



EXERCICE1/

6points

θ est un réel quelconque, on considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$E(\theta): z^2 - 2(1 + 2\sin\theta)z + 5 + 4\sin\theta = 0.$$

1. Résous dans $\mathbb{C}$, les équations $E(\frac{\pi}{2})$ et $E(\frac{\pi}{3})$ en donnant à θ respectivement les valeurs

$\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$. (1,5pt)

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$, on donne les points A, B, C, D d'affixes respectives : $Z_A = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $Z_B = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $Z_C = \overline{Z_B}$, $Z_D = \overline{Z_A}$.

a) Détermine les formes algébriques des affixes des points puis place les points dans le repère. (0,75pt)

b) Détermine la nature du quadrilatère ABCD et celle du triangle ABD. (1pt)

c) Dédus-en que ces points appartiennent à un cercle γ dont on donnera le centre et le rayon. (1,25pt)

3.a) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $E(\theta)$. (1pt)

b) Démontre que les points qui ont pour affixes les solutions de $E(\theta)$ sont les points de γ . (0,5pt)

EXERCICE 2 /

4points

1°) a) Montre que $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right)^3 =$ (0,75pt)

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = 1$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique. ((0,75pt)

c) Dédus-en des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$z^3 = \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right)^3$. On remarquera que (E) est équivalente à $\left(\frac{Z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \right)^3 = 1$. (1pt)

2. a) Ecrire sous forme trigonométrique. (0,5pt)

b) Dédus-en le module et l'argument des solutions de (E). (0,5pt)

3. Dédus-en des questions 1.c) et 2. b) les valeurs exactes de $\cos$ et $\sin$. (0,5pt)

PROBLEME/

10points

A/ Pour tout nombre complexe z , on définit

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$$

1. Calcule

$P(2)$. Détermine une factorisation de $P(z)$. **1pt**

2.

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **1,5pt**

On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autre que 2, z_1 ayant une partie imaginaire positive.

3. Vérifie que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$. **0,5pt**

4.

Détermine le module et un argument de z_1 et z_2 . **0,75pt**

5. Le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

(Unité graphique 2 cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives 2, z_1 et z_2 et I milieu de $[AB]$. **1pt**

6-Démontre que le triangle OAB est isocèle. Déduis-en une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \widehat{OI})$. **1pt**

7. Calcule l'affixe z_I de I , puis le module de z_I . **0,75pt**

B/ Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (Unité graphique 1 cm). On donne les points D d'affixe $1 - i$.

A tout point M d'affixe z différent de 2 on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{z - 1 + i}{z - 2} \quad \text{On pose } z' = x' + iy' \quad \text{et} \quad z = x + iy$$

1. Exprime les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M . (1,5pt)

2.-Détermine puis construis l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

- 1) $|z'| = 1$ (1pt)
- 2) z' est un réel (1pt)
- 3) z' est imaginaire pur. (1pt)