



- ♣ La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
- ♣ Les traces de recherches, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées. (1 pt)
- ♣ Le sujet s'étale sur deux pages numérotées 1/2 et 2/2 et comprend deux situations et une évaluation des compétences. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Situation 1 : 7 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Unité graphique : 2cm

1) Détermine les racines carrées du nombre complexe $8 - 6i$

2) On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 + (-1 + i)z^2 + (2 + 2i)z + 8i$

a) Démontre que $P(z)$ admet une unique racine imaginaire pure αi qu'on déterminera

b) Détermine les complexes $a; b$ et c tels que $P(z) = (z - \alpha i)(az^2 + bz + c)$

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

3) On considère les points $A; B$ et C d'affixes respectives $-1 - i; 2 - 2i$ et $2i$

a) Place les points $A; B$ et C .

b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifie ta réponse.

c) Détermine l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

4) On considère le point E d'affixe $2 + 2i$

a) Place le point E

b) Démontre que les points $A; B; C$ et E sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Situation 2 : 7 points

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.

2. On pose : $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

a) Détermine la forme trigonométrique de a , en déduis que a^{2020} est un réel.

b) Soit le nombre complexe $b = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, montre que : $b^2 = a$.

3. Dans le muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, considérons les points $A; B$ et C d'affixes respectifs : a, b et c avec $c = 1$. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{8}$ et qui transforme le point M d'affixe z en point M' d'affixe z' .

a) Vérifie que : $z' = bz$

b) Détermine l'image du point C par la rotation r et montre que le point A est l'image du point B par la rotation r .

4. a) Montre que : $|a - b| = |b - c|$, en déduis la nature du triangle ABC .

b) Détermine une mesure de l'angle $(\widehat{BA}; \widehat{BC})$.

5. Considérons T la translation du vecteur $\vec{u}$ et soit D l'image de A par la translation :

a) Vérifie que l'affixe de D est le nombre complexe $b^2 + 1$.

b) Montre que : $\frac{b^2+1}{b} = b + \bar{b}$; en déduis que les points O, B et D sont alignés.

EVALUATION DES COMPETENCES : 5 points

Lors d'une étude portant sur l'âge des membres de certaines familles de la capitale malienne BAMAKO. Tu es chargé de la famille « HKPIS 223 », dont le père est professeur retraité des Mathématiques. Après une discussion de prise de contact, il découvre, que tu es élève en classe de TSEXP. Il décide de te donner les âges, avec des notions sur le chapitre des nombres complexes. Il dit : « je suis M ABAITEFO, j'ai une épouse et trois enfants, dont l'ainé **Ategwan**, la benjamine **Awa** et le cadet **Midou**. Soient α, β et γ des nombres complexes non nuls, solutions du polynôme complexe :

$$H(z) = z^3 - (22 + 11i)z^2 + (417 + 194i)z - 1800 + 525i \text{ et } \gamma = 3 - 4i.$$

Les âges de mes enfants sont respectivement de l'ainé à la benjamine, les modules de α, β et γ . L'âge de leur mère correspond au quadruple de celui de l'ainé diminué du triple de la somme des âges de Midou et de la benjamine. Le mien correspond au triple de l'âge de mon épouse diminué de la somme des âges de nos enfants. »

En utilisant tes notions et tes connaissances basées sur le chapitre des nombres complexes, trouve les âges des membres de la famille HKPIS 223. A l'aide d'une rédaction rigoureuse, harmonieuse et l'utilisation des outils mathématiques appropriés.

