

Académie d'enseignement de Bamako – R.D.

Lycée La lanterne de Sogoniko

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES			
Classe : T.S.Exp	2013 - 2014	Durée : 3 heures	Coef : 03

Exercice1 : -----[5 points]

1) Soit f et F deux fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 + x + 1)^2} \quad \text{et} \quad H(x) = \frac{ax + b}{x^2 + x + 1}; \quad \text{avec } a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{R}.$$

- a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . (0,75 pt)
- b) Déterminer les réels a et b pour que H soit une primitive de f sur D_f . (1 pt)
- c) En déduire la primitive de f qui prend la valeur 1 et 0. (0,75 pt)

2) Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $g(x) = \frac{2x+10}{\sqrt{5-4x}-5}$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g . (0,75 pt)
- b) f est-elle continue au point $x_0 = -5$? (1 pt)
- c) Trouver, s'il existe, un prolongement par continuité de f au point $x_0 = -5$. (0,75 pt)

Exercice2 : -----[5 points]

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 1) dx \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$J = \int_0^1 (2x - 5)(x^2 - 5x + 1) dx \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$K = \int_2^3 \left(x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$L = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x + \cos x}{x^2} dx \quad (0,5 \text{ pt})$$

2) Calculer à l'aide de la technique d'intégration par parties les intégrales suivantes :

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 1) \cos x dx \quad (1 \text{ pt})$$

$$A_2 = \int_0^1 x \sqrt{x+1} dx \quad (1 \text{ pt})$$

3) Calculer à l'aide d'un changement de variable les intégrales suivantes :

$$B = \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx \quad (1 \text{ pt})$$

Problème : -----[10 points]

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^2+ax+8}{bx^2+x+c}$ où a , b et c sont des réels. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique **0,5cm**).

- 1) Déterminer les réels a , b et c sachant que $(\mathcal{C})$ admet les droites (Γ) et (Δ) d'équations respectives $x = 3$ et $y = 2x$ comme asymptotes. **(0,75 pt)**
- 2) Dans la suite du problème on prendra $a = -6$; $b = 0$; $c = -3$. Préciser le domaine de définition D_f de f et calculer les limites en ses bornes. **(0,75 pt)**
- 3) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation. **(1,5 pts)**
- 4) Montrer que le point $I(3 ; 6)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$. **(0,75 pt)**
- 5) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en $x_0 = 0$. **(0,25 pt)**
- 6) Préciser la position de (Δ) par rapport à $(\mathcal{C})$. **(0,5 pt)**
- 7) Montrer que la restriction g de f à $[5 ; +\infty[$ est une bijection de $[5 ; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. **(0,5 pt)**
- 8) Soient g^{-1} la réciproque de g et $(\mathcal{C}')$ la courbe représentatif de g^{-1} . Calculer $g(7)$ puis $g^{-1}(16)$ et $(g^{-1})'(16)$ sans expliciter g^{-1} . **(0,75 pt)**
- 9) Montrer que l'équation $f(x) = -3$ admet une solution unique $\alpha \in [1 ; 2]$. **(0,5 pt)**
- 10) Construire (Δ) , (Γ) , $(\mathcal{C})$ et la première bissectrice d'équation $y = x$; puis $(\mathcal{C}')$ sur le même repère . **(2 pts)**
- 11) Calculer l'aire A en cm^2 du triangle formé par (Δ) , (Γ) et l'axe des abscisses. **(0,5 pt)**
- 12) Montrer que $\forall x \in D_f ; f'(x) = 2 - \frac{8}{(x-3)^2}$.
En déduire que $\forall x \in [5 ; 7]$ on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{2}$. **(0,75 pt)**
- 13) En utilisant les inégalités des accroissements finis, montrer que :
 $\forall x \in [5 ; 7]$ on a : $\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \leq f(x) \leq 16$. **(0,5 pt)**