

Exercice 1 : (6 points)

- 1) Donne la forme exponentielle des nombres complexes suivants : (3pts)
 - a) $z_1 = \pi - 2$
 - b) $z_2 = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$
 - c) $z_3 = 2 \left(\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \right)$
- 2) Détermine la forme algébrique de $z_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2024}$ (0,5pt)
- 3) Linéarise $E = 16 \cos^4 x \cdot \sin^4 x$ (1pt)
- 4) Calcule $(2 - i)^3$. Déduis-en les racines cubiques de $2 - 11i$ (1,5pts)

Exercice 2 : (6 points)

- I. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E): z^4 - 2(1 + \sqrt{3})z^3 + 2(3 + 2\sqrt{3})z^2 - 4(2 + \sqrt{3})z + 8 = 0$$
 - 1) Démontre que si le complexe z_0 est solution de (E) alors il en est de même pour $\overline{z_0}$ (0,5pt)
 - 2) Soit le complexe $z_0 = 1 + i$
 - a) Vérifie que z_0 est une solution de l'équation (E) (1pt)
 - b) En déduis une seconde solution z_1 (0,5pt)
 - 3) Détermine les autres solutions z_2 et z_3 de (E) (1pt)
- II. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3 - i$; $z_B = 1 - 3i$; $z_C = -1 - i$
 - 1) Calcule le rapport $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ puis en déduis la nature du triangle ABC (0,75pt)
 - 2) Détermine l'affixe du point D, centre de la rotation $\mathcal{R}$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme C en A (0,75pt)
 - 3) Soit $\mathcal{S}$ la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C
 - a) Détermine l'écriture complexe de $\mathcal{S}$ (0,75pt)
 - b) Détermine les éléments caractéristiques de $\mathcal{S}$ (0,75pt)

Problème : (8 points)

Dans le plan complexe ($\mathcal{P}$) muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, d'unité graphique 2cm, on considère le point A d'affixe $a = -1$ et l'application f , du plan ($\mathcal{P}$) dans lui-même, qui au point M d'affixe z , distinct de A, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{iz}{z + 1}$$

- 1) Détermine l'affixe des points M tels que $M' = M$ (1pt)
- 2) Démontre que pour tout point M distinct de A et de O, on a :

$$\widehat{OM'} = \frac{OM}{AM} \text{ et } (\vec{u}; \widehat{OM'}) = (\vec{MA}; \widehat{MO}) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près (1pt)}$$
- 3) Soit B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + i$
 - a) Place dans le repère le point B et la médiatrice (Δ) du segment [OA] (0,5pt)
 - b) Calcule sous forme algébrique l'affixe b' du point B' image du point B par f (0,5pt)
Etablis que B' appartient au cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon 1 (1pt)
 - c) En utilisant la question 2, démontre que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M' par f appartient au cercle ($\mathcal{C}$) (1pt)
- 4) Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses. Les questions a) et b) peuvent être traités de façon indépendante
 - a) On pose $z = x + iy$ avec x et y des réels tels que $(x; y) \neq (-1; 0)$ et $(x; y) \neq (0; 0)$
Démontre que la partie imaginaire de z' est : $Im(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}$ (1pt)
 - En déduis la nature et les éléments caractéristiques puis construis (Γ) dans le repère (1pt)
 - b) A l'aide de la question 2, retrouve géométriquement la nature de l'ensemble (Γ) (1pt)