

Devoir n°2 de Mathématiques

Classe : TSExp

27 Novembre 2025

Durée : 2H45

Coef : 03

- ☛ Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires.
- ☛ La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- ☛ L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 :-----[5,5 points]

A. Pour chacune des transformations S suivantes, donne la nature et les éléments caractéristiques. (3,5 pts)

- 1) $z' = (1 - \sqrt{3})z + 3i$; 2) $z' = z - 1 + 3i$; 3) $z' = -2iz + 3i$;
4) $z' = -e^{-i\frac{\pi}{3}}z$; 5) $z' = -3i\bar{z} + 3 - i$.

B. On pose : $z = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$

1. Calcule z^2 puis détermine son module et son argument principale. (1 pt)
2. Dédus-en de ce qui précède le module et un argument de z . (1 pt)

Exercice 2 :-----[04 points]

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points $A(2 - 4i)$; $B(-i)$; $M(z)$ et $M'(z')$ avec

$$z' = \frac{z - 2 + 4i}{z + i} ; \quad z \neq -i$$

1. Exprime les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M . (1 pt)
2. Détermine et représente l'ensemble des points M tels que :
 - a. z' soit un réel. (1pt)
 - b. z' soit un imaginaire pur. (1 pt)
 - c. $|z'| = 1$. (1 pt)

Problème :-----[10,5 points]

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère le polynôme complexe $p(z) = z^4 + (i - 11)z^3 + (43 - 11i)z^2 - (65 - 43i)z - 65i$

- 1) Montre que p admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera. (0,75 pt)
- 2) Montre que p admet une racine réelle z_1 que l'on déterminera. (0,75 pt)
- 3) Détermine toutes les racines dans $\mathbb{C}$ de p . (1,5 pt)
- 4) Soient A, B, C, D et E les points d'affixes respectives :
 $3 + 2i, \quad 3 - 2i, \quad -i, \quad 5$ et $1 + 2i$.
 - a) Place les points A, B, C, D et E . (1 pt)

- b) Détermine la nature des triangles ABD et ABE . (1 pt)
 - c) Démontre que les points B, A, E et C appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre I et de rayon r . (0,75 pt)
 - d) Construis le cercle $(\mathcal{C})$. (0,25 pt)
- 5) Soit $F(4, -1)$. S est la similitude directe de centre C qui transforme A en F .
- a) Détermine l'écriture complexe de S puis détermine son rapport et son angle. (1 pt)
 - b) Détermine l'image du cercle $(\mathcal{C})$ par S . (0,5)
 - c) Montre Le point F appartient-il à $(\mathcal{C})$? Détermine la nature du quadrilatère $AECF$. (0,5pt)
- 6) Soit $(E) : z^2 + (10 \cos \alpha - 4)z - 20 \cos \alpha + 29 = 0$ où $\alpha \in]0; \pi[$.
- a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . (1,5pt)
 - b) Montre que les points images des solutions de (E) appartiennent à $(\mathcal{C})$. (1pt)