

Exercice 1

- On considère un polynôme P d'une variable complexe z définies par $P(z) = z^3 - (5 + i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i$
 - Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
 - Déterminer les complexes a, b et c tels que $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$
 - Résoudre l'équation $P(z) = 0$
- On considère les points A, B et C d'affixe respectives $z_A = 3 + i$; $z_B = 2i$ et $z_C = 2 - 2i$ dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 1cm.
 - Déterminer le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ABC .
 - Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ est un carré.
 - Placer les points A, B, C et D .
- Soit R la transformation qui transforme le point B en C et laisse invariant A . Déterminer l'expression complexe de R , déterminer sa nature et ces éléments caractéristiques.

Exercice 2

On considère le nombre complexe $z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$.

- Ecrire z^2 sous forme algébrique.
- Déterminer le module et un argument de z^2 . En déduis le module et un argument de z .
- Déduis de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- Résoudre dans l'ensemble dans $[-\pi; \pi]$ l'équation $(\sqrt{3} + 1) \cos + (\sqrt{3} - 1) \sin = \sqrt{2}$.

Problème : Réponds par Vrai ou faux les affirmations suivantes en justifiant chaque réponse :

- Z est un imaginaire pur si et seulement si $Z = a, a \in \mathbb{R}^*$.
- La forme trigonométrique d'un complexe Z non nul de module différent de 1 et d'argument α est $Z = \cos \alpha + i \sin \alpha$.
- Soit A, B et C trois points du plan d'affixe respectives a, b et c ; ABC est un triangle rectangle en C si et seulement si $\frac{a-b}{c-b}$ est un imaginaire pur.
- Soit f une application du plan P dans lui-même et M' d'affixe z' l'image de M d'affixe z par f tel que $f(M) = M' \Rightarrow z' = az + b$; a est un complexe de module 1. Donc f est une rotation.
- La forme exponentielle d'un complexe z non nul de module r et d'angle θ est $z = re^{-i\theta}$.
- La forme linéarisée de $\cos^3 x = 2\cos 3x + 3$.
- L'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$ admet deux solutions distinctes dans l'ensemble des nombres réels.
- La somme des racines nièmes de l'unité est non nulle.

9. Soit g une application du plan dans lui-même, N' d'affixe z' image de N par g tel que $g(N)=N' \Rightarrow z'=z+a$, g est une symétrie par rapport à l'axe réel.
10. Soit $Z=8-6i$ les racines carrées de Z sont $3+i$ et $3-i$.

NB : Toutes réponses non justifier sont notées zéro.