

Situation1 : (Nombres complexes) (6 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E): z^4 - 2(1 + \sqrt{3})z^3 + 2(3 + 2\sqrt{3})z^2 - 4(2 + \sqrt{3})z + 8 = 0.$$

- 1) Démontre que si le complexe z_0 est solution de (E) alors il en est de même pour son conjugué $\bar{z}_0$.
- 2) a) Vérifie que $z_0 = 1 + i$ est une solution de (E).
b) En déduis une seconde solution z_1 .
- 3) Détermine les autres solutions z_2 et z_3 de l'équation (E).
- 4) Représente dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unités graphiques 1cm.
- 5) Détermine la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calcule son aire en cm^2 .

Situation2 : (Nombres complexes) (4 points)

Soient $A = 1 - i$ et $B = (1 + i\sqrt{3})^2$ deux nombres complexes.

- 1) Ecris $A \times B$ sous forme algébrique
- 2) Détermine le module et un argument de A, B et $A \times B$.
- 3) Ecris A, B et $A \times B$ sous forme trigonométrique.
- 4) En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Situation complexe : (Fonctions numériques) (10 points)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}. \text{ On désigne}$$

par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Détermine le domaine de définition de f.
- 2) Détermine les limites aux de Df.

- 3) En déduis l'existence de 2) d'une asymptote verticale dont on précisera l'équation.
- 4) Détermine trois nombres réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.
- 5) Détermine $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2}$.
- 6) En déduis l'existence de 5) d'une asymptote oblique (D) dont on donnera l'équation.
- 7) Etudie la position relative de (D) par rapport à (Cf) .
- 8) Calcule $f'(x)$ fonction dérivée de la fonction f .
- 9) Etudie le signe de la dérivée f' . En déduire le sens de variations de f .
- 10) Dresse le tableau de variations de f .
- 11) Démontre que la restriction g de f sur $I =]-2; -1[$ réalise une bijection vers un intervalle J que l'on déterminera.
- 12) a) Dresse le tableau de variations de g .
b) Dresse le tableau de variations de g^{-1} .
- 13) Construis la courbe de f et celle de g^{-1} dans le même repère ainsi que les asymptotes.