

DEVOIR DE MATHÉMATIQUE

Année Scolaire : 2024 - 2025 Classe : TSExp
Durée : 3 heures

Lycée : LPFST- Sam

Exercice 1 : _____ (4pts)

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^3 - (2 + \sqrt{2})Z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})Z - 2i\sqrt{2} = 0$

- 1) Détermine le réel y tel que $i y$ soit une solution de (E).
- 2) Détermine les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe Z , on ait:
(E) : $Z^3 - (2 + \sqrt{2})Z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})Z - 2i\sqrt{2} = (Z - i y)(Z^2 + aZ + b)$
- 3) Achève la résolution de (E) puis écris chacune des solutions sous forme trigonométrique.

Exercice 2 : _____ (6pts)

On considère la suite numérique $(U_n) \forall n \in \mathbb{N}$ définie par : $U_n = e^{2n-1}$

- 1) a) Calcule $U_0; U_1; U_2; U_3$ et U_{n-1}
 - b) Démontre que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - c) Exprime en fonction de la somme $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
 - d) Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
 - e) Trouve la valeur minimale de n telle que $S_n \geq 10$.
- 2) Soit la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \ln(U_n)$. On pose $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

Exprime le produit $P_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ en fonction de T_n .

Problème : _____ (10pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty; +\infty[$ par : $f: x \mapsto f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$

et on note (Cf) la courbe représentative de f dans le plan orthonormé $(O; i; j)$ d'unité graphique 2cm.

- 1) Calcule les limites de f aux bornes de D_f .
- 2) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à (Cf) au voisinage de $-\infty$ puis précise la position relative de (Cf) et (Δ)
- 3) a) Étudie les variations de la fonction dérivée f' de f .
- b) Calcule $f'(1)$ puis en déduis le signe de $f'(x)$ sur $-\infty$ et $+\infty$
- c) Dresse le tableau de variations de f .
- 4) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β telles que $1,9 < \alpha < 2$ et $-0,6 < \beta < -0,5$
- 5) Calcule la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ puis en donne une interprétation géométrique.
- 6) Trace (Cf) et (Δ) .