

DEVOIR 3 DE MATHÉMATIQUES

DUREE : 3H

TSExp

COEF : 3

EXERCICE 1 : (6 points)1) Ecris en fonction de $\ln 2$ et ou $\ln 3$

$$I = -\ln(4\sqrt{8}) + \ln^3\sqrt{16} - \ln\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \quad \underline{0.75pt} \quad \text{et} \quad K = \ln 18 - \ln\left(\frac{\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}{12}\right) \quad \underline{0.75pt}$$

2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^2 - 3x - 4 = 0$ 0.5ptEn déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation et des inéquations

a) $2\ln(1-x) - \ln(x+5) = 0$ 1pt

b) $\ln(3x+4) < \ln x + \ln x$ 1pt

c) $(\log x)^2 - 3\log x - 4 \leq 0$ 1pt

3) Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 3\log_2(-2x) - 2\log_5(y) = -1 \\ 4\log_2(-2x) + \log_5(y) = 6 \end{cases}$ 1pt**EXERCICE 2 :** (5 points)A- Soit g la fonction définie par $h(x) = \frac{x^2 - 6x + 18}{x(x-3)^2}$ 1- Détermine le domaine de définition Dh 0.5pt2- Montre que pour tout $x \in Dh$, $h(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2}$ 0.75pt3- Déduis-en la primitive H sur $] -\infty, 0[$ qui s'annule en 2 (On prendra $a = 2$; $b = -1$; $c = 3$) 1pt4- En déduire $K = \int_1^2 h(x) dx$ 0.75pt

B- Calcule au moyen d'une intégration par parties :

$$I = \int_1^5 \frac{x-6}{\sqrt{2x-1}} dx \quad \underline{1pt}$$

$$J = \int_2^3 (2x-1) \ln(x-1) dx \quad \underline{1pt}$$

PROBLEME : (9 points)**Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire :**Soit la fonction numérique g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 2x - \ln(x-1)$ 1- Étudie les variations de g et dresse son tableau de variation 2pts2- Calcule $g(2)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]1, +\infty[$ 0.75pt

Partie B : Etude de la fonction principale :

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = -x + 3 + \frac{\ln(x-1)}{x-1}$

On désigne par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1- Calcule les limites des g aux bornes de $]1, +\infty[$ puis en donner une interprétation. **1.25pt**

2- a- Montre que la droite (D) d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à $(\mathcal{C}f)$. **0.5pt**

b- Détermine la position relative de $(\mathcal{C}f)$ par rapport à (D) . **0.5pt**

3- Montre que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$ **0.75pt**

a- En déduire le sens de variations de f **0.5pt**

b- Dresse le tableau de variation f **0.5pt**

4- Construire la courbe $(\mathcal{C}f)$ et la droite (D) **1pt**

5- Soit D le domaine du plan défini par $D = \left\{ M(x, y) \in (\mathcal{P}); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ -x + 3 \leq y \leq f(x) \end{cases} \right. \right\}$

a- Hachure le domaine D et en donner l'interprétation graphique. **0.5pt**

b- En déduire en cm^2 l'aire de D . **0.75pt**