

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages de page1 à page2 (Vérifiez que les pages sont au complet). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

EXERCICE 1 : 5,5pts

1) Ecris chacun des nombres suivants sous forme exponentielle.

$$Z_1 = -\sqrt{3} + i \quad 0,5\text{pt} \qquad Z_3 = 1 - e^{i\theta} \quad 0,75\text{pt}$$

2) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, On pose $X = \frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$

a) Exprime X sous forme algébrique. 0,5pt

b) Calcule X^2 et X^3 puis X^{15} . 0,75pt

3) Trouver les complexes Z vérifiant $Z^4 = 1$ 0,75pt

2. Mettre sous forme trigonométrique le complexe $8(1 - i\sqrt{3})$ 0,5pt

3. On Pose $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. Calculer a^4 1pt

4. En déduire les racines 4-ième de $8(1 - i\sqrt{3})$ 0,75pt

EXERCICE 2 : 4,5pts

Soit θ un angle tel que $0 \leq \theta < \pi$.

1) Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) en Z suivante: 2pts
 $Z^2 - 4(1 + \cos\theta)Z + 8(1 + \cos\theta) = 0$. On désigne par Z_1 et Z_2 les solutions de (E).

2) Détermine en fonction de $\frac{\theta}{2}$, le module et l'argument de chacune des solutions Z_1 et Z_2

3) Trouve θ pour que le produit $Z_1 \times Z_2$ soit égal à 4. 1,5pt

PROBLEME : 10pts

A) a est un nombre réel quelconque.

Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (F): $Z^3 - (ai + 2\sqrt{3})Z^2 + (2ia\sqrt{3} + 4)Z - 4ai = 0$.

1) Détermine le nombre réel a pour que $-2i$ soit solution de (F). 0,75pt

2) Détermine le polynôme complexe Q de degré 2, tel que :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{C}, Z^3 + (2i - 2\sqrt{3})Z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})Z + 8i = Q(Z)(Z - \sqrt{3} - i) \quad 1\text{pt}$$

3) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (F) pour $a = -2$. 1pt

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on donne points M, N et Q d'affixes respectives : $\sqrt{3} + i$; $-2i$; $\sqrt{3} - i$.

a) Représente dans le repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$ les points M, N et Q. 0,75pt

b) T désigne le symétrique de M par rapport à $(o, \vec{v})$. Démontre que le triangle TMQ est rectangle en M. 0,75pt

c) Démontre que les points M, Q, N et T appartiennent à un même cercle dont déterminera le centre et le rayon. 1pt

5) Détermine l'expression complexe de la rotation r de centre M et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. 1pt :

B) Dans un repère orthonormé, on considère la transformation T qui fait correspondre à un point M d'affixe Z le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = (1 + i\sqrt{3})Z + 2\sqrt{3}$

1) Quelle est la nature de T. 1pt

2) Soit (D) la droite d'équation $x - y\sqrt{3} = 0$. Trouver l'image de la droite (D') par la transformation T. 1pt

3) Quel est le transformé (C') du cercle (C) de centre A(0, 2) et de rayon $r = 2$. Donner l'équation de (C'). 1pt

~~4) Trace (C) et (C') dans le même repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$. 0,75pt~~