

DEVOIR DE MATHEMATIQUES	ANNEE SCOLAIRE : 2015-2016
SERIE : TSEXP	DUREE : 3 H

EXERCICE 1 :

1°/ Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes associé au plan affine rapporté au repère orthonormé

$(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les nombres complexes z_1 et z_2 définis par : $z_1 = \frac{i-13}{-12+14i}$ et $z_2 = \frac{2i+1}{1-3i}$

a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme $a + ib$ puis déterminer le module et un argument de chacun d'eux.

b) On désigne par A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2 , déterminer le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$ et en déduire la nature du triangle AOB.

2°/ Déterminer le nombre complexe z tel que $|z| = 2\sqrt{2}$ et $\arg[(1+i\sqrt{3})z] = \frac{7\pi}{12}$

EXERCICE 2 :

On considère les nombres complexes $a = -1 + i\sqrt{3}$; $b = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$ et $c = -4i$. On pose $z = \frac{1}{abc}$

1°/ Ecrire chacun des complexes a , b et c sous forme exponentielle.

2°/ Ecrire le complexe z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

3°/ En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

PROBLEME :

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

PARTIE I/ On considère l'application φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(z) = z^3 + 9iz^2 - 2(11 - 6i)z - 36 - 12i$$

1°/ a) Démontrer que l'équation $\varphi(z) = 0$ admet une solution réelle z_1 que l'on précisera.

b) Trouver les nombres complexes α , β et γ tels que $\varphi(z) = (z - z_1)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$

2°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\varphi(z) = 0$. On notera z_2 et z_3 les autres solutions de cette équation avec $|z_2| < |z_3|$

3°/ A, B et C sont les points d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 .

a) Montrer que les points A, B et C sont alignés.

b) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h de centre B qui transforme A en C.

PARTIE II/ D, E et F sont les points d'affixes respectives $z_D = -3$, $z_E = -1 + 2i$ et $z_F = -1 - 2i$.

1°/ Calculer le complexe $q = \frac{z_E - z_D}{z_F - z_D}$

2°/ En déduire la nature du triangle DEF.

3°/ On désigne par $\mathcal{S}$ la similitude directe telle que $\mathcal{S}(D) = E$ et $\mathcal{S}(E) = F$.

a) Déterminer l'écriture complexe de $\mathcal{S}$

b) Trouver les éléments caractéristiques de $\mathcal{S}$.