

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

Tsexp - Durée : 3h

Montrer toutes les étapes dans un exposé clair et précis.

~~~~~

**COURS : 1Point**

1. Pourquoi le nombre complexe  $z=0$  n'a pas d'argument ?
2. Soit  $z' = az + b$  l'écriture complexe d'une transformation (F)  
Expliquer quand est ce que (F) est une translation, une rotation, une homothétie, et une symétrie centrale.

**EXERCICE 1 : .....5Points**

- I. On donne  $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$ 
  1. Calculer  $P(i\sqrt{3})$  et  $P(-i\sqrt{3})$
  2. Déterminer le polynôme  $q$  tel que  $P(z) = (z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3})q(z)$ .
  3. a) Placer dans le plan rapporté au repère  $(O; \vec{U}; \vec{V})$  les points A, B, C et D tels que  $Z_A = i\sqrt{3}$ ;  $Z_B = -i\sqrt{3}$ ;  $Z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ ;  $Z_D = \overline{Z_C}$ .  
b) On note E le symétrique de D par rapport à O. Placer E sur le dessin et montrer que  $\frac{Z_C - Z_B}{Z_E - Z_B} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$  en déduire la nature du triangle BEC.
- II. a) Exprimer  $\cos 4x$  et  $\sin 4x$  en fonction de  $\cos x$  et de  $\sin x$   
b) linéariser  $\cos^3 x$ ;  $\sin^2 2x \cdot \cos 3x$ .

**Exercice 2 : .....5Points**

- I.
  1. Déterminer le module et un argument de :  
 $a = \sqrt{3} - i$  et  $b = 1 + i$ ;  $c = 1 + i\sqrt{3}$ ;  $d = \frac{2 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$ .  
En déduire la forme trigonométrique de  $e = \frac{a}{b}$ ;  $g = acide$
  2. On donne  $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ ; Calculer  $z^2$  sous forme algébrique puis sous forme exponentielle. En déduire le module et un argument de  $z$ .
- II.
  1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes (l'image de  $M(z)$  est  $M'(z')$ ):  
 $(R): z' = -z + i$ ;  $(L): z' = 0.5z + 1 - i$ ;  $(O): z' = \frac{\sqrt{3} + i}{2}z$
  2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations d'inconnues  $z$  suivantes :  
a)  $Z^2 + z + 1 = 0$ ; b)  $z^3 - \overline{5z} = 0$ .
  3. Déterminer les racines cubiques de  $4\sqrt{3} - 4i$

**PROBLEME :** .....9Points

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$$

- 1) **Montrer**  $P(2) = 0$  ;
- 2) On pose  $z_1$  la solution dont la partie imaginaire est positive, **résoudre** dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$  après **avoir factorisé**( $z$ ) et vérifier que  $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$  avec  $z_1$  et  $z_2$  des solutions non réelles.
- 3)
  - a) **Placer** dans le plan ( $O ; \vec{U} ; \vec{V}$ ) d'unité 1cm les points A d'affixe 2; le point B d'affixe  $z_1$  et C d'affixe  $z_2$  et I milieu du segment  $[AB]$
  - b) **Calculer**  $z_1$  puis déterminer son module et un de ses arguments (par mesure sur le dessin).
  - c) **Démontrer** que le triangle OAB est isocèle.
  - 4) **Déterminer la valeur exacte de  $\arg z_1$**
  - d) **Déduire** de ce qui précède les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$  et de  $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ .

**BONNE CHANCE**