

Situation 1 :

1. Détermine une primitive des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

a) $f(x) = -2x + 1$;

c) $f(x) = (3x + 4)(3x^2 + 8x)^4$;

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$;

d) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_{\neq 1}$ par

$$f(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 + 3x - 2}{(x-1)^2}$$

a) Prouve que pour tout $x \neq 1$, f peut s'écrire $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$ où a ; b et c sont des réels que l'on déterminera.

b) Trouve une primitive de f sur son domaine de définition.

Situation 2 :

I. On considère la fonction polynôme définie par :

$$P(x) = -x^3 + 7x - 6.$$

1. a) Calcule $P(2)$.

b) Déduis que $P(x)$ peut s'écrire sous la forme : $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ où a ; b et c désignent trois nombres réels que l'on déterminera.

c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2. Déduis de 1-) les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations :

a) $-(\ln x)^3 + 7\ln x - 6 = 0$.

b) $-e^{3x} + 7e^x - 6 = 0$.

c) $-27^x + 7 \cdot 3^x - 6 = 0$

d) $-\log_2^3(x) + \log_2(x) - 6 = 0$.

II. Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$.

1. Calcule I_0 et I_1 .

2. En utilisant la technique d'intégration par parties, trouve une relation entre I_n et I_{n-2} (on pose : $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$).

3. En déduis I_2 et I_4 .

Situation 3 :

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 2x^2 + \ln x$

1. Etudie le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.
2. a) Montre que $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α sur $[0; +\infty[$.
b) Montre que $0,548 < \alpha < 0,549$
3. Précise le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{2x}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

ayant comme unité graphique 4 cm.

1. a) Détermine les limites de f en 0. Interprète graphiquement le résultat obtenu.
b) Détermine la limite de f en $+\infty$.
c) Montre que la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$. Etudie la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'asymptote (D).
2. a) Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x) = \frac{-g(x)}{2x^2}$.
b) Dresse le tableau de variation de f .
3. a) Montre que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{2\alpha}$.
b) Donne alors un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
4. a) Calcule les coordonnées du point de $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à (D).
Donne une équation de cette tangente T .
b) Trace $(\mathcal{C})$, (D) et (T) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Bonne chance !!!

“La seule manière de démystifier les mathématiques, c'est de faire des exercices.”