

DEVOIR SURVEILLE DE MATHÉMATIQUES

Exercice

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 4x - 5 = 0$
- 2) En déduire les solutions des équations suivantes
 - a) $\ln x = \ln 5 - \ln(x - 4)$
 - b) $e^x - 4 - 5e^{-x} = 0$
 - c) $3^{2x} - 4 \times 3^x - 5 = 0$
 - d) $(\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x - 5 = 0$
- 3) Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x + 1) \cos^2 x \, dx$; et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x + 1) \sin^2 x \, dx$
 - a) Calculer $I+J$
 - b) En procédant par une intégration par parties déterminer $I-J$
 - c) En déduire les valeurs de I et J

Problème

- A) On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$
 - 1) Etudier les variations de la fonction g
 - 2) Déduire de l'étude précédente le signe de $g(x)$
- B) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \frac{2 \ln x}{x}$. On désigne par (C) la représentation graphique de f
 - 1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
 - 2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Justifier que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est asymptote à la courbe. Etudier la position de (C) par rapport à (D)
 - 3) a) Démontrer que pour tout x de $]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
 - a) Dresser le tableau de variation de f
 - 4) Déterminer le point A de (C) où la tangente (T) est parallèle à (D). Donner une équation de (T)
 - 5) Déterminer les valeurs exactes et les valeurs approchées à 10^{-2} près de $f(x)$ pour les valeurs de x suivantes : $0,3$; $\frac{1}{e}$; 2 ; 5
 - 6) Tracer (C) et (D) dans le plan muni d'un repère orthonormé.