avec f et (v_n) décroissantes : (u_{2n+1}) est **croissante**, et $u_{2n+1} \rightarrow f(1) = 1$ (f continue). Les deux suites extraites tendent vers 1 : **$\lim u_n = 1$** .

7. D'après 4, $u_n \neq 1$ pour tout n . Comme $u_n \rightarrow 1$ et f est dérivable en 1 :

$$\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \frac{f(u_n) - f(1)}{u_n - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(1) = \boxed{-\frac{2}{3}}.$$

Lecture : le rapport est **négatif** (on change de côté à chaque pas) et voisin de $\frac{2}{3}$ en valeur absolue (l'écart à 1 est à peu près multiplié par $\frac{2}{3}$ à chaque pas) : **l'escargot se resserre d'un facteur $\frac{2}{3}$ environ à chaque demi-tour**. La convergence est lente.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2,718	0,333	1,732	0,634	1,304	0,823	1,130	0,919	1,057
$\frac{u_{n+1}-1}{u_n-1}$	-0,39	-1,10	-0,50	-0,83	-0,58	-0,73	-0,63	-0,70	

■ Corrigé de l'exercice 66

Partie A

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_k(x) = 0 = f_k(0)$: f_k est **continue à droite en 0**. Et $\frac{f_k(x) - f_k(0)}{x} = k - \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$: f_k n'est pas dérivable à droite en 0 ; C_k **a une demi-tangente verticale en 0**.

b) $k - \ln x \rightarrow -\infty$, donc $f_k(x) \rightarrow -\infty$ et $\frac{f_k(x)}{x} = k - \ln x \rightarrow -\infty$: branche parabolique de direction (Oy) .
- a) $f_k(x) - f_p(x) = (k - p)x$, non nul pour $x > 0$: **0 est le seul point commun** à C_k et C_p . Si $k > p$, C_k est au-dessus de C_p sur $]0, +\infty[$: les courbes s'empilent dans l'ordre des k .

b) La plus haute est C_1 , la plus basse C_{-1} : **2** = C_1 , **1** = C_0 , **3** = C_{-1} .

- $f'_k(x) = k - \ln x - 1 > 0 \iff x < e^{k-1}$:

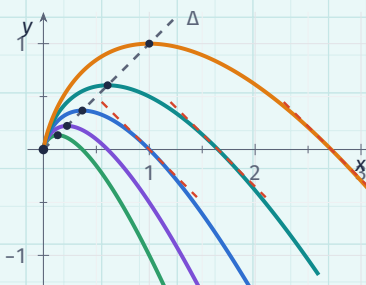
x	0	e^{k-1}	e^k	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	0	-	
$f_k(x)$	0	e^{k-1}	0	$-\infty$

Le sommet est $S_k(e^{k-1}, e^{k-1})$: il est sur Δ . Quand k décrit $\mathbb{R}$, e^{k-1} décrit $]0, +\infty[$ (chaque $t > 0$ est atteint pour $k = 1 + \ln t$) : **le lieu des sommets est la demi-droite ouverte $\{(t, t); t > 0\}$ de Δ** .

- $f'_k(x) = 0$ avec $x > 0 \iff \ln x = k$: $Z_k(e^k, 0)$, et $f'_k(e^k) = k - k - 1 = -1$: $T_k : y = -x + e^k$. Toutes les tangentes T_k sont **parallèles** (et perpendiculaires à Δ).

Partie B

- a) Pour $x > 0$: $f_k(e^k x) = e^k x (k - k - \ln x) = e^k (-x \ln x) = e^k f_0(x)$. Donc $y = f_0(x) \iff e^k y = f_k(e^k x)$, c'est-à-dire $M(x, y) \in C_0 \iff M'(e^k x, e^k y) \in C_k$; et $x \mapsto e^k x$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui-même. Comme $O\vec{M}' = e^k O\vec{M}$: **C_k est l'image de C_0 par l'homothétie h_k de centre O et de rapport e^k** .



$k = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ (vert, violet, bleu, saumon, orange) ; sommets sur Δ , tangentes parallèles en Z_k .

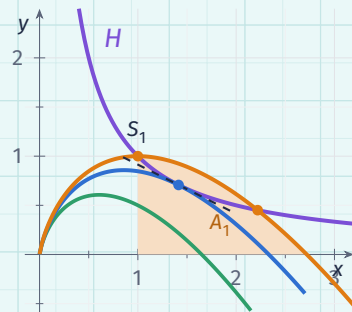
b) h_k envoie le sommet $S_0\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ sur S_k , qui reste donc sur la droite $(OS_0) = \Delta$; elle envoie $Z_0(1, 0)$ sur $Z_k(e^k, 0)$ et transforme la tangente T_0 (pente -1) en une droite *parallèle* : c'est T_k . Une homothétie de centre O conserve les directions : tout s'explique sans calcul.

Partie C

6. a) Pour $x > 0$: $x(k - \ln x) = \frac{1}{x} \iff k - \ln x = \frac{1}{x^2} \iff k = \psi(x)$. De plus $f_k(x) - \frac{1}{x} = x(k - \psi(x))$.

b) $\psi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{x^2-2}{x^3}$; $\psi(x) = \frac{1+x^2 \ln x}{x^2} \rightarrow +\infty$ en 0^+ et $\psi \rightarrow +\infty$ en $+\infty$; minimum $\psi(\sqrt{2}) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$:

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$\psi'(x)$		- 0 +	
$\psi(x)$	$+\infty$	k_0	$+\infty$



H (violet) ; $C_{1/2}$ (vert) : aucun point commun ; C_{k_0} (bleu) : contact ; C_1 (orange) : deux points, et l'aire A_1 .

Avec $k_0 = \frac{1+\ln 2}{2} \approx 0,847$: si $k < k_0$, **aucun** point commun ; si $k = k_0$, **un seul** ($x = \sqrt{2}$) ; si $k > k_0$, **deux** (l'un dans $]0, \sqrt{2}[$, l'autre dans $]\sqrt{2}, +\infty[$).

c) Le point commun est $T\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. $f'_{k_0}(\sqrt{2}) = k_0 - 1 - \ln \sqrt{2} = \frac{1+\ln 2}{2} - 1 - \frac{\ln 2}{2} = -\frac{1}{2}$, et la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ en $\sqrt{2}$ vaut $-\frac{1}{2}$: **même tangente** $y = -\frac{x}{2} + \sqrt{2}$. Et $f_{k_0}(x) - \frac{1}{x} = x(k_0 - \psi(x)) \leq 0$: C_{k_0} est au-dessous de H , qu'elle touche en T . **d)** $\psi(1) = 0 + 1 = 1$: pour $k = 1$, l'abscisse 1 convient, et $S_1(1, 1) \in H$; le second point a pour abscisse $\approx 2,22$.

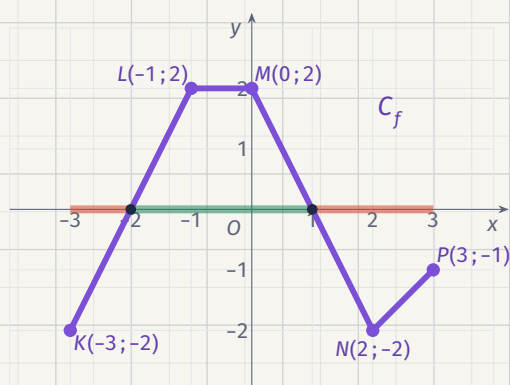
6. a) $F'_k(x) = \frac{x}{2}(2k+1-2\ln x) + \frac{x^2}{4}\left(-\frac{2}{x}\right) = \frac{x}{2}(2k-2\ln x) = x(k-\ln x) = f_k(x)$.

b) $f_k \geq 0$ sur $[e^{k-1}, e^k]$: $A_k = F_k(e^k) - F_k(e^{k-1}) = \frac{e^{2k}}{4}(1) - \frac{e^{2k-2}}{4}(3) = e^{2k} \frac{e^2-3}{4e^2}$ u.a. Pour $k = 0$: $A_0 = \frac{e^2-3}{4e^2} \approx 0,148$, donc $A_k = e^{2k} A_0$ ($A_1 \approx 1,10$). Explication : h_k envoie le domaine de A_0 (entre $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$) sur celui de A_k (entre $x = e^{k-1}$ et $x = e^k$), et une homothétie de rapport e^k multiplie les aires par $(e^k)^2 = e^{2k}$.

1

La galerie des transformations

Une seule courbe de départ, dix-huit façons de la transformer. Dans chaque vignette, C_f est en **gris pointillé**, la nouvelle courbe C en couleur, et le **point témoin** $L(-1; 2)$ est suivi par une flèche jusqu'à son image L' . Sous la figure : la **règle du point**, à apprendre par cœur.



Carte d'identité de f

$D_f = [-3; 3]$; cinq sommets K, L, M, N, P à **coordonnées entières** : C_f est formée de quatre segments.

$f(x) = 2x + 4$ sur $[-3; -1]$, $f(x) = 2$ sur $[-1; 0]$,
 $f(x) = 2 - 2x$ sur $[0; 2]$, $f(x) = x - 4$ sur $[2; 3]$.

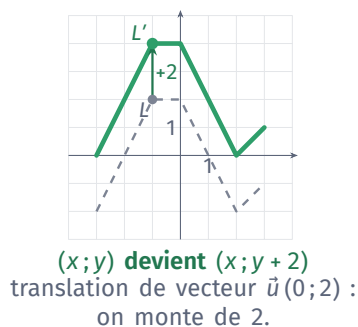
x	-3	-1	0	2	3
$f(x)$	-2	2	2	-2	-1

Signe : $f(x) \geq 0 \iff x \in [-2; 1]$ (en vert sur l'axe) ;
 $f(x) < 0$ sur $[-3; -2] \cup [1; 3]$.

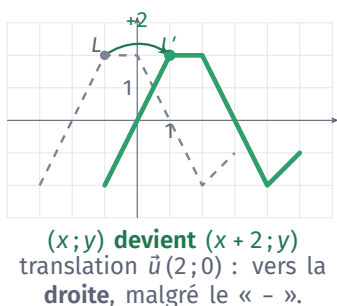
Maximum 2 (atteint sur tout $[-1; 0]$), minimum -2 (en -3 et en 2).

La règle d'or. Dans la parenthèse (on touche à x) : effet **horizontal** et à l'envers ; $f(x - 2)$ part à droite, $f(2x)$ divise les abscisses par 2. **Hors de la parenthèse** (on touche à y) : effet **vertical** et à l'endroit ; $f(x) + 2$ monte de 2, $2f(x)$ double les ordonnées. **En cas de doute** : exprimer X et Y à l'aide d'un point $(x; y)$ de C_f .

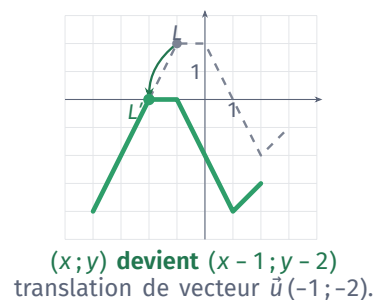
1 $C : y = f(x) + 2$



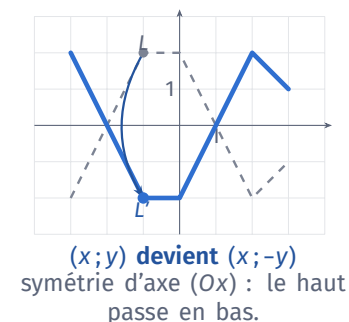
2 $C : y = f(x - 2)$



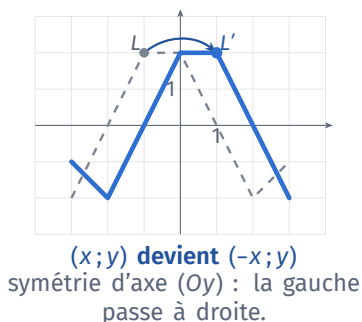
3 $C : y = f(x + 1) - 2$



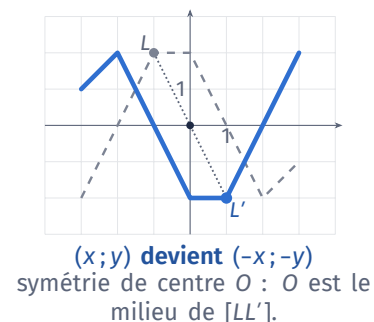
4 $C : y = -f(x)$



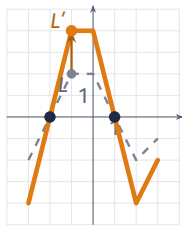
5 $C : y = f(-x)$



6 $C : y = -f(-x)$

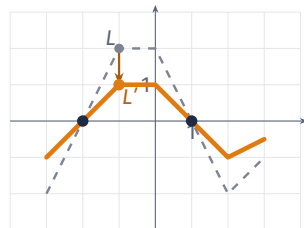


7 $C : y = 2f(x)$



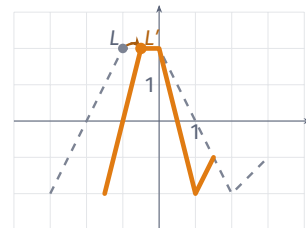
$(x; y)$ devient $(x; 2y)$
étirement vertical ($\times 2$) ; les
points de (Ox) ne bougent pas.

8 $C : y = \frac{1}{2}f(x)$



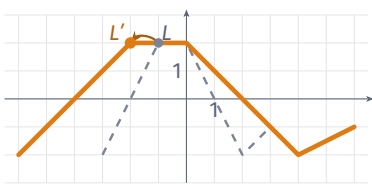
$(x; y)$ devient $(x; \frac{y}{2})$
écrasement vertical : la courbe
s'aplatit vers (Ox) .

9 $C : y = f(2x)$



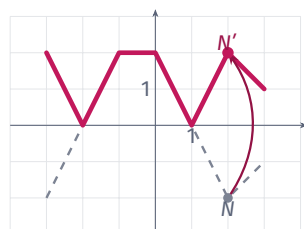
$(x; y)$ devient $(\frac{x}{2}; y)$
compression horizontale ;
 $D = [-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$, (Oy) fixe.

10 $C : y = f(\frac{x}{2})$



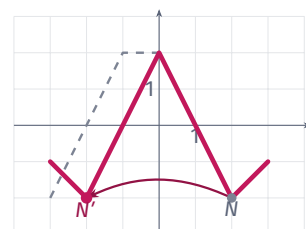
$(x; y)$ devient $(2x; y)$
étirement horizontal de rapport
2 ; $D = [-6; 6]$.

11 $C : y = |f(x)|$



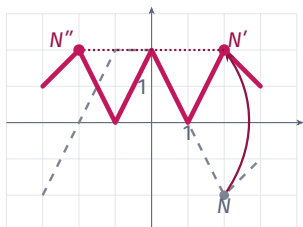
$(x; y)$ devient $(x; |y|)$
on replie vers le haut ce qui est
sous (Ox) .

12 $C : y = f(|x|)$



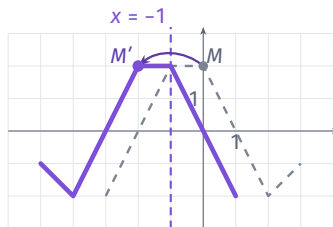
si $x \geq 0$: $(x; y)$ et $(-x; y)$
on garde la partie $x \geq 0$, recopiée
à gauche ; le reste disparaît.

13 $C : y = |f(|x|)|$



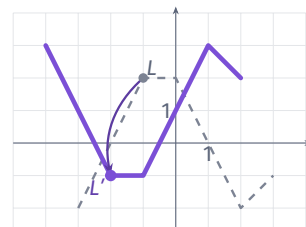
si $x \geq 0$: $(x; y)$ donne $(\pm x; |y|)$
d'abord $f(|x|)$, puis on replie :
courbe paire, positive.

14 $C : y = f(-2-x)$



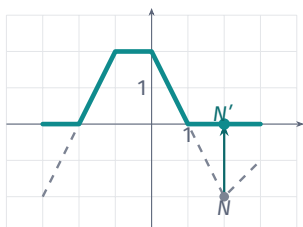
$(x; y)$ devient $(-2-x; y)$
symétrie d'axe $x = -1$; L, sur
l'axe, ne bouge pas.

15 $C : y = 1 - f(x+1)$



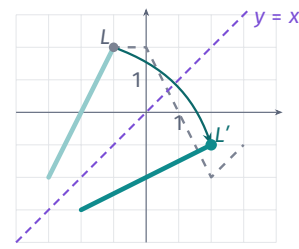
$(x; y)$ devient $(x-1; 1-y)$
symétrie d'axe (Ox) , puis
translation $\vec{u}(-1; 1)$.

16 $C : y = \max(f(x), 0)$



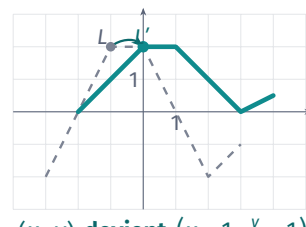
$(x; y)$ devient $(x; \max(y, 0))$
partie négative écrasée sur (Ox) ;
c'est $\frac{f+|f|}{2}$.

17 $C : y = f^{-1}(x)$



$(x; y)$ devient $(y; x)$
restriction à $[-3; -1]$;
 $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$.

18 $C : y = \frac{1}{2}f(x-1) + 1$



$(x; y)$ devient $(x+1; \frac{y}{2} + 1)$
écrasement vertical, puis
translation $\vec{u}(1; 1)$.

1.1 Que devient le point $A(a; b)$?

$A(a; b)$ est un point quelconque de C_f ; la dernière colonne applique la règle au point témoin $L(-1; 2)$.

n°	Courbe de	$A(a; b)$ devient	Transformation	L devient
1	$f(x) + 2$	$(a; b + 2)$	translation de vecteur $\vec{u}(0; 2)$	$(-1; 4)$
2	$f(x - 2)$	$(a + 2; b)$	translation de vecteur $\vec{u}(2; 0)$	$(1; 2)$
3	$f(x + 1) - 2$	$(a - 1; b - 2)$	translation de vecteur $\vec{u}(-1; -2)$	$(-2; 0)$
4	$-f(x)$	$(a; -b)$	symétrie d'axe (Ox)	$(-1; -2)$
5	$f(-x)$	$(-a; b)$	symétrie d'axe (Oy)	$(1; 2)$
6	$-f(-x)$	$(-a; -b)$	symétrie de centre O	$(1; -2)$
7	$2f(x)$	$(a; 2b)$	étirement vertical de rapport 2	$(-1; 4)$
8	$\frac{1}{2}f(x)$	$(a; \frac{b}{2})$	écrasement vertical de rapport $\frac{1}{2}$	$(-1; 1)$
9	$f(2x)$	$(\frac{a}{2}; b)$	compression horizontale (rapport $\frac{1}{2}$)	$(-\frac{1}{2}; 2)$
10	$f(\frac{x}{2})$	$(2a; b)$	étirement horizontal de rapport 2	$(-2; 2)$
11	$ f(x) $	$(a; b)$	repli de la partie située sous (Ox)	$(-1; 2)$
12	$f(x)$	$(\pm a; b)$ si $a \geq 0$; effacé si $a < 0$	partie $x \geq 0$ et sa symétrique par rapport à (Oy)	effacé
13	$ f(x) $	$(\pm a; b)$ si $a \geq 0$; effacé si $a < 0$	$f(x)$, puis repli de la partie sous (Ox)	effacé
14	$f(-2 - x)$	$(-2 - a; b)$	symétrie d'axe $x = -1$	$(-1; 2)$
15	$1 - f(x + 1)$	$(a - 1; 1 - b)$	symétrie d'axe (Ox) , puis translation $\vec{u}(-1; 1)$	$(-2; -1)$
16	$\max(f(x), 0)$	$(a; \max(b, 0))$	partie négative écrasée sur (Ox)	$(-1; 2)$
17	$f^{-1}(x)$	$(b; a)$	symétrie d'axe $y = x$ (sur une partie strictement monotone)	$(2; -1)$
18	$\frac{1}{2}f(x - 1) + 1$	$(a + 1; \frac{b}{2} + 1)$	écrasement vertical, puis translation $\vec{u}(1; 1)$	$(0; 2)$

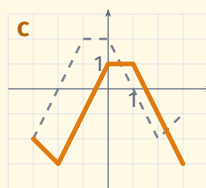
Les règles générales (h, k, c, d réels, $\lambda > 0$)

$$\begin{array}{ll}
 y = f(x - h) + k : (a; b) \mapsto (a + h; b + k) & y = f(2c - x) : (a; b) \mapsto (2c - a; b), \text{ axe } x = c \\
 y = \lambda f(x) : (a; b) \mapsto (a; \lambda b) & y = 2d - f(x) : (a; b) \mapsto (a; 2d - b), \text{ axe } y = d \\
 y = f(\lambda x) : (a; b) \mapsto (\frac{a}{\lambda}; b) & y = 2d - f(2c - x) : (a; b) \mapsto (2c - a; 2d - b), \text{ centre } \Omega(c; d)
 \end{array}$$

Attention, piège ! L'ordre compte

$\frac{1}{2}f(x - 1) + 1$ (vignette 18) : on écrase **puis** on monte. Monter d'abord donnerait $\frac{1}{2}(f(x - 1) + 1) = \frac{1}{2}f(x - 1) + \frac{1}{2}$, et L irait en $(0; \frac{3}{2})$ au lieu de $(0; 2)$. **Réflexe** : appliquer la règle du point $(a; b) \mapsto (a + 1; \frac{b}{2} + 1)$.

Le défi : quelle est la formule ? chaque courbe colorée vient de C_f (en gris) ; suis les sommets.



Réponses : a) $f(x + 3)$, b) $f(x - 1) + 1$, c) $f(x)$, d) $f(x - 1)$

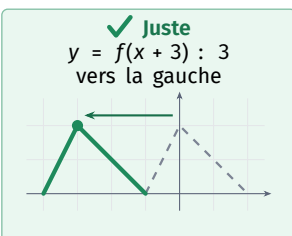
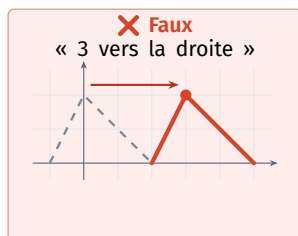
2

La galerie des pièges

Vingt-quatre erreurs classiques, chacune en deux images : **à gauche** ce que l'on dessine (ou conclut) trop vite **✗**, **à droite** la bonne lecture **✓**, et en dessous la phrase qui évite le piège.

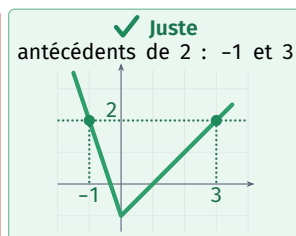
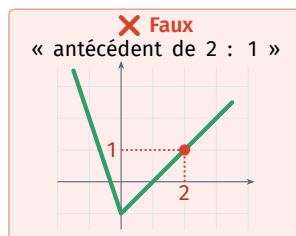
Tronc commun Pièges 1 à 8 : lire, traduire, résoudre

1 Le sens de la translation



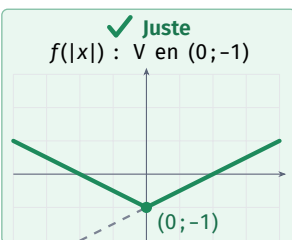
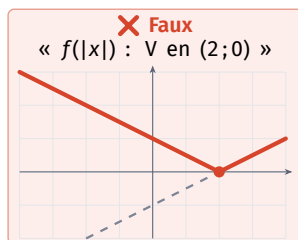
C_f en pointillés. Pour $y = f(x+3)$, en $x = -3$ on lit $f(0) = 2$: le sommet $(0; 2)$ va en $(-3; 2)$, à **gauche**.

2 Image ou antécédent ?



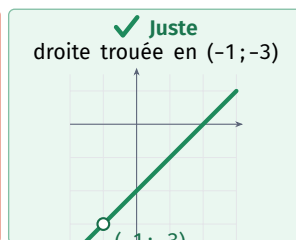
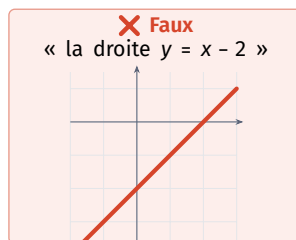
C_f : une ligne brisée. Un **antécédent** de 2 se lit sur la droite $y = 2$: deux réponses. $f(2) = 1$ est une **image**.

3 $|f(x)|$ ou $f(|x|)$?



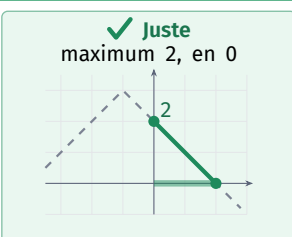
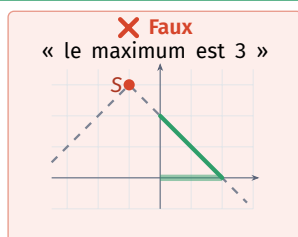
$f(x) = \frac{x}{2} - 1$ (pointillés). $f(|x|)$: on symétrise la partie $x \geq 0$ par rapport à (Oy) ; le V en $(2; 0)$ est $|f(x)|$.

4 Le point oublié



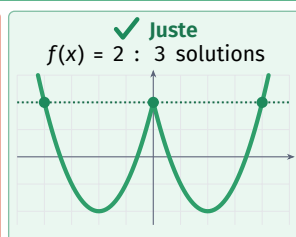
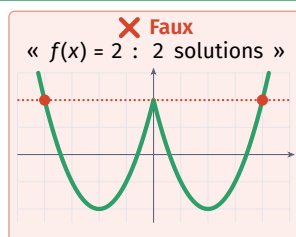
$\frac{x^2-x-2}{x+1} = \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = x-2$ pour $x \neq -1$: $-1 \notin D_f$, d'où le cercle vide en $(-1; -3)$.

5 Le sommet hors de l'intervalle



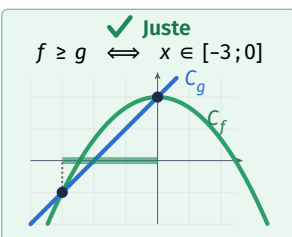
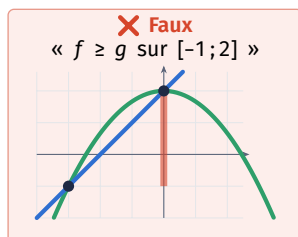
$f(x) = 3 - |x+1|$: le sommet $S(-1; 3)$ n'est pas dans $[0; 2]$, où f décroît : $\max = f(0) = 2$ et $\min = f(2) = 0$.

6 Le contact au sommet



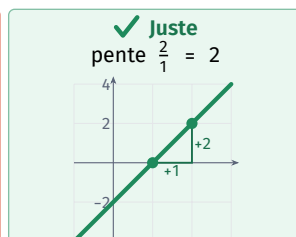
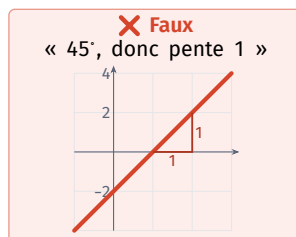
$f(x) = x^2 - 4|x| + 2$: la droite $y = 2$ passe par le sommet $(0; 2)$, qui compte : $x^2 - 4|x| = 0 \iff x \in \{-4; 0; 4\}$.

7 Une inéquation se lit sur (Ox)

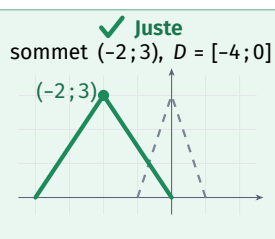
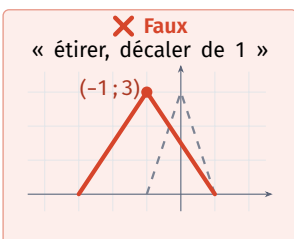


$f(x) = 2 - \frac{x^2}{3}$, $g(x) = x + 2$: on cherche des **abscisses** ; C_f est au-dessus de C_g entre $(-3; -1)$ et $(0; 2)$.

8 Un carreau n'est pas une unité

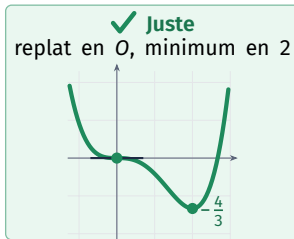
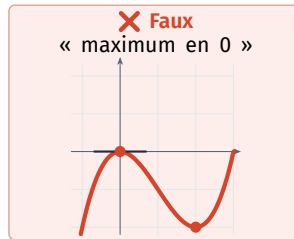


(Oy) est gradué de 2 en 2 : de $(1; 0)$ à $(2; 2)$, $\Delta x = 1$ et $\Delta y = 2$. La droite $y = 2x - 2$ « a l'air » à 45° .

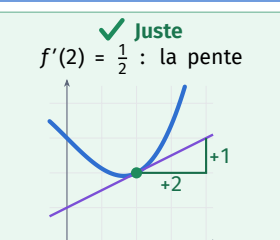
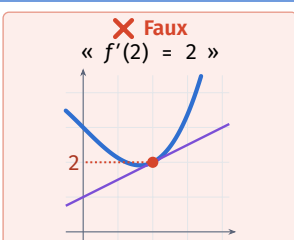
1^{re} Bac Pièges 9 à 16 : dilatations, tangentes, asymptotes, périodes9 Où va le sommet de $f(\frac{x}{2} + 1)$?

$f(x) = 3 - 3|x|$ sur $[-1; 1]$; $f(\frac{x}{2} + 1) = f(\frac{x+2}{2})$: on étire ($\times 2$), puis on décale de 2 vers la gauche.

10 Tangente horizontale sans extremum

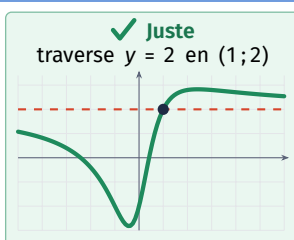
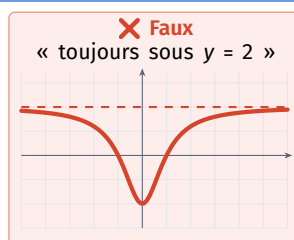


$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$: $f'(x) = x^2(x - 2)$ s'annule en 0 sans changer de signe, donc pas d'extremum en 0.

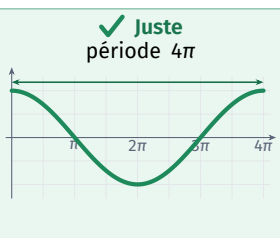
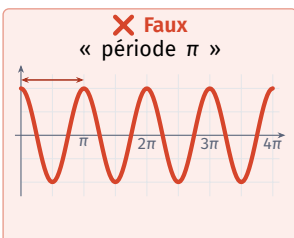
11 $f'(2)$ n'est pas $f(2)$ 

$f(x) = \frac{x^3}{8} - x + 3$, $A(2; 2)$: $f(2)$ est l'ordonnée de A, $f'(2)$ la pente de la tangente $y = \frac{x}{2} + 3$.

12 Elle coupe son asymptote !

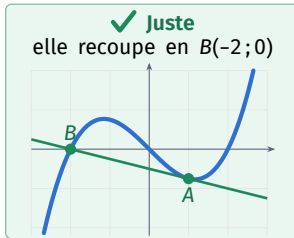
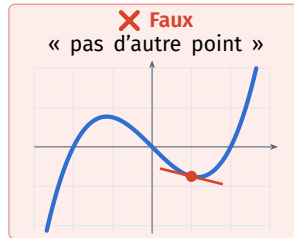


$f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 2}{x^2 + 1} = 2 + \frac{4(x-1)}{x^2 + 1}$: $f - 2$ change de signe en 1. L'asymptote ne décrit que l'infini.

13 La période de $\cos \frac{x}{2}$ 

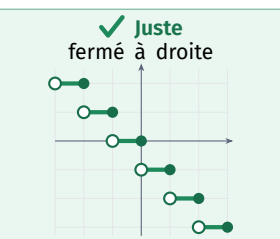
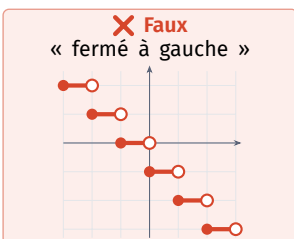
$\cos(ax)$ est de période $\frac{2\pi}{a}$: ici $\frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$. Diviser x par 2 étire ; c'est $\cos(2x)$ qui est de période π .

14 La tangente qui recoupe

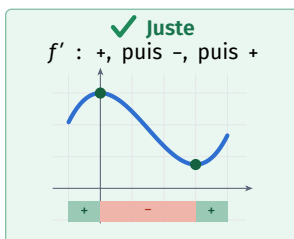
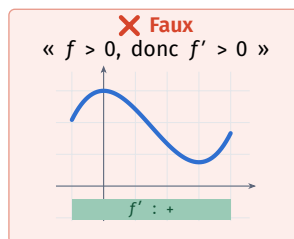


$f(x) = \frac{x^3}{4} - x$, tangente en $A(1; -\frac{3}{4})$: $y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{2}$; l'écart $\frac{1}{4}(x-1)^2(x+2)$ s'annule aussi en -2.

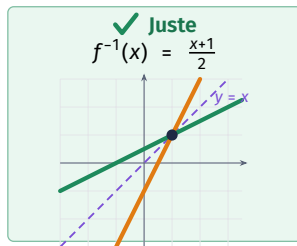
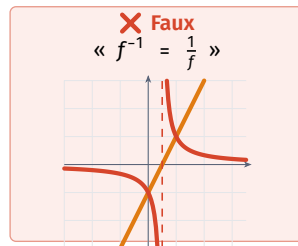
15 Le bon côté de la marche



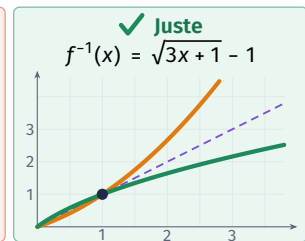
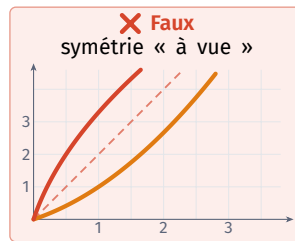
$E(-x) = n \iff -n - 1 < x \leq -n$: chaque marche contient son extrémité droite (disque plein). Ainsi $E(-1) = -1$.

16 Le signe de f' n'est pas celui de f 

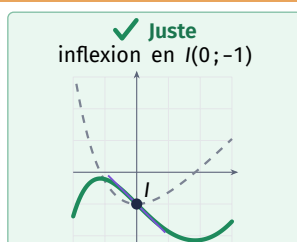
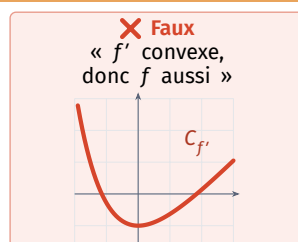
$f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + 3 \geq \frac{3}{4}$ sur $[-1; 4]$, mais $f'(x) = \frac{x(x-3)}{2} < 0$ sur $]0; 3[$: f' se lit sur les variations.

2^e Bac Pièges 17 à 24 : réciproques, convexité, intégrales, ln et exp17 $\frac{1}{f}$ n'est pas f^{-1} 

$f(x) = 2x - 1$ (orange) : f^{-1} échange abscisses et ordonnées (axe $y = x$), alors que $\frac{1}{f}$ inverse les valeurs.

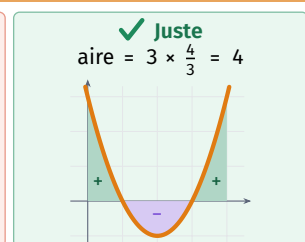
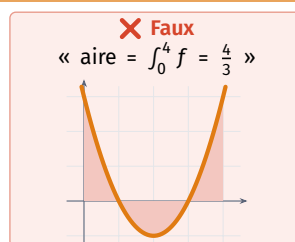
18 Repère non orthonormé et $y = x$ 

$f(x) = \frac{x^2+2x}{3}$, $x \geq 0$: f^{-1} échange les coordonnées. Unités différentes : $y = x$ n'est pas la diagonale des carreaux.

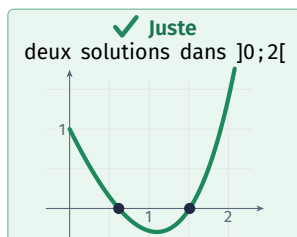
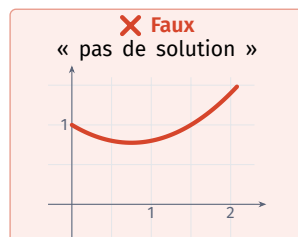
19 La convexité se lit sur les variations de f' 

$f'(x) = e^{-x} + x - 2$ (pointillés) décroît puis croît : C_f est concave sur $]-\infty; 0]$, convexe sur $[0; +\infty[$.

20 L'aire n'est pas l'intégrale

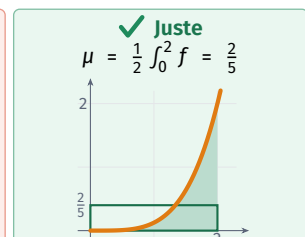
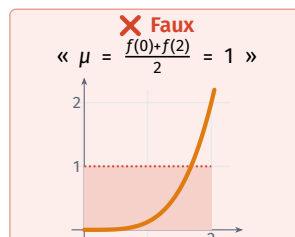


$f(x) = (x-1)(x-3)$: sous (Ox) , l'intégrale compte négativement : $\int_0^4 f = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$, mais l'aire vaut 4 u.a.

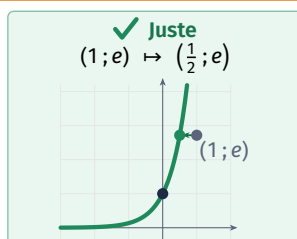
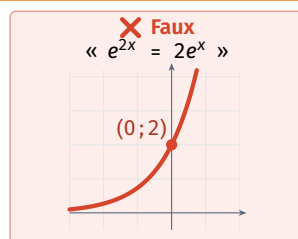
21 $f(a)f(b) > 0$ ne prouve rien

$f(x) = e^x - 3x$: $f(0) > 0$ et $f(2) > 0$, mais $\min f = f(\ln 3) = 3 - 3 \ln 3 < 0$: deux racines !

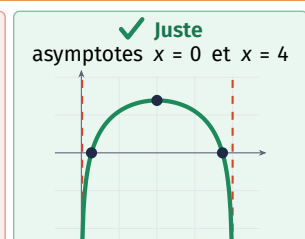
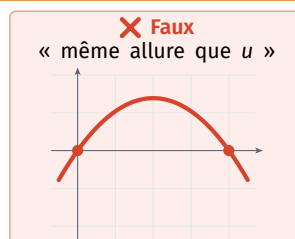
22 Valeur moyenne : un rectangle



$f(x) = \frac{x^4}{8}$: $\int_0^2 f = \frac{4}{5}$, donc $\mu = \frac{2}{5}$. Le rectangle de hauteur μ a la même aire que le domaine sous C_f .

23 e^{2x} n'est pas $2e^x$ 

e^{2x} , c'est $f(2x)$ pour $f = \exp$: compression **horizontale**, $(0; 1)$ fixe ; $2e^x$, lui, étire verticalement.

24 Le domaine de $\ln u$ 

$\ln(x(4-x))$: il faut $x(4-x) > 0$, d'où $D =]0; 4[$ et deux asymptotes verticales ; zéros $2 \pm \sqrt{3}$ (là où $u = 1$).

3

Le formulaire des graphiques

Transformer une courbe : dedans, dehors

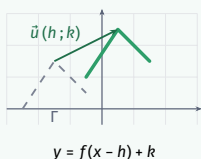
Dedans (sur x) : horizontal, à l'envers. $f(x-h)$ va de h vers la droite ; $f(\lambda x)$ divise les abscisses par λ ($\lambda > 0$).

Dehors (sur y) : vertical, à l'endroit. $f(x)+k$ monte de k ; $\lambda f(x)$ multiplie les ordonnées par λ .

$-f(x)$: miroir (Ox) ; $f(-x)$: miroir (Oy) ; $-f(-x)$: demi-tour autour de O .

$|f(x)|$: on replie le bas vers le haut ; $f(|x|)$: on recopie la droite à gauche.

Contrôle : suivre un point, $(a; b) \mapsto$ son image (galerie des transformations).



Symétries : axe, centre, parité, période

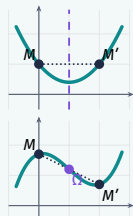
Axe $x = a$: $f(a-h) = f(a+h)$ pour tout h tel que $a \pm h \in D_f$.

Centre $\Omega(a; b)$:

$f(a-h) + f(a+h) = 2b$: Ω est le milieu de $[MM']$.

Paire : axe (Oy). **Impaire** : centre O (et $f(0) = 0$ si $0 \in D_f$).

Période T : la courbe se recopie par translations de vecteur $T\vec{i}$.



Les courbes de référence du tronc commun

$y = ax + b$: droite de pente a , passe par $(0; b)$

$y = ax^2$: sommet O , vers le haut si $a > 0$

$ax^2 + bx + c$: axe $x = -\frac{b}{2a}$

$y = \frac{a}{x}$: hyperbole de centre O

$\frac{ax+b}{cx+d}$: centre $\Omega(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$

$|x|$ (« V ») et $\sqrt{x}$ (sur $[0; +\infty[$)

Lire une courbe : le vocabulaire

D_f : « ombre » de C_f sur (Ox) ; $f(D_f)$: son ombre sur (Oy).

Image de a : de a sur (Ox), on va jusqu'à C_f et on lit l'ordonnée.

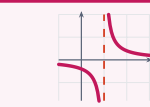
Antécédents de k : on coupe par $y = k$ et on lit les abscisses (zéro, une ou plusieurs).

Disque plein : point de C_f ;

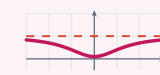
cercle vide : point exclu (jamais un maximum).



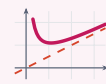
Asymptotes et branches infinies, en icônes



AV $x = a$: $\lim_{x \rightarrow a} f = \pm\infty$



AH $y = b$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = b$



AO : $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$



BP (Oy) : $\frac{f(x)}{x} \rightarrow \pm\infty$



BP (Ox) : $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$, $f \rightarrow \pm\infty$



BP de direction $y = ax$: $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a$, $f(x) - ax \rightarrow \pm\infty$

Position par rapport à $y = ax + b$: signe de $f(x) - (ax + b)$. Une courbe **peut** couper son asymptote.

Tangente et demi-tangentes



pente $f'(a)$: un pas à droite, $f'(a)$ vers le haut



point anguleux : nombres dérivés à gauche et à droite différents



demi-tangente verticale : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \rightarrow \pm\infty$

Équation : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. $f'(a) = 0$: tangente horizontale (extremum ou replat).

f' et variations : lecture croisée

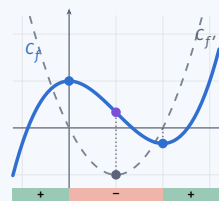
C_f **monte** là où $C_{f'}$ est au-dessus de (Ox).

Extremum de f : $C_{f'}$

traverse (Ox) ; si elle la touche seulement : replat.

Inflexion de f : extremum de f' .

Ici $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$, $f'(x) = x(x-2)$: max 1 en 0, min $-\frac{1}{3}$ en 2, inflexion $(1; \frac{1}{3})$.



Valeurs absolues, partie entière, périodes

$|x - a|$: un « V » de sommet $(a; 0)$, de pentes -1 et 1 ; $|x - a| + |x - b|$: palier entre a et b .

$E(x) = n$ sur $[n; n+1[$: marches **fermées à gauche** ;

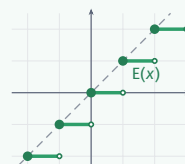
$x - 1 < E(x) \leq x$;

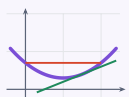
$E(x+n) = E(x) + n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

$\cos(ax + b)$ et $\sin(ax + b)$:

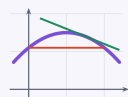
période $\frac{2\pi}{|a|}$; $|\sin x|$:

période π .



f'' et convexité

convexe : tangentes dessous, cordes dessus



concave : tangentes dessus, cordes dessous



inflexion : la tangente traverse la courbe

$f'' \geq 0$ sur $I \iff f'$ croissante sur $I \iff C_f$ convexe sur I .

f'' s'annule **en changeant de signe** en a : point d'inflexion d'abscisse a .

Sur la courbe de f' : la convexité de f se lit sur le **sens de variation** de f' , pas sur sa forme.

Réciproque : on échange x et y

f continue et strictement monotone sur I :

$$M(a; b) \in C_f \iff$$

$$M'(b; a) \in C_{f^{-1}} \text{ (miroir$$

$y = x$, repère orthonormé).

Pente en M' : $\frac{1}{f'(a)}$; une

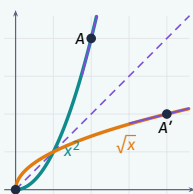
tangente **horizontale** devient **verticale**.

AH $y = c \iff$ AV $x = c$; BP (Oy) $\iff$ BP (Ox).

Ici x^2 et $\sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$:

pente 4 en $A(2; 4)$, pente $\frac{1}{4}$ en $A'(4; 2)$; en O, tangente

horizontale $\iff$ verticale.



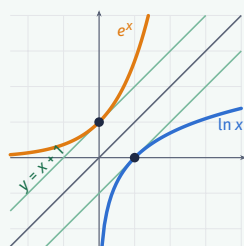
ln et exp : qui est au-dessus ?

La chaîne ($x > 0$) : $\ln x \leq x - 1 < x < x + 1 \leq e^x$
Contacts en $(1; 0)$ et en $(0; 1)$ seulement.

$C_{\exp}$ et $C_{\ln}$: miroirs l'une de l'autre par rapport à $y = x$, **sans** point commun.

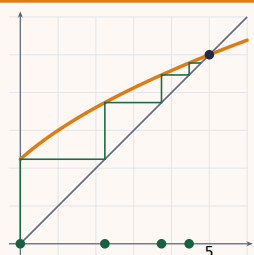
e^{-x} : miroir de e^x par rapport à (Oy) ; $-\ln x$: par rapport à (Ox).

Vers $+\infty$: $\ln x$, puis $\sqrt{x}$, puis x , puis e^x , de plus en plus vite.

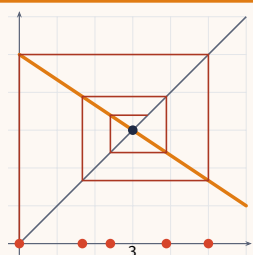


Tracer proprement : la check-list

1. D'abord les **asymptotes** (pointillés) et les **points exclus** (cercles vides).
2. Puis les points remarquables : axes, extremums, inflexions.
3. En chacun, un petit segment de **tangente**.
4. Relier en respectant **variations** et **convexité**.
5. Contrôler : symétries, quelques valeurs, bords du cadre.

Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ en images

escalier : f croissante, $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5}$, $u_0 = 0$



escargot : f décroissante, $u_{n+1} = 5 - \frac{2}{3}u_n$, $u_0 = 0$

On part de u_0 sur (Ox) : on monte jusqu'à C_f , on rejoint la droite $y = x$, on redescend sur (Ox) : on lit u_1 , et ainsi de suite.

f croissante : (u_n) monotone (escalier) ; f décroissante : (u_n) **alterne** autour de la limite (escargot).

Une limite ℓ (si f est continue) est l'abscisse d'un point commun à C_f et à $y = x$: $f(\ell) = \ell$.

Aires lues sur un graphique

$f \geq 0$ sur $[a; b]$: aire

$$= \int_a^b f ; f \leq 0 : \text{aire}$$

$$= - \int_a^b f.$$

Entre deux courbes :

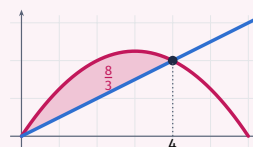
$\int_a^b$ (haut - bas), en coupant aux points d'intersection.

Unité d'aire : $\|i\| \times \|j\|$ (en cm^2).

Valeur moyenne

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f : \text{rectangle de même aire.}$$

$$\text{Ici } \int_0^4 \left(\frac{x(6-x)}{4} - \frac{x}{2} \right) dx = \frac{8}{3} \text{ u.a.}$$



Résoudre graphiquement

- $f(x) = k$: abscisses des points de C_f situés sur la droite $y = k$.
- $f(x) = g(x)$: abscisses des points communs ; $f(x) > g(x)$: là où C_f est **strictement au-dessus** de C_g .
- Paramètre m : faire glisser $y = m$ (ou tourner $y = mx$) et compter les points, sans oublier les **contacts** et les points **exclus**.
- La réponse est un ensemble d'**abscisses** : elle se lit sur (Ox), jamais sur (Oy).

Une courbe bien lue vaut un long calcul. Maths Olympiad

4

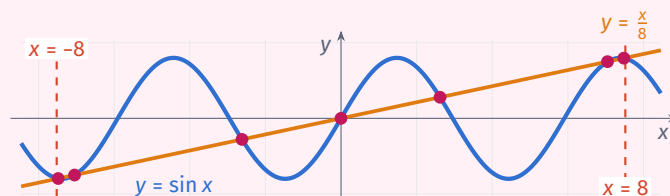
Mon bilan**Les exercices et les fiches**

Partie	Contenu	Réussis seul(e)	À refaire
Tronc commun Partie 1 · Lire et transformer	ex. 1 à 18	/ 18	
1^{re} Bac Partie 2 · Analyser une courbe	ex. 19 à 38	/ 20	
2^e Bac Partie 3 · Les courbes du Bac	ex. 39 à 60	/ 22	
Partie 4 · Méthodes, astuces, pièges	20 fiches	/ 20	
Partie 6 · Grands problèmes	ex. 61 à 66	/ 6	

Partie 5 · Questions de concours

Série	Questions	Score	2 ^e essai
Série 1 · Lire une courbe	1 à 10	/ 40	/ 40
Série 2 · Transformations	11 à 20	/ 40	/ 40
Série 3 · x et partie entière	21 à 30	/ 40	/ 40
Série 4 · Asymptotes et tangentes	31 à 40	/ 40	/ 40
Série 5 · Dérivées et réciproque	41 à 50	/ 40	/ 40
Série 6 · $\ln$, $\exp$ et défis	51 à 60	/ 40	/ 40

Conseil : refais dans une semaine les exercices et les questions ratés, sans regarder le corrigé.

Réponse du défi de la couverture : $\sin x = \frac{x}{8}$ a 7 solutions

Si $|x| > 8$, alors $\left|\frac{x}{8}\right| > 1 \geq |\sin x|$: aucune solution. Les deux fonctions sont impaires, on étudie donc $]0, 8]$. Sur $]0, \pi[$, la courbe de $\sin$ part au-dessus de la droite (pente $1 > \frac{1}{8}$) et finit au-dessous : **une** solution. Sur $[\pi, 2\pi]$, $\sin x \leq 0 < \frac{x}{8}$: aucune. Sur $]2\pi, 8]$, $\sin$ monte de 0 à 1 en $\frac{5\pi}{2} \approx 7,85$ où $\frac{x}{8} \approx 0,98 < 1$, puis redescend jusqu'à $\sin 8 \approx 0,989 < 1$: **deux** solutions. Total : $2 \times 3 + 1 = 7$ (en comptant $x = 0$).

Et maintenant : **les sujets d'examen et de concours**

Maths Olympiad