

Série de Pré-bac N°: 1

Classe : TSExp

Exercice 01 :(05points)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 + (\sqrt{3} - 1)z - \sqrt{3} = 0$.
2. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ les deux équations : $z + \frac{1}{z} = 1$ et $z + \frac{1}{z} = -\sqrt{3}$.
3. On considère le polynôme : $P(z) = z^4 + (\sqrt{3} - 1)z^3 + (2 - \sqrt{3})z^2 - (\sqrt{3} - 1)z + 1$.
4. a) Vérifie que pour tout nombre complexe z non nul, $P(z) = 0$ équivaut à : $\frac{P(z)}{z^2} = 0$.
b) En posant $Z = z + \frac{1}{z}$, exprime $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de Z . En déduis les solutions de $P(z) = 0$.

Exercice 02 :(04points)

1. On se propose de trouver sans les calculer séparément les trois intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx ; J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx \text{ et } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x \, dx$$

- a. Calcule $I - J$ et $I + J + K$
- b. Exprime $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
- c. Déduis-en la valeur de $I + J - 3K$.
- d. En utilisant les questions précédentes donne la valeur de $I ; J$ et K .

Problème :(11points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 + \ln(e^x + e^{-x})$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (Unité graphique : 1 cm).

Partie A : Etude de la fonction f .

1. Montre que pour tout réel x , $f(x) = x + 2 + \ln(1 + e^{-2x})$.
2. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. a) Montre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.
b) Etudie la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D) .
4. a) Vérifie que pour tout réel x , $f(x) = -x + 2 + \ln(1 + e^{2x})$.
b) Montre que la droite (D') d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.
5. a) Etudie les variations de la fonction f .
b) Dresse le tableau de variation de f .
c) Construis la courbe $(\mathcal{C})$ et les asymptotes (D) et (D') .

Partie B : Encadrement d'une intégrale

On pose $I = \int_0^4 (f(x) - x - 2) dx$.

1. Donne une interprétation géométrique de I .
2. Montre que pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, $\ln(1 + t) \leq t$.
3. Donne un encadrement de I .