

Académie d'enseignement de Bamako – R.G.

Lycée Ba Nassou de Lafiabougou (LBNL) BKO

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES			
Classe : T.S.Exp	2013 - 2014	Durée : 3 heures	Coef : 03

Exercice1 : -----[5 points]

- 1) Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^e \frac{\ln x}{2x} dx \quad (0,5 \text{ pt}) \quad B = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 1}} dx \quad (0,5 \text{ pt})$$

- 2) Calculer au moyen d'une intégration par parties le réel $K = \int_1^2 x \ln x dx$ (1 pt).

- 3) On donne les fonctions $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$.

a) Montrer que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}^*$. (0,5 pt)

b) En déduire le calcul de l'intégrale $J = \int_1^2 \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx$. (0,5 pt)

- 4) Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{x^2-1}{x^3+x} = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{b}{x}$. (0,75 pt)

En déduire le calcul de l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^3+x} dx$ (0,75 pt).

- 5) Calculer la valeur moyenne de la fonction h définie par $h(x) = xe^{x^2}$ sur l'intervalle $I = [2 ; 4]$. (0,5 pt)

Exercice2 : -----[4 points]

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t , exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction numérique y à variable réelle t . La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée y' de cette fonction. On a constaté que : $y'(t) = ky(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$

- 1) Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$. (1 pt)
- 2) Sachant qu'au bout de deux heures le nombre de microbes a quadruplé, calculer en fonction de N le nombre de microbes au bout de trois heures. (2 pts)
- 3) Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de cinq heures ? (1 pt)

Problème : -----[11 points]

- A.** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + (x + 3)e^x$
- 1)** Dresser le tableau de variation de g (le calcul des limites n'est pas demandé) **(2 pts)**
 - 2)** Préciser l'extremum de g sur $\mathbb{R}$. **(0, 5 pt)**
 - 3)** En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$. **(0, 5 pt)**
- B.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x + 2)e^x$.
On désigne par (c_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
- 1)** Etudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. **(1 pt)**
 - 2) a)** Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (c_f) . **(0, 5 pt)**
b) Etudier la position de (c_f) par rapport (D) . **(0, 5 pt)**
 - 3) a)** Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$. **(0, 75 pt)**
b) Dresser le tableau de variation de f . **(1 pt)**
 - 4)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α Dans l'intervalle $[-1 ; 0]$. justifier que $-0,29 \leq \alpha \leq -0,28$. **(1pt)**
 - 5)**
 - a)** Montrer que f admet une réciproque. On notera f^{-1} cette réciproque. **(0, 5 pt)**
 - b)** Montrer que $(f^{-1})'(0) = \frac{\alpha+2}{\alpha^2+\alpha-5}$. **(0, 5 pt)**
 - 6)** Tracer la courbe (c_f) et la droite (D) dans le repère. **(1 pt)**
 - 7)** On désigne par A_m l'aire de la partie du plan limitée par (c_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x = m$ et $x = 0$ avec $m < 0$.
 - a)** Calculer A_m . **(0, 75 pt)**
 - b)** Calculer la limite de A_m lorsque m tend vers $-\infty$. **(0, 5 pt)**