

Exercice 1 : (5points)

1- Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes ci-dessous ;
puis les écrire sous la forme trigonométrique.

$$Z_1 = -2(\sin x + i \cos x); \quad Z_2 = -3e^{i\frac{2\pi}{3}}; \quad Z_3 = \frac{-\cos 2x + i \sin 2x}{2 \cos 3x - 2i \sin 3x}$$

2- Linéarise $\cos^5 x$; $\cos^2 x \times \sin^2 x$.

Exercice 2 : (7points)

On donne les nombres complexes z et u définis par :

$$z = -8\sqrt{3} + 8i \quad \text{et} \quad u = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

1°) a) Ecrire le nombre complexe z sous forme trigonométrique.

b) Déterminer les racines carrées de z sous la forme trigonométrique.

2°) a) Calculer u^2 .

b) Utiliser ce résultat pour exprimer les racines carrées de z sous leur forme algébrique.

c) En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Problème : (8points)

Awa a fêté son anniversaire le 30 octobre 2022. Les invités étaient reçus sur un espace (Γ) dont les affixes des sommets sont les solutions de l'équation complexe :

$(Z + 1 - 6i)P(Z) = 0$ où P est un polynôme défini par :

$P(Z) = Z^3 + (5 - 2i)Z^2 + (4 - 22i)Z + 20 - 60i$ tel que $P(Z)$ admet une solution réelle.

Son petit frère Oumar avait confirmé que la circulation des invités dans (Γ) était aisée suivant l'ensemble (D) des points M d'affixes Z vérifiant :

$$|Z + 1 - 6i| = |Z - 2 - 4i|.$$

Pour couvrir l'espace (Γ) en l'électricité le technicien de Awa avait placé deux points lumineux dont les affixes vérifiaient l'équation :

$Z^2 - 4(1 + i)Z + 8 + 14i = 0$. Chaque point lumineux couvrait un rayon de 5m. On considère le repère complexe $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

Montre que (D) est une droite dont on précisera son équation cartésienne et que (Γ) est un rectangle. (Γ) est-il entièrement éclairé ?

BONNE CHANCE !!!