

| <b>Devoir surveillé de la deuxième période 2024-2025</b> |                      |                         |                        |
|----------------------------------------------------------|----------------------|-------------------------|------------------------|
| <b>Epreuve de Mathématiques</b>                          |                      |                         |                        |
| <b>LDST /AEBKO-RD</b>                                    | <b>SERIE : TSexp</b> | <b>Durée : 3 heures</b> | <b>Coefficient : 3</b> |

**Situation 1 :** .....(5pts)

I. On considère la fonction  $f$  de la variable complexe  $z$  définie par :

$$f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i.$$

- 1) Vérifie que  $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$ .
- 2) Résous dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(z) = 0$ .
- 3) Ecris les solutions sous forme trigonométriques.

II. Détermine la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes

a)  $z' = z + 1 - 2i$  ;      b)  $z' = 3z - 1 + i$  ;      c)  $z' = iz + 1$  ;      d)  $z' = (1 + i)z - 1 + i$

III. Calcule les intégrales suivantes

$$A = \int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x} dx;$$

$$B = \int_2^3 \frac{x+1}{x-1} dx$$

**Situation 2 :** .....(5pts)

**A)** On considère les intégrales suivantes

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 1) \cos^2 x dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 1) \sin^2 x dx$$

- 1) Calcule  $I + J$  et  $I - J$ .
- 2) Déduis-en les valeurs de  $I$  et  $J$ .

**B)** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$  par :  $f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$ .

- 1) Détermine les réels  $a; b$  et  $c$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$ , on ait :

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

- 2) A l'aide de la technique de l'intégration par parties, calcule  $I = \int_2^3 \frac{x \ln x}{(x^2-1)^2} dx$ .

**Problème :** .....(10pts)

**Partie A**

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

- 1) Etudie les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
- 2) Etudie les variations de  $g$  sur  $]0; +\infty[$  et dresse le tableau de variation.

3) Déduis-en le signe de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

### Partie B

Soit la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = x - 1 + \frac{2\ln x}{x}$ .

Soit  $(C)$  la représentation graphique de  $f$  dans le repère  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1) Etudie les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

2) a) Montre que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ .

b) Déduis-en le sens de variation de  $f$

3) a) Montre que la droite  $(D)$  l'équation  $y = x - 1$  est une asymptote à  $(C)$ .

b) Etudie la position de  $(C)$  par rapport à  $(D)$ .

4) Détermine l'équation réduite de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'intersection de  $(C)$  et  $(D)$ .

5) Trace  $(D)$ ;  $(T)$  et  $(C)$ .

### Partie C

On désigne par  $h$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $h(x) = \frac{x^2}{2} - x + (\ln x)^2$

1) Montre que  $h$  est une primitive de  $f$ .

2)  $\alpha$  étant un réel donné strictement supérieur à 1. Calcule l'aire  $A(\alpha)$  de la partie du plan limitée  $(C)$  et  $(D)$  et les droites d'équations  $x = \alpha$  et  $x = 1$ .