

Exercice 1 :

A. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , l'unité graphique étant égale à 1cm. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{6})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$.

1. Résoudre cette équation sachant qu'elle a deux solutions réelles.
2. On désigne par A, B, C, E et G les points d'affixes respectives $z_A = 3; z_B = 2 + i\sqrt{3}; z_C = -1; z_E = 7$ et $z_G = 11 + 4i\sqrt{3}$.
 - a. Démontre que le triangle IAB est équilatéral.
 - b. Démontre que les points B, C et G sont alignés. Placer les points A, B, C, E et G .
 - c. Trouver l'affixe du point F de l'axe des abscisses tel que le triangle CFG soit équilatéral.

B. On donne deux nombres complexes tels que : $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

1. Calculer le module et l'argument de z_1 et z_2 .
2. En déduire le module et l'argument de : $Z = \frac{z_1}{z_2}$.
3. Utiliser les résultats précédents pour calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 2 :

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = z^2 - (9 + 2i)z + 26$.

- 1) Déterminer le nombre complexe $U^2 = -3 + 4i$ puis résoudre l'équation $f(z) = 0$.
- 2) On pose $z = x + iy$. Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan complexe, tels que $f(z)$ soit un réel. Préciser la nature de cet ensemble.
- 3) Soit les nombres complexes a et b définis par :

$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = -\sqrt{3} + i$. Ecrire : $a; b; \frac{b}{a}$ sous forme trigonométrique.

Problème :

Partie A : Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère le polynôme complexe

$$f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$$

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux autres solutions (où z_1 est la solution complexe dont la partie imaginaire est positive).
3. Représenter dans le plan complexe les points $M_0 ; M_1 ; M_2$ d'affixes respectives $z_0 ; z_1 ; z_2$. Montrer que le triangle $M_0M_1M_2$ est rectangle.

Partie B : On donne $(E): [z^2 - 2(1 + i)z + 4i] \times (z^2 + 4z + 8) = 0$.

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

Les images des racines dans le plan complexe sont notées A, B, C, D tels que :

- A et B ont même abscisse
- A et C ont même ordonnée.

2. Définis la similitude directe $\mathfrak{s}$ du plan complexe telle que : $\mathfrak{s}(A) = C$ et $\mathfrak{s}(B) = D$.

Donne l'angle, le rapport et le centre de Ω .

NB : Les parties A et B sont indépendantes.

Vive les Mathématiques !!!!