

~ Comité Pédagogique de mathématiques ~

# Lycée La Lanterne (LLANT)

| Devoir de Mathématiques  |               |                         |                  |
|--------------------------|---------------|-------------------------|------------------|
| Classe :<br><b>TSExp</b> | Novembre 2019 | Durée : <b>3 heures</b> | Coef : <b>03</b> |

## Lire attentivement :

- 📖 Le sujet est composé de trois exercices tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- 📖 La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- 📖 L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

### Exercice 1 :-----[6 points]

- 1) Résous dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation d'inconnue  $z$  :  
 $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ , détermine le module et un argument de chaque solution.
- 2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère la transformation  $T$  du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $Z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $Z'$  défini par

$$Z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} Z$$

- a) Détermine la nature de la transformation  $T$  et donne tous ses éléments caractéristiques.
- b) Soit  $A$  le point d'affixe  $Z_A = -\sqrt{3} + i$ . Détermine les affixes respectives  $Z_B$  et  $Z_C$  des points  $B$  et  $C$  tels que  $B = T(A)$  et  $C = T(B)$ . Construis les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans le plan muni du repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .
- 3) Calcule  $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$  puis en déduis la nature du triangle  $ABC$ .

### Exercice 2 :-----[6 points]

Soit  $f$  l'application du plan  $P$  dans  $P$  qui à tout point  $M(z)$  associe le point  $M'(z')$  telle que :

$$f(z) = z' = \frac{z - 2 + i}{z + 1 - i}$$

- 1) Détermine les nombres complexes pour les quels  $f$  est définie.

---

**\*Rapidité et efficacité feront la différence !\***

2) On pose  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels.

Ecris  $z'$  sous forme algébrique

3) Détermine et construis l'ensemble des points  $M(z)$  tels que :

a)  $(E_1)$ :  $z'$  soit un réel.

b)  $(E_2)$ :  $z'$  soit un nombre imaginaire pur.

c)  $(E_3)$ :  $|z'| = 1$ .

**Exercice 3 :**-----[8 points]

1) Pour tout nombre complexe  $z$ , on pose :  $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ .

a) Calcule  $P(-1)$ .

b) Détermine les réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout nombre complexe  $z$ , on ait :

$$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b).$$

c) Résous, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(z) = 0$ .

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Unité graphique : 2 cm. On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives :

$$Z_A = -1, Z_B = 2 + i\sqrt{3}, Z_C = 2 - i\sqrt{3} \text{ et } Z_G = 3.$$

a) Réalise une figure et place les points A, B, C et G.

b) Calcule les distances AB, BC et AC. En déduis la nature du triangle ABC.

c) Calcule un argument du nombre complexe  $\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}$ . En déduis la nature du triangle GAC.