

Equations différentielles

Rappels sur le calcul intégral

- $I = \int a.dX = aX + c$

Exemple : $I = \int 5.dX = 5X + c$; $I = \int 3.dX = 3X + c$

- $I = \int ax^n.dX = \frac{1}{n+1} ax^{n+1} + c$

Exemple : $I = \int 7x.dX = \frac{7x^2}{2} + c$; $I = \int x^8.dX = \frac{x^9}{9} + c$; $I = \int (2x+1).dX = x^2 + x + c$

- $I = \int \frac{a}{x}.dX = a.\ln|x| + c$

Exemple : $I = \int \frac{5}{x}.dX = 5.\ln|x| + c$; $I = \int \frac{-1}{x}.dX = -\ln|x| + c$;

- $I = \int e^{ax}.dX = \frac{e^{ax}}{a} + c$ **Exemple :** $I = \int e^{-3x}.dX = \frac{e^{-3x}}{-3} + c$

- $I = \int \cos ax.dX = \frac{1}{a} \sin ax + c$; **exple :** $I = \int 5 \cos 3x.dX = \frac{5}{3} \sin 3x + c$

- $I = \int \sin ax.dX = \frac{-1}{a} \cos ax + c$ **exple :** $I = \int 7 \sin 5x.dX = \frac{-7}{5} \cos 5x + c$

- $I = \int u'.u^n .dX = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

Exemple : $I = \int (2X-3)(X^2-3X+5)^7 .dX = \frac{(X^2-3X+5)^8}{8} + c$

- $I = \int \frac{u'}{u} .dX = \ln|u| + c$ **Exple :** $I = \int \frac{2X-3}{X^2-3X+8} .dX = \ln|X^2-3X+8| + c$

- **Intégration par partie :** $I = \int u(x).v'(x).dX = [u(x).v(x)] - \int u'(x).v(x).dX$

Exemple : $I = \int x.\cos x.dX = [x.\sin x] - \int \sin x.dX = [x.\sin x] + \cos x$

On pose : $u = x$ et sa dérivée $u' = 1$ $v' = \cos x$ et sa primitive $v = \sin x$

Exemple : $I = \int x.\sin x.dX = [-x.\cos x] + \int \cos x.dX = [-x.\cos x] + \sin x$

On pose : $u = x$ et sa dérivée $u' = 1$ $v' = \sin x$ et sa primitive $v = -\cos x$

Exemple : $I = \int \ln x.dX = [x.\ln x] - \int \frac{x}{x}.dX = [x.\ln x] - \int 1.dX = [x.\ln x] - x$

On pose : $u = \ln x$ et sa dérivée $u' = 1/x$ $v' = 1$ et sa primitive $v = x$

1^{er} Cas : Equation différentielle de type : $y' = p(x)$ (p étant continue sur I)

$$y' = p(x) \Rightarrow y = \int p(x).dx + c$$

Exemple :

1/ Trouver toutes les solutions de $y' = 2x - 1$

2/ trouver la solution qui vérifie les conditions initiales pour $x_0 = 0$ et $y(x_0) = 0$

Solution :

$$1/ y' = p(x) \Rightarrow y = \int p(x).dx + c$$

$$y' = 2x - 1 \Rightarrow y = \int (2x - 1).dx + c = x^2 - x + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

2/ $x_0 = 0$ et $y(x_0) = -2$

La solution générale $y(0) = x^2 - x + c$ alors $y(0) = 0^2 - 0 + c = -2 \Rightarrow c = -2$

La solution particulière : $y = x^2 - x - 2$

2^{ème} Cas : Equation différentielle de type : $y'' = p(x)$ (p étant continue sur I)

$$y'' = p(x) \Rightarrow y' = \int p(x).dx + c_1 \Rightarrow y = \int y'.dx + c_1.x + c_2$$

Exemple :

1/ Trouver toutes les solutions de $y'' = x + \frac{1}{x^2}$

2/ trouver la solution qui vérifie les conditions initiales pour : $y'(1) = \frac{1}{2}$ et $y(1) = \frac{1}{6}$

Solution :

1/

$$y' = \int \left(x + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c_1 \Rightarrow y = \int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} - \ln|x| + c_1.x + c_2$$

La solution générale $y'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c_1$ et $y(x) = \frac{x^3}{6} - \ln|x| + c_1.x + c_2$

2/ $y'(1) = \frac{1}{2}$ et $y(1) = \frac{1}{6}$

$$y' = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c_1 \Rightarrow y'(1) = \frac{1^2}{2} - \frac{1}{1} + c_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = 1$$

$$y = \frac{x^3}{6} - \ln|x| + c_1.x + c_2 \Rightarrow y(1) = \frac{1^3}{6} - \ln|1| - (2).(1) + c_2 = \frac{1}{6} \Rightarrow c_2 = -1$$

La solution particulière $y(x) = \frac{x^3}{6} - \ln|x| + x - 1$

3^{ème} cas : Equation différentielle de type : $y' = ay$ ($a \in \mathbb{R}$)

$$y' = a.y \Rightarrow y(x) = A.e^{ax}$$

Exemple :

1/ Trouver toutes les solutions de $y' = 3y$.

2/ trouver la solution qui prend la valeur 1 pour $x = 0$.

Solution :

$$1/ y' = 3.y \Rightarrow y(x) = A.e^{3x}$$

La solution générale $y(x) = A.e^{3x}$

$$2/ y(0) = 1 ; y(x) = A.e^{3x} \text{ alors } y(0) = A.e^{3 \cdot 0} = 1 \Rightarrow A = 1$$

La solution particulière : $y(x) = e^{3x}$

4^{ème} cas : Equation différentielle de type : $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}$)

$$y'' + \omega^2 y = 0 \Rightarrow y(x) = A.\cos \omega x + B.\sin \omega x \text{ où } (A \text{ et } B \in \mathbb{R})$$

Exemple :

1/ Trouver toutes les solutions de $y'' + 4y = 0$.

2/ trouver la solution qui prend la valeur : $y(\pi) = 1$ et $y'(\pi) = -1$

Solution :

$$1/ y'' + \omega^2 y = 0 \Rightarrow y(x) = A.\cos \omega x + B.\sin \omega x$$

$$y'' + 4.y = 0 \Rightarrow y'' + 2^2.y = 0 \Rightarrow y(x) = A.\cos 2x + B.\sin 2x$$

La solution générale $y(x) = A.\cos 2x + B.\sin 2x$

2/ $y(\pi) = 1$ et $y'(\pi) = -1$

$$y(x) = A.\cos 2x + B.\sin 2x \text{ alors } y'(x) = -2.A.\sin 2x + 2.B.\cos 2x$$

$$y(\pi) = A.\cos 2\pi + B.\sin 2\pi = A = 1 \text{ alors}$$

$$y'(\pi) = -2.A.\sin 2\pi + 2.B.\cos 2\pi = 2B = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

La solution particulière : $y(x) = \cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$

Rappels :

$\cos \pi = -1$; $\sin \pi = 0$; $\cos 2\pi = \cos 0 = 1$; $\cos \pi/2 = 0$; $\cos 3\pi/2 = 0$

$\sin \pi = 0$; $\sin 2\pi = \sin 0 = 0$; $\sin \pi/2 = 1$; $\sin 3\pi/2 = -1$

Exemple :

Trouver toutes les solutions de $y''+3y=0$.

Solution : $y''+3.y = 0 \Rightarrow y''+\sqrt{3}^2.y = 0 \Rightarrow y(x) = A.\cos\sqrt{3}x + B.\sin\sqrt{3}x$

La solution générale $y(x) = A.\cos 2x + B.\sin 2x$

5^{ème} cas : Equation différentielle de type : $a y'' + by' + cy = 0$ ($a \neq 0$)

$a.y''+b.y'+c.y = 0 \Rightarrow a.r^2 + b.r + c = 0$ où ($a ; b ; c \in \mathbb{R}$)

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{et} \quad r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

La solution générale : $g(x) = A.e^{r_1x} + B.e^{r_2x}$

Exemple :

1/ Trouver toutes les solutions de $2y'' - 6y' - 8y = 0$.

2/ trouver la solution qui prend la valeur : $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$

Solution :

1/ L'équation $2y'' - 6y' - 8y = 0$ devient $2r^2 - 6r - 8 = 0 \rightarrow r^2 - 3r - 4 = 0$

$\Delta = 25 = 5^2$ on trouve $r_1 = -1$ et $r_2 = 4$ d'où : **$g(x) = A.e^{-x} + B.e^{4x}$**

2/

$g(x) = A.e^{-x} + B.e^{4x}$ et $g'(x) = -A.e^{-x} + 4.B.e^{4x}$

$g(0) = A.e^0 + B.e^0 = 0$ alors $A + B = 0$ l'équation 1

et $g'(0) = -A.e^0 + 4.B.e^0 = 1$ alors $-A + 4B = 1$ l'équation 2

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + 4B = 1 \end{cases} \quad \text{on trouve } A = -1/5 \text{ et } B = 1/5$$

La solution particulière : **$g(x) = (-1/5).e^{-x} + (1/5).e^{4x}$**

Retenons bien ceci : les 5 cas de figures

1^{er} cas : $y' = p(x) \Rightarrow y = \int p(x).dx + c$

2^{ème} Cas : $y'' = p(x) \Rightarrow y' = \int p(x).dx + c_1 \Rightarrow y = \int y'.dx + c_1.x + c_2$

3^{ème} cas : $y' = a.y \Rightarrow y(x) = A.e^{ax}$

4^{ème} cas : $y''+\omega^2.y = 0 \Rightarrow y(x) = A.\cos\omega x + B.\sin\omega x$ où (A et $B \in \mathbb{R}$)

5^{ème} cas : $a.y''+b.y'+c.y = 0 \Rightarrow a.r^2 + b.r + c = 0$ où ($a ; b ; c \in \mathbb{R}$)

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{et} \quad r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

La solution générale : $g(x) = A.e^{r_1x} + B.e^{r_2x}$

Rappels :

$\cos \pi = -1$; $\sin \pi = 0$; $\cos 2\pi = \cos 0 = 1$; $\cos \pi/2 = 0$; $\cos 3\pi/2 = 0$
 $\sin \pi = 0$; $\sin 2\pi = \sin 0 = 0$; $\sin \pi/2 = 1$; $\sin 3\pi/2 = -1$

Série d'exercices sur les équations différentielles

Exercice 1 : BAC 2004 (1 point)

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' - 3y = 0$

Solution : c'est le cas 5.

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r - 3 = 0$$

La racine évidente est $x = -1$ l'autre racine est $x = -c/a = 3$

La solution générale : $g(x) = A.e^{-x} + B.e^{3x}$

Exercice 2 : BAC 1995

1/ Résoudre l'équation différentielle $3y' + 2y = 0$

Déterminer la solution f qui vérifie $f(0) = 3$

2/ Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$

Déterminer la solution g qui vérifie : $g(\pi/2) = -1$ et $g(\pi/4) = 1$

3/ Calculer : $I = \int_0^{\pi/2} xg(x)dx$

Solution :

1/ $3y' + 2y = 0$

3^{ème} cas : $y' = a.y \Rightarrow y(x) = A.e^{3x}$

$$y' = \frac{-2}{3}y \Rightarrow y(x) = A.e^{\frac{-2}{3}x}$$

$$y(0) = A.e^0 = 3 \Rightarrow A = 3 \text{ la solution } y(x) = 3.e^{3x}$$

2/ $y'' + 4y = 0$

4^{ème} cas : $y'' + \omega^2.y = 0 \Rightarrow y(x) = A.\cos\omega x + B.\sin\omega x$ où $(A \text{ et } B \in \mathbb{R})$

$$y'' + 2^2.y = 0 \Rightarrow y(x) = A.\cos 2x + B.\sin 2x$$

$g(\pi/2) = -1$ et $g(\pi/4) = 1$

$$y(\pi/2) = A.\cos\pi + B.\sin\pi = -1 \Rightarrow A = -1 \text{ et } y(\pi/4) = A.\cos\frac{\pi}{2} + B.\sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow B = 1$$

La solution particulière : $y(x) = \cos 2x + \sin 2x$

3/ Calculer :

$$I = \int_0^{\pi/2} xg(x)dx = \int_0^{\pi/2} x(\cos 2x + \sin 2x)dx = \int_0^{\pi/2} x.\cos 2x dx + \int_0^{\pi/2} x.\sin 2x dx$$

Intégration par partie : $I = \int u(x).v'(x).dx = [u(x).v(x)] - \int u'(x).v(x).dx$

$$I_1 = \int x.\cos x dx = [x.\sin x] + \cos x \text{ et } I_2 = \int x.\sin x dx = [-x.\cos x] + \sin x$$

$$I = [x.\sin x]_0^{\pi/2} + [\cos x]_0^{\pi/2} - [x.\cos x]_0^{\pi/2} + [\sin x]_0^{\pi/2} = \pi$$

Exercice 3 : BAC SBT 2001

- Donner la solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 0$
- Déterminer la solution particulière f de (E) telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $2y' + 3y = 0$

Indication de solution :

$y'' + 4y = 0$ c'est le 4^{ième} cas : $y'' + 2^2 \cdot y = 0 \Rightarrow y(x) = A \cdot \cos 2x + B \cdot \sin 2x$

$2y' + 3y = 0$ c'est le 3^{ième} cas : $y' = -\frac{3}{2} \cdot y \Rightarrow y(x) = A \cdot e^{\frac{-3}{2}x}$

Exercice 4 : SBT juin 1999

Résoudre les équations différentielles :

1/ $y' + 5y = 0$

2/ $y' + 9y = 0$

3/ a) Calculer $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \cdot dx$

b) En déduire l'intégrale suivante : $A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x \cdot dx$

Indication de solution :

1/ $y' + 5y = 0$ c'est le 3^{ième} cas : $y' = -5 \cdot y \Rightarrow y(x) = A \cdot e^{-5x}$

2/ $y' + 9y = 0$ c'est le 3^{ième} cas : $y' = -9 \cdot y \Rightarrow y(x) = A \cdot e^{-9x}$

3/ $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \cdot dx = \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$

$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x \cdot dx = \int_{-\pi/4}^0 \cos 2x \cdot dx + \int_0^{\pi/4} \cos 2x \cdot dx = \frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{2} \right) = 1$

Rappelons que : si $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \cdot dx = \frac{1}{2}$ alors $\int_{-\pi/4}^0 \cos 2x \cdot dx = \frac{-1}{2}$

Exercice : résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

- $4y'' + 4y' + y = 0$
- $y'' + y' + y = 0$
- $2y'' - 6y' - 8y = 0$
- $y'' + 4y' + 4y = 0$
- $y'' - 4y' + 5y = 0$
- $y'' - y' - 6y = 0$

Indication de solution :

5^{ième} cas : $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0 \Rightarrow a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$ où $(a ; b ; c \in \mathbb{R})$

$\Delta = b^2 - 4ac$ et $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

La solution générale : $g(x) = A \cdot e^{r_1 x} + B \cdot e^{r_2 x}$

Problème / [10 points] BAC – STI - 2015

A-// 1° Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' = (x + 2)e^x$ (1pt)

2° Déterminez la solution de (E) vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$ (0,5pt)

B-// On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x e^x$

1° a) Calculez les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5pt)

b) Calculez $f'(x)$ puis dressez le tableau de variation de f . (1pt)

c) En déduire le signe de $f(x)$ en fonction de x . (0,5pt)

2° Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $g(x) = (1 - x)(1 + e^x)$.

On appelle $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de g dans un repère orthonormé. (Unité graphique 1cm)

a) Déterminez les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5pt)

b) Démontrez que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.
Etudiez la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) . (0,5pt)

c) Calculez g' et montrez que $g' = -f$ (0,5pt)

d) Dressez le tableau de variation de g (0,5pt)

3° On pose $\varphi(x) = g(x) - x$. (0,5pt)

a) Calculez φ' puis dressez le tableau de variation de φ . (0,5pt)

b) Démontrez que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0,7 ; 0,8[$ (0,5pt)

c) Déterminez un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} (0,5pt)

d) Vérifiez que $g(\alpha) = \alpha$. (0,5pt)

4° Tracez $(\mathcal{C})$ et son asymptote (Δ) dans le même repère. (1pt)

5° β étant un nombre réel inférieur à 1.

a) Calculez en fonction de β , l'aire $A(\beta)$ de la partie du plan comprise entre $(\mathcal{C})$, (Δ) et la droite d'équation $x = \beta$. (0,5pt)

b) Calculez $\lim_{\beta \rightarrow -\infty} A(\beta)$. (0,5pt)

Problème

A) 1) Résolution (1 pt)

$$(E) : y'' = (x + 2)e^x$$

$$u = x + 2 \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$y' = (x + 2)e^x - \int e^x dx \Rightarrow y' = (x + 2)e^x - e^x + k_1 \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

$$y = (x + 2)e^x - e^x - e^x + k_1x + k_2$$

$$k_1 ; k_2 \in \mathbb{R}$$

$$y = xe^x + k_1x + k_2$$

$$k_1 ; k_2 \in \mathbb{R}$$

Autre méthode

Posons $F(x) = (ax + b)e^x$ une primitive de $(x + 2)e^x \Rightarrow F'(x) = (ax + a + b)e^x$

$$F'(x) = (x + 2)e^x \Leftrightarrow (ax + a + b)e^x = (x + 2)e^x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ donc } F(x) = (x + 1)e^x$$

$$y'' = (x + 2)e^x \Rightarrow y' = (x + 1)e^x + k_1 \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

Soit $G(x) = (ax + b)e^x$ alors $G'(x) = (ax + a + b)e^x$

$$G'(x) = (x + 2)e^x \Leftrightarrow (ax + a + b)e^x = (x + 1)e^x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ donc } G(x) = xe^x$$

$$y' = (x + 2)e^x + k_1 \Rightarrow y = xe^x + k_1x + k_2 \quad (k_1 ; k_2) \in \mathbb{R}^2$$

2) La solution de (E) vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow k_2 = 1$$

$$y'(0) = 1 \Leftrightarrow 1 + k_1 = 1 \Rightarrow k_1 = 0$$

$$y = xe^x + 1 \quad \textbf{(0,5pt)}$$

B) Df = $\mathbb{R}$ $f(x) = 1 + xe^x$

1) a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ (0,25 pt) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (0,25 pt)

b) $f'(x) = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$ (0,5pt) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, $f'(x)$ a même signe que $1 + x$

Posons $1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$

(0,5pt)

x	$-\infty \quad -1 \quad +\infty$	
f'(x)	-	+
f(x)	1	$+\infty$

$$f(-1) = 1 - e^{-1}$$

c) Signe de f(x)

D'après le tableau de variation de $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$

(Le minimum étant positif sur $\mathbb{R}$ alors f est positive) **(0,5pt)**

2) Dg = $\mathbb{R}g(x) = (1 - x)(1 + e^x)$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ (0,25pt) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ (0,25 pt)

b) Démontrons que la droite $\Delta: y = -x + 1$ est asymptote à $\text{Cen } -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x)(1 + e^x) - (-x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - xe^x = 0$$

D'où $\Delta: y = -x + 1$ est une asymptote oblique à $\text{Cen } -\infty$. **(0,25 pt)**

Position de C par rapport à $\Delta g(x) - y = (1 - x)e^x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g(x) - y	+	-	

Les points essentiels de mathématiques * Les équations différentielles**

$\forall x \in]-\infty; 1[\quad g(x) - y > 0$; Cest au-dessus de Δ

$\forall x \in]1; +\infty[\quad g(x) - y < 0$; Cest en-dessous de Δ

Pour $x = 1$; $g(x) - y = 0$ C et Δ se coupent **(0,5 pt)**

c) Calculons g' et montrons que $g' = -f$

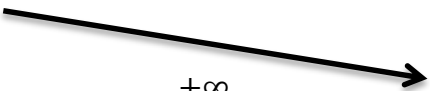
$g'(x) = -e^x + e^x(1 - x) = -(1 + xe^x) = -f(x)$ **(0,25pt)**

Les points essentiels de mathématiques *** Les équations différentielles

d) Dressons le tableau de variation

$g'(x)$ a même signe que $-f(x)$

(0,5pt)

x	$-\infty + \infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$  $+\infty$

3) On pose $\varphi(x) = g(x) - x$

a) Calculons $\varphi'(x)$ puis dressons le tableau de variation

$$\varphi'(x) = g'(x) - 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}; g'(x) < 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0$ d'où φ est strictement décroissante

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - x = -\infty$$

(0,5pt)

x	$-\infty + \infty$
$\varphi'(x)$	$-$
$\varphi(x)$	$+\infty$  $+\infty$

$\therefore$ Montrons que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution unique $\alpha \in]0,7; 0,8[$

φ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(0,7) = (1 - 0,7)(1 + e^{0,7}) - 0,7 = 0,2$$

$$\varphi(0,8) = (1 - 0,8)(1 + e^{0,8}) - 0,8 = -0,15$$

$$\varphi(0,7) \times \varphi(0,8) < 0 \text{ d'où } \alpha \in]0,7; 0,8[\text{ (0,5pt)}$$

c) Déterminons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

x	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76
$\varphi(x)$	0,2	0,16	0,13	0,10	0,06	0,02	-0,006

$$0,75 < \alpha < 0,76 \text{ (0,5pt)}$$

d) Vérifions que $g(\alpha) = \alpha$

$$\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha \text{ (0,5pt)}$$

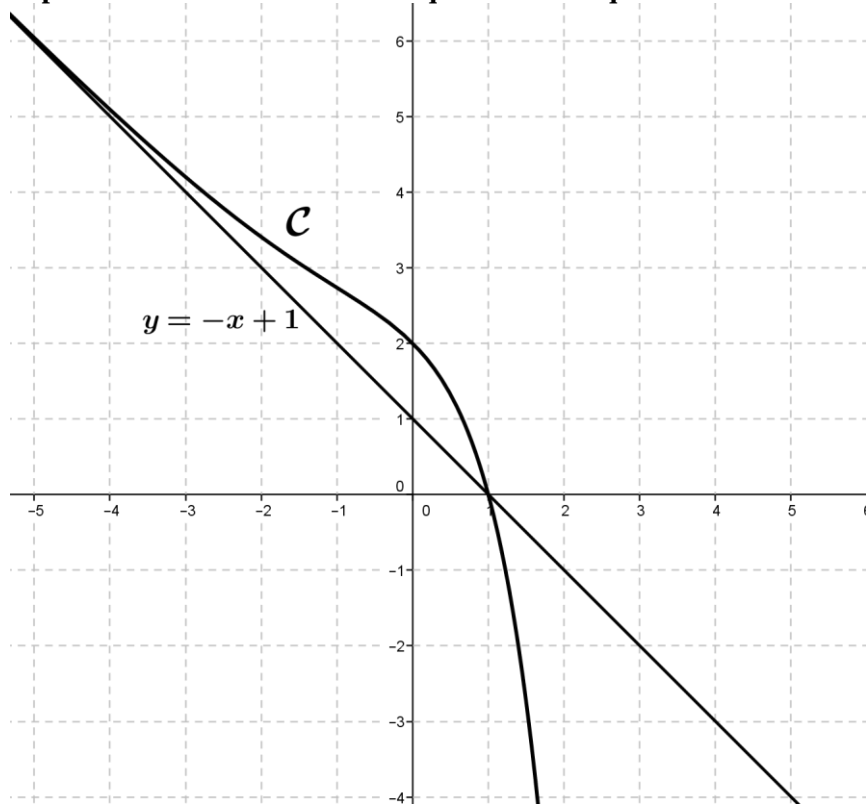
4) Traçons C et Δ

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right)(1 + e^x) = -\infty$ d'où C admet une branche parabolique de direction l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$.

$$\Delta: y = -x + 1$$

(1pt)

x	0	1
y	1	0



5) β étant un nombre réel inférieur à 1 ($\beta < 1$)

a) Calculons en fonction de β , l'aire $\mathcal{A}(\beta)$

$$\mathcal{A}(\beta) = \int_{\beta}^1 (g(x) - y) dx = \int_{\beta}^1 e^x(1 - x) dx$$

$$u = 1 - x \Rightarrow u' = -1$$

$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$\mathcal{A}(\beta) = [e^x(1 - x)]_{\beta}^1 + \int_{\beta}^1 e^x dx = [e^x(1 - x) + e^x]_{\beta}^1 = (e - (2 - \beta)e^{\beta}) . u \text{ a(0,5pt)}$$

b) Calculons

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\beta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e - (2 - \beta)e^{\beta}) = e \text{ (0,5pt)}$$