

Formules mathématiques

Formules sur les dérivées :

Dérivées usuelles :

Fonctions	Dérivées
a (constante)	0
ax	a
ax^n	nax^{n-1}
$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-na}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt{ax + b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$
$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$
$\tan(ax + b)$	$\frac{a}{\cos^2(ax + b)} = a(1 + \tan^2(ax + b))$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\ln ax + b $	$\frac{a}{ax + b}$
e^x	e^x
$e^{(ax + b)}$	$ae^{(ax + b)}$

Opérations sur les dérivées :

Fonctions	Dérivées
$u + v$	$U' + v'$
au	au'
uv	$u'v + v'u$
$\frac{a}{u} (a \in \mathbb{R})$	$\frac{-au'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{(v)^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{a}{u^n} (a \in \mathbb{R})$	$\frac{-nau'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\text{Cos}(u)$	$-u' \text{Sin}(u)$
$\text{Sin}(u)$	$u' \text{Cos}(u)$
$\tan(u)$	$\frac{u'}{\text{Cos}^2 u}$
$u = (g \circ f)(x)$	$u' = f'(x) g'(f(x))$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{[u(x)]}$	$u'(x)e^{[u(x)]}$

Primitives des fonctions usuelles

Fonctions	Primitives
a	$ax + k$
$x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
ax^n	$\frac{ax^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$
$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-a}{(n-1)x^{n-1}} + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$
$\frac{1}{ax + b}$	$\ln ax + b + k$
$\frac{\alpha}{ax + b}$	$\frac{\alpha}{a} \ln ax + b + k$
e^x	$e^x + K$
$e^{(ax+b)}$	$\frac{1}{a} e^{(ax+b)} + K$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$\frac{a}{\sqrt{x}}$	$2a\sqrt{x} + k$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} x\sqrt{x} + k$
$\sqrt{ax + b}$	$\frac{2}{3a} (ax + b)\sqrt{ax + b} + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + k$

$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$	$-\cot x + k$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + k$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + k$
$\tan(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \ln \cos(ax + b) + k$

Opérations sur les Primitives :

Fonctions	Primitives
$u' + v'$	$u + v + K$
$u'v + v'u$	$u \bullet v + K$
$au' \ (a \in \mathbb{R})$	$au + K$
$u' u^n$	$\frac{(u)^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{-1}{(n-1)(u)^{n-1}} + k$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + k$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}u\sqrt{u} + k$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u) + k$
$u' \cos(u)$	$\sin(u) + k$
$\frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$	$\tan(u) + k$
$\frac{u'}{\sin^2 u} = u'(1 + \cot^2 u)$	$\cot(u) + k$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + K$
$u'(x) e^{[u(x)]}$	$e^{[u(x)]} + K$

NB: $u^n \sqrt{u} = u^{\frac{2n+1}{2}}$ et $\int_a^b U(t)V'(t)dt = [U(t)V(t)]_a^b - \int_a^b U'(t)V(t)dt$

1- Ensemble de définition des fonctions logarithmiques :

- Si $f(x) = \ln x \Rightarrow Df =]0; +\infty[$
- Si $f(x) = \ln(ax + b) \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; ax + b > 0\}$
- Si $f(x) = \ln[u(x)] \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; u(x) > 0\}$
- Si $f(x) = \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; \frac{u(x)}{v(x)} > 0\}$
- Si $f(x) = \ln|u(x)| \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; u(x) \neq 0\}$

2- Propriétés Remarquables :

$\forall a > 0$ et $\forall b > 0$, on a :

- $P_1: \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ $P_6: \ln \sqrt{a} = \ln a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln a$
- $P_2: \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $P_7: \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $P_3: \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ $P_8: \ln e^a = a$ et $e^{\ln a} = a$
- $P_4: \ln(a)^n = n \ln a$ $P_9: \ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow a \geq b$ et $\ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow a \geq b$
- $P_5: \ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$ $P_{10}: \ln x = b \Leftrightarrow x = e^b$

3- Limites remarquables

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$x \rightarrow 0 \quad \quad \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = 0$$

$$x \rightarrow 0 \quad \quad \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad \quad \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^n} = -\infty$$

$$x \rightarrow 0 \quad \quad \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty \quad \quad \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad (\text{Nombre dérivé de la fonction } \ln \text{ au point } 1)$$

$$x \rightarrow 0 \quad \quad \quad x \rightarrow 1$$

2- Ensemble de définition de la fonction exponentielle :

Si $f(x) = e^x$ alors $Df = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

NB: $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ (car la fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme Népérien. Elle prend ces valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$).

3- Propriétés remarquables :

$$P_1 : e^{a \times b} = (e^a)^b$$

$$P_2 : e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$P_3 : e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$P_4 : e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$P_5 : (e^a)^n = e^{na}$$

$$P_6 : e^{\ln a} = \ln e^a = a$$

$$P_7 : e^0 = 1 \text{ et } e^1 = e$$

$$P_8 : \ln e = e^{\ln 1} = 1$$

$$P_9 : e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$P_{10} : e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b \text{ et } e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$$

$$P_{11} : e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$$

4- Limites remarquables :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ et pour } a > 0, \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{\ln x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$$

$$x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$