

Exercice 1 : 10points

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^2 - (1 + i(2 + \sqrt{3}))z - 2(\sqrt{3} - i) = 0.$$

1. a. Vérifier que $2i$ est une solution de (E).
b. Déterminer l'autre solution de (E).
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on note A , B et I les points d'affixes respectives

$$z_A = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_B = 2i \quad \text{et} \quad z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3} + 2}{2}.$$

- a. Mettre les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
- b. Vérifier que I est le milieu de $[AB]$.
- c. Construire les points A , B et I .
3. a) Justifier que la demi-droite $[OI)$ est la bissectrice de l'angle AOB .
- b. Vérifier que $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{6} (2\pi)$ et que $(\vec{u}, \vec{OI}) = \frac{5\pi}{12} (2\pi)$.
- c. En déduire que $z_I = \sqrt{2 + \sqrt{3}} e^{i5\pi/12}$. Donner alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 : 10points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E_1) : z^2 + (2 + i)z + i = 0$.
2. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) :

$$z^3 + (1 + i)z^2 - 2z - i = 0.$$

$$(E) : z^3 + (1+i)z^2 - 2z - i = 0.$$

- a. Vérifier que 1 est une solution de (E) .
- b. Déterminer les nombres complexes a et b tels que :

$$z^3 + (1+i)z^2 - 2z - i = (z-1)(z^2 + az + b).$$

- c. En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation (E) .
3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives

$$z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad z_C = 1.$$

- a. Mettre chacun des nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
- b. Montrer que les points A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1. Construire les points A , B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
4. Soient les points E et F du plan d'affixes respectives

$$z_E = z_A - 1 \quad \text{et} \quad z_F = z_B - 1.$$

- a) Montrer que $OEAC$ et $OFBC$ sont des parallélogrammes.
- b. Construire alors E et F .
- c. Vérifier que

$$e^{i5\pi/12} \left(e^{i7\pi/12} + e^{-i7\pi/12} \right) = e^{-i\pi/6} - 1,$$

$$e^{i13\pi/12} \left(e^{i\pi/12} + e^{-i\pi/12} \right) = e^{i7\pi/6} - 1.$$

- d. Déduire la forme exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E_1) .

Bon courage !!!