

Devoir n°5 de Mathématiques

Classe : TSExp

23 Avril 2026

Durée : 3H

Coef : 03

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 : -----[6,5 points]

A. On considère les équations différentielles ci-dessous :

$(E_1) : x^4 y'' + 3 - x^2 = 0; D = \mathbb{R}_+^* ;$ $(E_2) : y' - 5y = 0; D = \mathbb{R}$

$(E_3) : 9y'' - 6y' + y = 0; D = \mathbb{R};$ $(E_4) : y'' + \frac{1}{4}y = 0; D = \mathbb{R}.$

1. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles (E_1) , (E_2) , (E_3) et (E_4) . **(0, 75 × 4pt)**
2. Détermine la solution g de (E_2) dont la courbe admet au point d'abscisse 2 une tangente (T_0) parallèle à la droite d'équation $y = -x + 3$. **(0, 5pt)**
- B.** 1) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + 5y = 0$. **(0, 75pt)**
- 2) La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (\cos 2x)e^{-x}$ est-elle solution de (E) ? **(0, 75pt)**
- 3) a) Détermine la fonction f solution de (E) vérifiant $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$. **(0, 75pt)**
- b) Détermine les réels r et ω strictement positifs et $\varphi \in]-\pi; \pi]$ tel que :
 $f(x) = e^{-x} r \cos(\omega x + \varphi)$. **(0, 75pt)**

Exercice 2 : -----[3,5 points]

On considère les suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par :

$u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n; v_n = \ln(u_n + 1)$ et $w_n = \ln(v_n)$.

1. Montre que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. **(1pt)**
2. Exprime v_n puis u_n en fonction de n . **(1pt)**
3. Calcule la somme $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ en fonction de n . **(0, 75pt)**
4. Montre que la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison $\ln 2$. Précise son premier terme. **(0, 75pt)**

Problème :-----[10 points]

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1}$.

(C) désigne sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **(1pt)**
2. a) Prouve que la droite (Δ_1) d'équation : $y = x + 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$. **(0, 5pt)**
- b) Précise la position de (C) par rapport à (Δ_1) . **(0, 75pt)**

3. a) Justifie que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a: $f(x) = x - 2 + \frac{4}{1+e^x}$. **(0, 5pt)**

b) Dédus-en que la droite (Δ_2) d'équation : $y = x - 2$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$. **(0, 5pt)**

c) Précise la position de (C) par rapport à (Δ_2) . **(0, 75pt)**

4. a) Prouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$. **(0, 75pt)**

b) Etudie le signe de $f'(x)$. Dédus-en le sens de variation de f . Dresse le tableau de variation de f . **(1, 5pt)**

5. Trace les droites (Δ_1) et (Δ_2) , puis la courbe en précisant sa tangente au point d'abscisse 0. **(1, 5pt)**

6. Demontre que f est une fonction impaire. Dédus-en, sans calcule, la valeur exacte de $\int_{-4}^4 f(x)dx$. **(0, 75pt)**

7. a) Détermine l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$. **(0, 75pt)**

b) Calcule l'aire de la partie du plan limitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$. **(0, 75pt)**