

--- Comité Pédagogique de mathématiques---

LYCEE PRIVE DJENNE

DEVOIR DE MATHEMATIQUES			
Classe : TSexp	Mars 2021	Durée : 3 heures	Coef : 03

Lire attentivement :

- Le sujet est composé de trois exercices tous obligatoires.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

EXERCICE 1 : ----- [8 Points]

- Calcule $(1 + i\sqrt{3})^4$ (1pt)
 - Résous l'équation $Z^4 = -8 - 8i\sqrt{3}$ (1pt)
 - Place les points images des solutions dans le plan muni d'un repère (1pt)
- Donne la forme algébrique et trigonométrique du nombre complexe $Z = \sqrt{2}(1 + i)(\sqrt{3} + i)$ puis en déduis les valeurs exactes de $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$ (2pts)
 - Résous dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $Z + (1 + 3i)\bar{Z} = 5 + 3i$ (1pt)
- Détermine la nature et éléments caractéristiques des transformations suivantes :
 - $Z' = Z + 1 - 2i$ (1pt)
 - $Z' = iZ + 1$ (1pt)

PROBLEME : ----- [12 Points]**PARTIE A : ----- [6 Points]**

- On considère l'équation (E) : $Z^3 + (-6 - 4i)Z^2 + (12 + 21i)Z + 9 - 45i = 0$
 - Détermine la solution imaginaire pure Z_0 de l'équation (E). (1,5pt)
 - Achève la résolution de (E) (on appelle Z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et Z_2 la troisième solution) (1,5pt)
- Le plan complexe est rapporté au repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $3i$; $3 + 3i$ et $3 - 2i$
 - Place les points A, B et C dans le repère. (1,5pt)
 - Calcule $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$. En déduire la nature du triangle ABC. (1,5pt)

PARTIE B : [6 Points]

- On considère le nombre complexe $Z = x + iy$ ayant pour image M,
on pose $Z = \frac{z+2}{z+i}$
 - Ecris Z sous forme algébrique en fonction de x et y. (2pt)
 - Détermine l'ensemble des points M du plan tel que :
 - Z soit réel. (1pt)
 - Z soit imaginaire pur. (1pt)
- Détermine et construis l'ensemble des points M dont l'affixe de z vérifie :
 - $|Z - 2 + 4i| = |Z + 1 - 2i|$ (1pt)
 - $|Z - 4i| = \sqrt{3}$ (1pt)

Soit le complexe $z = -4(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$.

1. Ecrire z sous forme algébrique.
2. L'écriture $z = -4(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$ est une forme trigonométrique ? Justifier votre réponse.
3. Donner la forme trigonométrique de z en utilisant l'argument principal.

Soit le complexe $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

1. Calculez z^2 et écrivez z^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de z .
3. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 3:----- [10 Points]

Partie A : On donne la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2,19 < \alpha < 2,20$
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f .
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$, on a : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$
3. Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f puis le tableau de variation de la fonction f .
4. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe C_f . Etudier la position de C_f et (D).
5. Tracer C_f .

EXERCICE 3 :----- [8 POINTS]