

Contrôle de Mathématiques :**Classe : TSEXP Coef : 3 Durée : 2 H****Exercice 1 : (4,5 points)**

- I) On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$.
- 1) Après avoir calculer $P(-1)$, résoudre dans $\mathbb{R}$: $P(x) = 0$ et $P(x) < 0$.
 - 2) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de :
 - a) $(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 + 2\ln x + 8 = 0$; b) $e^{3x} - 5e^{2x} + 2e^x + 8 < 0$.
- II) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$a) \begin{cases} 2\ln x - \ln y = 9 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \ln(x \cdot y) = 4 \\ \ln x \cdot \ln y = -12 \end{cases}$$

Exercice 2 : (7,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - e^{-x} + x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Montrer que la fonction f est impaire.
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
b) Calculer $f'(x)$ puis justifier que $f'(x) > 0$ pour tout réel x . Dresser le tableau de variation de f .
- 3) a) Montrer que O est un point d'inflexion pour la courbe (C) .
b) Montrer que la tangente (T) à la courbe (C) au point O a pour équation $y = 3x$.
- 4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On note f^{-1} la fonction réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1} .
b) Calculer $f(0)$ puis déterminer $(f^{-1})'(0)$.
- 5) Tracer (C) , (T) et (C') .

Exercice 3 : (8 points)

- 1) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$.
 - a) Etudier le sens de variations de g .
 - b) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) > 0$.
- 2) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x - (\ln x)^2$.
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 - b) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{2 \cdot g(x)}{x}$.
 - c) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f et par (D) la droite d'équation $y = 2x$.
 - a) Vérifier que (D) est tangente à (C_f) en son point d'abscisse 1.
 - b) Montrer que (C_f) admet une direction asymptotique qui est celle de la droite (D) .
 - c) Etudier la position relative de (C_f) et (D) .
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et vérifier que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$.
- 5) Tracer la droite (D) et la courbe (C_f) .