

DEVOIR N°1			
TSEXP	Mathématiques	02-11-2023	Durée : 3 heures

Exercice1 : ----- (6,25 pts)

1) Mettre sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes

$$z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{13}; z_2 = \frac{(\sqrt{3}+i)^9(1-i)}{(1+i)^2}, z_3 = 1 - e^{i\alpha}, z_4 = 1 + e^{i\alpha}, \quad Z = \frac{z_3}{z_4}, T = z_3 \cdot z_4$$

(0,5pt).6=3 pts

2) Linéariser

a) $\cos 4x$ et $\sin 4x$ **(0,5pt)** b) $\cos^4 2x \cdot \sin^3 3x$ **(1 pt)**

3) a) Vérifier que $(2+i)^4 = -7+24i$. **(0,5pt)**b) Trouver les racines quatrièmes de 1. **(0,5pt)**c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 7 - 24i = 0$. **(0,75pt)****Exercice2 :** ----- (4,75 pts)Le plan est rapporté au repère orthonormé directe $(O; \vec{U}; \vec{V})$.

On considère :

- Le point A d'affixe $Z_A = 5 - i\sqrt{3}$.
- Le point B d'affixe Z_B est tel que OAB soit un triangle équilatéral direct c'est-à-dire la mesure de l'angle $(\vec{OA}; \vec{OB}) = \frac{\pi}{3}$.
- Le point Q d'affixe Z_Q est tel que le point Q soit milieu du segment $[OB]$.
- Le point K d'affixe Z_K est tel que ABQK soit un parallélogramme.

1) Déterminer les affixes Z_B ; Z_Q et Z_K respectivement des points B; Q et K. **(1,5pt)**2) Démontrer que $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est un imaginaire pur. En déduire la nature du triangle OKA ?**(0,75pt)**Placer les points A; B; Q et K dans le plan. **(1pt)**3) Soit C la point d'affixe Z_C tel que $Z_C = \frac{2Z_A}{3}$.a- Calculer $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$. Que peut-on en déduire pour les points B; C et K ? **(0,75pt)**c- Placer le point C. (on fera une figure). **(0,25pt)****Exercice3 :** ----- (4 pts)1) A tout nombre complexe $z \neq -1 + 2i$, on considère le nombre complexe Z tel que

$$Z = \frac{z - 2 + 4i}{z + 1 - 2i}$$

Déterminer puis construire l'ensemble des points M dont l'affixe vérifie les conditions indiquées :

a) $|Z| = 1$ **(1 pt)**

b) $|Z| = 2$ **(1 pt)**

c) Z est un réel. **(1 pt)**d) Z est un imaginaire. **(1 pt)**

Exercice4 : ----- (5 pts)

On considère l'équation d'inconnues complexes z

$$(E) : z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0$$

- 1) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire z_0 que l'on déterminera. **(1 pt)**
- 2) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera. **(1 pt)**
- 3) Achèver la résolution dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation (E). **(1 pt)**
- 4) En désignant par z_1 , la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 la quatrième solution de (E), montre que z_0, z_1, z_2, z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison. **(1 pt)**
- 5) Donner le module et un argument de chacune des solutions de (E). **(1 pt)**