

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

SÉRIE : TSEXP

DURÉE : 3H

Exercice 1 : **5points**

A/Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad z_2 = (-1 + i\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad z_3 = \frac{(1-i)^4}{(-\sqrt{3}-i)^3}$$

B/ 1) On donne le nombre complexe $z = \frac{3+7i}{2-5i}$.a) Ecrire z sous forme algébrique.b) Détermine les racines cubiques de z .2) On considère maintenant le complexe $f(z) = \frac{\bar{z}}{2-i}$ où $\bar{z}$ est le complexe conjugué de z .a) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels.Détermine en fonction de x et y la partie réelle X et la partie imaginaire Y de $f(z)$ b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = \frac{13-i}{5}$.**EXERCICE 2 :** **5points**A/ on donne le nombre complexe Z tel que : $Z = 2 + 3i$ 1) Vérifie que $Z^4 = -119 - 120i$ 2) Détermine les solutions de l'équation $u^4 = 1$.3) Déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation: $Z^4 = -119 - 120i$.B/Pour chacune des transformations f d'écriture complexe, donne la nature et les éléments caractéristiques :

a) $z' = 7z + 2 + 2i$ c) $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 - 4i$

b) $z' = z + 4 - i$ d) $z' = (1 - i)z - 1 + i$

Problème : **10points**Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$ unité graphique 1cm.Soit P le polynôme défini pour tout $Z \in \mathbb{C}$, par : $P(z) = z^3 + z^2 - (5 + 4i)z - 21 + 12i$.1.a) Calcule $P(3)$.

b) Détermine les nombres a , b et c tels que $P(z) = (z - 3)(az^2 + bz + c)$.

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2) On considère les points A, B, et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + 2i$;

$z_B = -3 - 2i$ et $z_C = 3$.

a) Place les points A, B, et C dans le plan complexe.

b) Mettre sous forme algébrique le rapport $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$. En déduis la nature du triangle ABC.

3) Détermine l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

4) Détermine l'affixe du point E, image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

5) Mettre sous forme algébrique le rapport $\frac{z_B - z_A}{z_E - z_A}$. Que peut-on déduire pour les points A, B et E ?