

42

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^3 - (4 + i\sqrt{3})Z^2 + (3 + 4i\sqrt{3})Z - 3i\sqrt{3} = 0$

1) Montre que (E) admet deux solutions réelles que l'on notera α et β puis une solution imaginaire pure que l'on notera ω .

2) Soit f , l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout nombre complexe Z , on a : $f(Z) = aZ + b$.

a-Détermine les réels a et b pour que $f(\omega) = \omega$ et $f(\alpha) = \beta$.

b-Calcule le module et un argument de a .

c-Donne la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f .

34

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère :

- Le point A d'affixe $Z_A = 5 - i\sqrt{3}$.
- Le point B d'affixe Z_B est tel que OAB soit un triangle équilatéral direct c'est-à-dire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$.
- Le point Q d'affixe Z_Q est tel que le point Q soit milieu du segment $[OB]$.
- Le point K d'affixe Z_K est tel que $ABQK$ soit un parallélogramme.

- 1) Détermine les affixes Z_B , Z_Q et Z_K respectivement des points B ; Q et K.
- 2) Démontre que $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est un imaginaire pur. En déduis la nature du triangle OKA .
- 3) Soit C le point d'affixe Z_C tel que $Z_C = \frac{2}{3}Z_A$.

Calcule $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$. Que peut-on déduis des points B ; C et K ?

- 1) Soit Z un nombre complexe telque : $2Z^2 + 3\bar{Z}^2 = 5 + i$ (1)
 - a- Démontre que l'on a : $Z^2 + \bar{Z}^2 = 2$ et $Z^2 - \bar{Z}^2 = -2i$.
 - b- En déduis le module et un argument de Z^2 .
 - c- Détermine l'ensemble des nombres complexes vérifiant la relation (1).
- 2) Soit α un réel telque $0 < \alpha < \pi$.
 - a- Résoudre pour tout $Z \in \mathbb{C}$, l'équation (E) : $Z^2 \sin^2 \alpha + Z \sin 2\alpha + 1 + \cos^2 \alpha = 0$.
 - b- Soit Z_1 et Z_2 les solutions de (E). Vérifie que $Z_1^2 + Z_2^2$ est un réel indépendant de α .
 - c- On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé, les points M_1 et M_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2 .
 - d- Détermine α telque $\forall \alpha \in \left] \frac{\pi}{12} ; \pi \right[$; on a : $M_1 M_2 = 2\sqrt{2}$