

Exercice 1 : (6points)

- 1) Soit $P(z) = z^3 - (4 + 6i)z^2 - (12 - 24i) + 32 - 24i$.
 - a. Montre que $P(z)$ admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.
 - b. Factorise $P(z)$ puis résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.
- 2) Détermine la forme algébrique de Z' tels que : $|Z'| = 2\sqrt{2}$ et $\arg[(1 + i\sqrt{3})Z'] = \frac{7\pi}{12}$.

Exercice 2 : (6points)

Soit $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .
2. Écris sous forme algébrique et trigonométrique le quotient $Z = \frac{z_1}{z_2}$.
3. Déduis-en les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
4. Calcule z^{2006} .

Exercice 3 : (8points)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère l'équation à variable complexe notée et déterminée par : $(E): z^3 - (2 + 2i)z^2 + (2 + 4i)z - 4i = 0$.

1. Prouve que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on notera z_0 .
2. Achève la résolution de l'équation (E). On notera z_1 et z_2 les autres solutions trouvées telles que $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2)$.
3. Donne les écritures de z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
4. On considère E, G et F, les points du plan d'affixes respectives z_0 , z_1 et z_2 .
Donne l'expression algébrique du complexe $Z = \frac{z_1 - z_2}{z_0 - z_2}$.
5. Déterminer z_3 l'affixe de D pour que EDGF soit un parallélogramme.
6. Soient A, B, C et D les points d'affixes $z_A = -1 - i$; $z_B = i$; $z_C = 1 + 3i$; $z_D = 5 + i$. Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D.
 - a) Détermine l'écriture complexe associée à S.
 - b) Détermine les éléments caractéristiques de S.
 - c) Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.
Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.