

Devoir: Mathématiques

Lycée:AMA
Coeff:3

Classe: TSEXP
Durée:3heure

Exercice1...../..... (6 Points)

A. On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

1. a. Calcule z^2

b. Calcule le module et un argument de z^2 .

c. Déduis-en le module et un argument de z .

2. Représente dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, unité 2 cm, les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z, -z$ et z^2 .

3. a. Déduis de tout ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$ puis $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

B. Linéarise : $\cos 5x \sin 3x$.

Exercice2..... (6 Points)

I. 1. Soit le nombre complexe $z = \frac{(1+i)^3}{1-i} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^2}$.

a. Ecris z sous forme algébrique.

b. Détermine le module et un argument de $u = -2 + 2i$.

c. Déduis-en la forme trigonométrique et la forme exponentielle de u .

2. a. Calcule $(2 + 3i)^3$.

b. Détermine les racines cubiques de 1.

c. Déduis-en les racines cubiques de $-46 + 9i$.

II. Ecris sous forme exponentielle :

$$z_1 = -8e^{i\frac{\pi}{3}}; \quad z_2 = 2\left(\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12}\right); \quad z_3 = -\sqrt{3} + i.$$

Problème..... (8 Points)

1. Détermine les racines carrées de $-8 - 6i$.

2. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2(1+i)z + 8(1+i) = 0$.

3. On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - 2iz^2 + 4(1+i)z + 16 + 16i$.

a. Calcule $P(-2)$.

b. Montre que l'on peut écrire $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z+2)Q(z)$ où $Q(z)$ est un polynôme du second degré à déterminer

c. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

4. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives $-2, 4i, 2 - 2i$ et $4 + 2i$.

a. Faire une figure.

b. Calcule l'affixe K milieu du segment $[BC]$.

c. Détermine l'écriture complexe de la similitude directe S de centre A qui transforme B en K .

d. Détermine l'angle et le rapport de S .

5. a. Calcule $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

b. En déduire la nature du triangle ABC .

c. Montre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.