

Exercice 1 :

(06 points)

1°) Donne l'ensemble de définition D_f de chacune des fonctions suivantes :

1.1°) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$; 1.2°) $f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$; 1.3°) $f(x) = \frac{2 \sin(x)}{2 \cos(x)-1}$;

1.4°) $f(x) = \frac{x}{|2x-4|-|x-1|}$; 1.5°) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1} + |x| + \frac{1}{x}$

1°) Soit la fonction numérique f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2}, & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = m \end{cases}$$

Quelle valeur faut-il donner à m pour que f soit continue au point $x = 2$?

2°) Soit les deux fonctions numériques $f: x \rightarrow \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}$ et

$$\begin{cases} x \rightarrow g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}, & \text{si } x \neq 3 \\ g(3) = m \end{cases}$$

Quelle valeur faut-il attribuer à m pour que g soit un prolongement de f par continuité au point $x = 3$?

Exercice 2 :

(04 points)

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = |x-1| + \frac{2}{x+1}$

1°) Détermine le domaine de définition de f (0,5pt)

2°) Ecris f sans le symbole de la valeur absolue (1pt)

3°) Étudie la continuité de f au point d'abscisse $x = 1$ (1,25pt)

4°) Étudie la dérivabilité de f au point d'abscisse $x = 1$. (1,25pt)

Problème 3 :

(10 points)

Partie A : (5,5 Points)

1°) a°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$ 1pt

On désigne par z_1 la solution de partie imaginaire positive et par z_2 l'autre solution.

b°) Donne le module et un argument de chacune des solutions z_1 et z_2 puis écris ces deux nombres sous forme trigonométrique. 1,5pt

2°) a°) Place dans le plan complexe les points A ; B ; C et D d'affixes

respectives : $z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $z_B = 1 - i\sqrt{3}$; $z_C = -2 + 2i\sqrt{3}$; $z_D = -2 - 2i\sqrt{3}$ 1,5pt

b°) Détermine la nature du quadrilatère $ACDB$. 0,75 pt

c°) Montre que le triangle ACD est rectangle. 0.75pt

Partie B : (4,5 Points)

On donne les points A et B tels que : $z_A = 6 + 2i$ et $z_B = 2 + 4i$

1°) Détermine la nature du triangle OAB . **0,75pt**

2°) Détermine l'affixe de B' image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et celle de A' image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ **1,25pt**

3°) Réalise la figure. **1pt**

4°) Calcule l'affixe du point k milieu du segment $[A'B']$ **0,75pt**

5°) Calcule $\frac{z_B - z_A}{z'_B - z_{A'}}$. Déduis-en que les droites (AB) et $(A'B')$ sont perpendiculaires et que $AB = A'B'$ **0,75pt**

Exercice 1:

1.1.2.) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$

$\text{df} = \{x \in \mathbb{R}, x+2 \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\}$

$\text{df} = [-2, +\infty[\setminus \{1\}$ (1pt)

1.2. $f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$

$\text{df} = \{x \in \mathbb{R}, \frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6} \geq 0 \text{ et } x^2-x-6 \neq 0\}$

$\text{df} = [-\frac{1-3\sqrt{3}}{2}, -2[\cup]3, \frac{1+3\sqrt{3}}{2}]$ (0,75)

1.3. $f(x) = \frac{2 \sin x}{2 \cos x - 1}$

$\text{df} = \{x \in \mathbb{R}, 2 \cos x - 1 \neq 0\}$

$\text{df} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ (0,75)

1.4. $f(x) = \frac{x}{|2x-4| - |x-1|}$

$\text{df} = \{x \in \mathbb{R}, |2x-4| - |x-1| \neq 0\}$

$\text{df} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{3}, 3\}$ (0,75)

1.5. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x-2} + |x| + \frac{1}{x}$

$\text{df} = \{x \in \mathbb{R}, x-2 \neq 0 \text{ et } x \neq 0\}$

$\text{df} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ (0,75)

1. $f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2}$ si $x \neq 2$
 $f(2) = m$

f est continue en x_0 ($\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$)

(a) $m = -\frac{1}{2}$ (1pt)

2.) $f: x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+3}-4}$

$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+3}-4}$ si $x \neq 3$
 $g(3) = m$

g est le prolongement par continuité déf en 3 si $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = m$ avec $m \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+3}-4} = 2 \Rightarrow m = 2$ (1pt)

Exercice 2: $f(x) = |x-1| + \frac{2}{x+1}$

1.) $\text{df} = \{x \in \mathbb{R}, x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (0,5)

2.) $f(x)$ sans valeur absolue.

Pour $x \in]-\infty, -1[\setminus \{-1\}$, $f(x) = -x+1 + \frac{2}{x+1}$

Pour $x \in]-1, +\infty[$, $f(x) = x-1 + \frac{2}{x+1}$
 $f(1) = 1$ (1pt)

3.) Étude de la continuité en $x=1$
1. $\in \text{df}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$

alors f est continue en $x=1$. (1,25)

4.) Étude de la dérivabilité en $x=1$
1. $\in \text{df}$.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+1 + \frac{2}{x+1} - 1}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - x + 2}{(x-1)(x+1)} = -\frac{3}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 + \frac{2}{x+1} - 1}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \neq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ alors
 f n'est pas dérivable en $x=1$ (1,25)

Problème :

Partie A)

1.) a) Racine de $z^2 - 2z + 4 = 0$

$$S = \{1+i\sqrt{3}; 1-i\sqrt{3}\} \quad (1 \text{ pt})$$

$$z_1 = 1+i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = 1-i\sqrt{3}$$

b) le module et un argument

$$|z_1| = 2 \text{ et } \arg(z_1) = \frac{\pi}{3} \quad (0,5)$$

$$|z_2| = 2 \text{ et } \arg(z_2) = -\frac{\pi}{3} \quad (0,5)$$

* Forme trigonométrique :

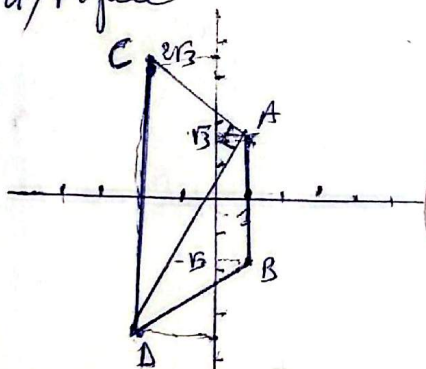
$$z_1 = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$z_2 = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (0,5)$$

2.) $z_A = 1+i\sqrt{3}; z_B = 1-i\sqrt{3}$

$$z_C = -2+2i\sqrt{3}; z_D = -2-2i\sqrt{3}$$

a) Figure



(1,5)

b) Nature de ACDB.

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = 2 \in \mathbb{R}^* \Rightarrow (AB) \parallel (CD)$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \notin \mathbb{R}^* \text{ donc } (AC) \text{ et } (DB) \text{ ne sont pas } \parallel$$

$AB = |z_B - z_A| = |-3-i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} = AC$
Donc ACDB est un trapèze isocèle. (0,75)

c) Montrons que ACD est un triangle rectangle.
 $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = -i\frac{\sqrt{3}}{3} \in i\mathbb{R}^*$ d'où ACD est un triangle rectangle en A. (0,75)

Partie B) $z_A = 6+2i$ et $z_B = 2+4i$

1.) Nature de OAB.

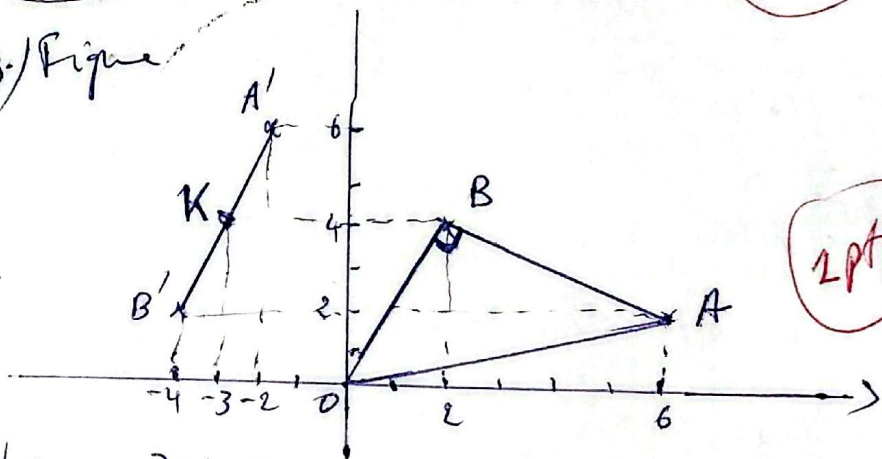
$$\frac{z_A - z_B}{z_D - z_B} = i \text{ donc OAB est un triangle rectangle et isocèle en B. } (0,75)$$

2.) $z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{2}} z_B = i(2+4i) = -4+2i$

$$z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{2}} z_A = i(6+2i) = -2+6i$$

$$(z_{B'} = -4+2i) \text{ et } (z_{A'} = -2+6i) \quad (1,25)$$

3.) Figure



(2pt)

4.) $z_K = \frac{z_{A'} + z_{B'}}{2} = -3+4i \quad (z_K = -3+4i)$

5.) $\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_{A'}} = -i$ alors $(AB) \perp (A'B')$. (0,75)

$$\left| \frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_{A'}} \right| = |-i| \Rightarrow \frac{|z_B - z_A|}{|z_{B'} - z_{A'}|} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = 1 \Leftrightarrow AB = A'B'$$

CQFD

(0,75)