

Devoir de mathématique N°1

Etablissement : (LP Sangha)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Exercice 1 :

1) Soit $P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

a) Montrer que $P(Z) = 0$ admet une solution réelle Z_0 que l'on déterminera.b) factoriser $P(Z)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(Z) = 0$.

2) Déterminer la forme algébrique de Z' tels que $|Z'| = 2\sqrt{2}$ et $\arg[(1 + i\sqrt{3})Z'] = \frac{7\pi}{12}$

Exercice 2 :

1) Soit $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$.

a) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .b) Ecrire sous forme algébrique et trigonométrique le quotient $Z = \frac{z_2}{z_1}$.c) En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.d) Calculer $(Z)^{2006}$.

2) Linéariser : $\sin^3 2x$; $\cos^5 x$; $\cos^2 x \cdot \sin^3 x$.

Problème :

A) Dans le plan P muni de son repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère l'équation à variable complexe déterminée par $(E) = z^3 - (2 + 2i)z^2 + (2 + 4i)z - 4i = 0$.1) Prouver que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on notera z_0 .2) Achever la résolution de l'équation (E) . On notera z_1 et z_2 les autres solutions trouvées telles que : $\text{im}(z_1) < \text{im}(z_2)$.3) Donner les écritures exponentielles de z_1 et z_2 .4) On considère E , G et F ; les points du plan d'affixes respectives z_0 , z_1 et z_2 .Donner l'expression algébrique du complexe $Z = \frac{z_1 - z_2}{z_0 - z_2}$ puis la nature du triangle EGF .5) Déterminer l'affixe z_3 du point D pour que $EDGF$ soit un parallélogramme.B) Soient A , B , C et D les points d'affixes $z_A = -1 - i$; $z_B = i$; $z_C = 1 + 3i$ et $z_D = 5 + i$ Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D .a) Déterminer l'écriture complexe associée à S .b) Déterminer les éléments caractéristiques de S .

c) Déterminer la nature des transformations suivantes dans le plan complexes et détermine leurs éléments caractéristiques.

a) $z' = z + 1 - 2i$; b) $z' = iz + 1$

c) $z' = 3z - 1 + i$; d) $z' = (1 + i)z - 1 + i$

Devoir de mathématique N°2

Etablissement : (Lycée Mamadou Beye)

Durée : 2H

Coefficient : 3
3pts

Exercice 1 :

Recopier et cocher la bonne réponse :

1) Le nombre complexe $z = 0$ a pour argument :

- a) 0 ☐ b) pas d'argument ☐ c) 1 ☐

2) z est un imaginaire pure si :

- a) $z = \bar{z}$ ☐ b) $z = 2\bar{z}$ ☐ c) $\bar{z} = -z$ ☐

3) Si $|z| = 1$ alors :

- a) $\bar{z} = z$ ☐ b) $\bar{z} = \frac{1}{z}$ ☐ c) $\bar{z} = -z$ ☐

4) $\arg(-z)$ est :

- a) $\pi + \arg(z)$ ☐ b) $-\pi + \arg(z)$ ☐ c) $\pi - \arg(z)$ ☐

5) z est un réel si :

- a) $\operatorname{Re}(z) = 0$ ☐ b) $\operatorname{Im}(z) = 0$ ☐ c) $\operatorname{Im}(z) = 2$ ☐

6) Les points A , B et C sont alignés si :

- a) $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = ib$ ☐ b) $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = b$ ☐ c) $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ☐

Exercice 2 : 6pts

1) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants en précisant la partie réelle et la partie imaginaire :

$$z_1 = (2 + i)^2 ; \quad z_2 = \frac{\sqrt{3} - i}{1 + i\sqrt{3}} ; \quad z_3 = \frac{6 - 4i}{-3 + 2i}$$

2) Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. 3) Linéariser $\sin^4 x$.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $2z - i\bar{z} - 5 + 4i = 0$.

Exercice 3 : 5pts

Donner les nombres complexes suivants $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2 .

2) On pose $z = \frac{z_1}{z_2}$.

a) Déterminer le module et un argument de z . b) Ecrire z sous sa forme algébrique.

c) Ecrire z sous sa forme trigonométrique.

3) En déduire, des questions précédentes, les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Exercice 4 : 6pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

On pose : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 - (4 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z - 7i + 4$.

1) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on donnera.

2) Trouver les nombres complexes a , b et c tels que : $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.

3) a) Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}, z^2 - (4 + 2i)z + 7 + 4i = 0$.

b) En déduire la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

4) Soit A , B et C les points d'affixes respectives : $2 - i$; i et $2 + 3i$.

a) Placer les points A , B et C dans le plan complexe.

b) Calculer le rapport : $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$. En déduire la nature du triangle ABC .

Devoir de mathématique N°3

Etablissement : (Lycée Privé vous et nous de Senou)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Question de cours : _____ 3pts

- 1) Quand dit-on qu'un nombre complexe est un imaginaire pur ? Donne un exemple.
- 2) Compléter les formules suivantes :
 - a) $\arg(z \times z') = \dots\dots\dots$
 - b) $\arg\left(\frac{1}{z^n}\right) = \dots\dots\dots$
- 3) Comment peut-on avoir les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe Z connaissant une de ses racines $n^{\text{ième}} z_0$?

Situation d'évaluation 1 : _____ 6,5pts

- 1) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : 1,5pt

$$z_1 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}(-\sqrt{2} + i\sqrt{6}) \quad ; \quad z_2 = \frac{3-3i\sqrt{3}}{1+i}$$
- 2) On donne pour tout nombre complexe, l'équation (E) : $z^3 = -4\sqrt{2}(1 + i)$.
 - a) Déterminer sous forme trigonométrique les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$. 1,5pt
 - b) Justifier que $z_0 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ est une solution de cette équation. 0,5pt
 - c) En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de (E) sous forme algébrique. 1,5pt
 - d) Dédire des questions précédentes, les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$. 0,5pt
- 3) Linéariser l'expression suivante : $\sin^4 7x$. 1pt

Situation d'évaluation 2 : _____ 10,5pts

- I) On considère la fonction f définie par : $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.
 - 1) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une racine imaginaire pure z_1 à déterminer 0,75pt
 - 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$. 1,25pt
 - 3) En déduire les solutions z_1 ; z_2 et z_3 de cette équation sous forme exponentielle tel que : $\text{Im}(z_2) > 0$ et z_3 l'autre solution. 1,5pt
 - 4) Représenter dans le plan complexe, les points M_1 , M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 puis démontrer qu'ils appartiennent à un même cercle de centre O et de rayon r , à déterminer. 1,5pt
 - 5) Déterminer la nature du triangle $M_2M_1M_3$. 0,75pt
 - 6) Montrer que les points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 sont cocycliques avec M_4 point d'affixe $z_4 = -\sqrt{3} + i$. 0,75pt
 - 7) Compléter la figure pour illustrer l'exercice. 1pt
- II) Soit S la similitude directe qui transforme M_2 en M_1 et M_1 en M_4 .
 - 1) Donner l'expression complexe de cette similitude S . 0,75pt
 - 2) Donner sa nature et ses éléments caractéristiques. 0,75pt
 - 3) Donner l'image du point M_5 d'affixe $z_5 = -\sqrt{3} - 1$. 0,5pt
- III) Soit le polynôme $P(z) = z^2 - (1 + i)z - 2 + 2i$ et le complexe $Z = \frac{z+1-i}{z+i}$. Avec $z = x + iy$
 - 1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $P(z)$ soit un réel. 0,5pt
 - 2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|Z| = 1$. 0,5pt

Devoir de mathématique N°4

Etablissement : (LAGK)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Exercice 1 : _____ 7pts

- 1) Linéariser les expressions suivantes : $\sin^5 x$; $\cos^3 2x$.
- 2) Soit A le point d'affixe $Z_A = \sqrt{3} - i$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
 - a) Déterminer l'affixe de B sous forme algébrique et trigonométrique.
 - b) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
 - a) $Z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)Z + 2i$;
 - b) $e^{i\frac{\pi}{4}}Z + 2 - 4i$

Exercice 2 : _____ 7pts

- 1) Soit l'équation $(E) : Z^3 - Z^2 - (5 + 4i)Z + 3(7 - 4i) = 0$.
 - a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle Z_0 que l'on précisera.
 - b) Déterminer les réels a , b , c tels que $(E) : (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c) = 0$.
 - c) En déduire toutes les solutions de (E) .
- 2) On considère les points A , B , C d'affixes respectives : -3 ; $1 - 2i$; $3 + 2i$.
 - a) Placer les points A , B et C dans le repère $(O ; I ; J)$.
 - b) Calculer $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$; puis en déduire la nature du triangle ABC .
 - c) Démontrer que le point J est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Exercice 3 : _____ 6pts

A tout nombre complexe z distinct de i , on associe le nombre complexe Z tel que : $Z = \frac{z+i}{z-i}$

On pose $z = x + iy$.

- 1) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y .
- 2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.
 - a) Z est un réel.
 - b) Z est un imaginaire pur.
 - c) $|Z| = 1$.

Devoir de mathématique N°5

Etablissement : (LPMCAD)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Exercice 1 : _____ 5pts

1) Ecrire sous forme algébrique les complexes suivants :

$$z_1 = \frac{i}{(1+i)(1-2i)} ; \quad z_2 = \left(1 + \frac{1}{i}\right)(2 - i) ; \quad z_3 = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

2) Ecrire sous forme polaire puis trigonométrique chacun des complexes suivants :

$$z_1 = \frac{-\sqrt{3}+i}{1+i} ; \quad z_2 = (-1+i)e^{-i\frac{4\pi}{6}} ; \quad z_3 = -\cos a + i \sin a$$

3) Déterminer le réel x tel que : $x^2 - 3x + 2 + i(2x^2 + x - 1) = 0$.

4) Ecrire sous forme exponentielle les complexes suivants :

$$z_1 = (7 - \sqrt{7})ie^{i(\frac{\theta}{2})} ; \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{5}) + i \sin(\frac{\pi}{5})]}{2[\cos(\frac{\pi}{3}) - i \sin(\frac{\pi}{3})]} ; \quad z_3 = \left(\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}\right)^n$$

Exercice : _____ 5pts

1) Soit z un nombre complexe, on considère l'équation (E) : $z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$

a) Vérifier que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E).

b) Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité.

c) En déduire dans $\mathbb{C}$ toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z = \sqrt{2} - \frac{1}{z}$

b) $(-1 + 2i)z^2 + (-5 + i)z + 9i + 6 = 0$

c) $z^2 + \bar{z} + 1 = 0$

3) Démontrer que pour tout x , on a : $\cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^4\left(\frac{x}{2}\right) = \cos x$

Problème : _____ 10pts

I) Soient A , B et C trois points d'affixes respectives : $3 + i$, $2i$ et $2 - 2i$.

1) Placer dans le plan complexe les points A , B et C .

2) Démontrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A .

3) Déterminer l'affixe de D telle que $ABCD$ soit un parallélogramme.

II) Soient A , B et C trois points d'affixes respectives : $1 - 3i$, $4 + 5i$ et $-3 + 2i$.

1) Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2) Déterminer l'affixe de D et E vérifiant : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $3\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$.

3) Démontrer que A , D et E sont alignés.

III) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit A , B , C et D les points d'affixes respectives : $4 - 2i$, $-1 + 3i$, 4 ; $-4 - 2i$.

1) Placer ces points dans le repère.

2) On pose $Q_1 = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et $Q_2 = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}$

a) Calculer Q_1 et Q_2 .

b) En déduire que les points A , B , C et D sont cocyclique.

c) Soit Ω le point d'affixe $-i$. Démontrer que Ω est le centre du cercle passant par les points A , B , C et D .

Devoir de mathématique N°6

Etablissement : (LPHNS)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Situation d'évaluation 1 : _____ 5pts

On donne les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$.

- 1) Mettre le nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.
- 2) a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.
b) En déduire la forme trigonométrique de $\frac{z_1}{z_2}$ et celle de $z_1^3 + z_2^2$.
- 3) Des questions précédentes, donner les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Situation d'évaluation 2 : _____ 4pt

- 1) Déterminer les racines cubiques de $8i$ sous forme algébrique.
- 2) Linéariser $\cos^3 x \cdot \sin^2 x$.
- 3) Soit $Z = \frac{z-i}{z-2}$ où z est un nombre complexe différent de 2. Déterminer et construire l'ensemble des point $M(z)$ du plan tels que Z soit réel.

Problème : _____ 11pts

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A :

Soit le polynôme P à coefficients complexes défini par :

$$P(z) = z^3 - (6 + i)z^2 + (10 + 8i)z - 8 - 16i.$$

- 1) Montrer que P admet une racine réelle z_0 à déterminer.
- 2) Déterminer le polynôme Q tel que $P(z) = (z - z_0)Q(z)$.
- 3) Déterminer les racines carrées de $-5 - 12i$.
- 4) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on donne :

$$A(2i) ; B\left(\frac{7}{2}\right) \text{ et } C(2 - i).$$

- 1) Faire une figure que tu complèteras au fur et à mesure.
- 2) Déterminer l'abscisse du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
- 3) Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ puis en déduire la nature du triangle ABC .
- 4) Soit I milieu de $[AB]$. Montrer que les points C , I et D sont alignés.
- 5) Montrer que les points A , B , C et D sont cocycliques.
- 6) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe (S) laissant invariant A et qui transforme D en C .

Devoir de mathématique N°7

Etablissement : (LPHNS)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Exercice 1 : _____ 6pts

Soit le nombre complexe $z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$. On pose : $z_2 = \overline{z_1}$ où $\overline{z_1}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_1 , $z_3 = -z_1$ et $z_4 = z_1 e^{i\frac{2\pi}{3}}$

- 1) Déterminer la forme algébrique de z_1 , z_2 et z_3 .
- 2) Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_2 et z_3 .
- 3) a) Montrer que $z_4 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$.
b) en déduire le module et un argument de z_4 .
c) Quelle est la forme algébrique de z_4 ?
- 4) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A , B , C et D d'affixes respectives z_1 , z_2 , z_3 et z_4 .

- a) Montrer que les points A , B , C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. Construire ce cercle.
- b) Construire les points A , B , C et D en utilisant leurs coordonnées.
- c) Calculer les distances AC et BD .
- d) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Exercice 2 : _____ 4pts

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$. On donne : $A(1)$, $B(i)$, $C(1 - 3i)$ et $D(3 - i)$.

Donner dans chaque cas, l'écriture complexe de la transformation f :

- 1) f est l'homothétie de centre A et de rapport 2.
- 2) f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui laisse invariant le point O .
- 3) f est la similitude directe qui transforme A en C et B en D .

Problème : _____ 10pt

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$. On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.

2) a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2 .

b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$.

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$; unité : 1 cm, on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1 + i)$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1 - i)$ et le point A d'affixe $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- a) Déterminer l'affixe du point M_3 , image de M_2 par l'homothétie de centre A et de rapport -3
- b) Déterminer l'affixe du point M_4 , image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- c) Placer dans un même repère les points A , M_1 , M_2 , M_3 et M_4 .

d) Calculer $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$

e) Soient I le milieu du segment $[M_3M_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I . Montrer que le quadrilatère $M_1M_3M_5M_4$ est un parallélogramme.

f) Calculer $\left| \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \right|$ et en déduire que le parallélogramme $M_1M_3M_5M_4$ est un losange.

g) Calculer $\arg \left(\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \right)$ et en déduire que le losange $M_1M_3M_5M_4$ est un carré.

Devoir de mathématique N°8

Etablissement : (LPHNS)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Exercice 1 : 3,75pts

1) On donne δ et θ tels que : $\delta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $\theta(x) = \cos^2 x \cdot \sin^2 x$.

a) Calculer δ^{2022} en utilisant la formule de Moivre. 0,75pt

b) Donner la forme linéarisée de la fonction θ . 0,75pt

2) a) Calculer $(2+i)^2$ et $(2+i)^4$. 0,75pt

b) Déterminer les racines quatrièmes de l'unité. 0,75pt

c) En déduire les racines quatrièmes de $-7 + 24i$. 0,75pt

Exercice 2 : 6,25pts

Soient les nombres complexes : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$.

1) Compléter le tableau suivant : 5,25pts

Nombres complexes	$z_1 \cdot z_2$	$\frac{z_1}{z_2}$	$(z_1)^3$
Forme algébrique			
Forme trigonométrique			

Les résultats fournis doivent être justifiés.

2) En utilisant le tableau, donner les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$. 1pt

Problème : 10pts

I) Soit l'équation complexe (E) définie par : $(E) : z^3 - (1 + 2i)z^2 + (-9 + 6i)z + 9 + 36i = 0$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_0 à déterminer. 1pt

2) Déterminer les racines carrées de $32i$. 0,75pt

3) Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que (E) s'écrive comme : $(z + 3)(az^2 + bz + c) = 0$. 1pt

4) Donner les solutions de (E). 1,25pt

II) Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On considère les points

A , B et C d'affixes respectifs : $3i$; $4 - i$ et -3 .

1) Place les points A , B et C dans le repère. 1pt

2) Calcule $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$. En déduire la nature du triangle ABC . 1,25pt

3) Déterminer le point D tels que $ABCD$ soit un parallélogramme. 0,75pt

4) Montrer que les points A , D et I sont alignés avec I milieu de $[BC]$. 1pt

5) a) Déterminer le point E image de D par la rotation de centre I et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$. 0,75pt

b) Montrer que les points A , B , C et E appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. 1,25pt

Devoir de mathématique N°9

Etablissement : (LCSFH)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Question de cours : _____ 1pt

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe sous forme algébrique avec a et b des réels. Compléter chacun des propositions ci-dessous.

a) z est un réel si : $\arg(z) = \dots$

b) z est imaginaire pure si : $\arg(z) = \dots$; c) $(\sqrt{z} \times \bar{z})^2 = \dots$; d) $\bar{z}$ est

Exercice 2 : _____ 9pts

Toutes les parties sont indépendantes

Partie I : _____ 1,5pt

Déterminer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = -\sin 2\theta + 2i \cos^2 \theta$ avec $\theta \in]0 ; \pi]$

2) $z_2 = -\sin \theta + i \cos \theta$; 3) $z_3 = \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}$

Partie II : _____ 3,5pts

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le nombre complexe : $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$ et le point A_0 d'affixe $z_0 = 6 + 6i$.

Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $z_n = a^n \times z_0$.

1) Déterminer z_1 et a^2 sous forme algébrique puis les écrire sous forme exponentielle.

2) Exprimer z_3 et z_7 en fonction de z_1 et a^2 .

Partie : III : _____ 4pts

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes

1) Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :
$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1+i)x - 2y + z = 2 - 2i \end{cases}$$

2) $(x ; y ; z)$ étant la solution du système ci-dessus, on désigne par A , B et C les points du plan d'affixes respectives x , y et z .

a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe : $k = \frac{z-x}{z-y}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC puis construire le dans un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

Problème : _____ 10pts

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : _____ 6pts

Soit P le polynôme de la variable complexe z tel que :

$$P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$$

a) Vérifier que pour tout $z \neq 0$, on a : $\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$.

b) En utilisant ce qui précède, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

Partie B : _____ 4pts

Soit (S) la similitude directe qui applique A sur A et B sur C avec A , B et C les points d'affixes respectives $Z_A = 2$; $Z_B = 4 + 2i$ et $Z_C = -2 + 4i$.

1) Déterminer le rapport K et l'angle θ de (S) .

2) En déduire l'expression complexe de (S) .

3) Déterminer l'image par (S) des points A , B et C .

Devoir de mathématique N°10

Etablissement : (LYMG)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Exercice 1 : _____ 6pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

Dans chaque cas, déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

a) $|z - 3i| = 2$

b) $|iz - 2| = 3$

c) $|z - i| = |z + 1 - 2i|$

d) $|\bar{z} - 2 + i| = |z - 2|$.

e) $\arg(z) = \frac{\pi}{3}[\pi]$

f) $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Exercice 2: _____ 6pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; I ; J)$.

Soient les points A, B, C, D et K d'affixes respectives $2 + i$; $2 - i$; $5 - 2i$; $5 + 2i$ et 4 .

1) Montrer que les droites (AB) et (CD) sont alignés.

2) Montrer que les points J, I et B sont alignés.

3) Montrer que les droites (OK) et (DC) sont perpendiculaires.

4) Montrer que le triangle JBD est rectangle en B .

5) Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 3 : _____ 8pts

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ d'unité graphique 1 cm.

Soient les points A, B, C et P d'affixes respectives :

$$Z_A = \frac{3}{2} + 6i ; Z_B = \frac{3}{2} - 6i ; Z_C = -3 - \frac{1}{4}i \text{ et } Z_P = 3 + 2i.$$

On considère le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-1 + \frac{5}{2}i$.

1) Déterminer l'affixe Z_Q du point Q , image de B par la translation de vecteur $\vec{w}$.

2) Déterminer l'affixe Z_R du point R , image de P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

3) Déterminer l'affixe Z_S du point S , image de P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

4) Place les points P, Q, R et S dans le repère.

5) Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.

6) Calcule $\frac{Z_R - Z_Q}{Z_P - Z_Q}$. En déduire la nature du parallélogramme $PQRS$.

7) Démontrer que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Devoir de mathématique N°11

Etablissement : (LPMMK)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Exercice 1 : _____ (5pts)

1) On donne les nombres complexes :

$$z_1 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i} ; \quad z_2 = \frac{5i-1}{-2i+3} \quad \text{et} \quad z_3 = \sqrt{3} + i$$

a) Ecris z_1 et z_2 sous forme algébrique.

b) Calcule z_3^{12} .

2) Résous le système d'inconnues x et y :
$$\begin{cases} 2ix - y = 1 + 2i \\ x + (1+i)y = 2 - 3i \end{cases}$$

On donnera x et y sous forme algébrique.

3) Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$

a) Calcule les modules et arguments de z_1 et z_2 .

b) Donne la forme algébrique et la forme trigonométrique du produit $z_1 \times z_2$.

En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

1pt

0,5pt

1pt

1pt

1pt

0,5pt

Exercice 2 : _____ (6pts)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2 \text{ cm}$.

1) On considère le polynôme P défini par : $P(Z) = Z^3 + Z^2 - 2$

a) Montrer que 1 est une racine de $P(Z)$.

b) Vérifier que $P(Z)$ peut s'écrire sous la forme : $P(Z) = (Z - 1)(Z^2 + 2Z + 2)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$.

2) On considère les points A , B et C d'affixes respectives : $Z_A = 1$; $Z_B = -1 + i$; $Z_C = -1 - i$

a) Construire le triangle ABC .

b) Déterminer l'axe Z_D du point D telle que $ABCD$ soit un parallélogramme.

3) Soit R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que l'expression complexe de R est telle que : $Z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Soit M et M' les points d'affixes respectives $Z = x + iy$ et $Z' = x' + iy'$.

Exprimer les coordonnées x' et y' du point M' en fonction de x et y .

1pt

1pt

0,75pt

0,75pt

1pt

0,75pt

0,75pt

Problème : _____ (9pts)

Soit $f(z) = z^3 - (4 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z - 7i + 4$

1) Montre que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on donnera.

2) Trouve les nombres complexes a , b et c tels que : $f(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$

3) a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (4 + 2i)z + 7 + 4i = 0$.

b) En déduis la résolution de l'équation $f(z) = 0$.

4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$; on donne les points A , B , C d'affixes respectives $2 - i$; i ; $2 + 3i$.

a) Place les points A ; B et C .

b) Calculer $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$. En déduire la nature du triangle ABC .

5) soit S la similitude plane directe de centre A et qui transforme B en C

a) Donne l'expression complexe de S .

b) Donne les éléments caractéristiques de S .

c) Détermine les images A' , B' et C' des points A , B et C par S

d) Construis le transformé de ABC par S .

0,75pt

1,5pt

1pt

0,75pt

0,75pt

1pt

0,5pt

0,75pt

1,5pt

0,5pt

Devoir de mathématique N°12

Etablissement : (LPADD)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Situation d'évaluation 1 : _____ 4pt

- 1) Le but de cette partie est de trouver les racines quatrièmes de $28 - 96i$.
 - a) Déterminer les racines quatrièmes de l'unité 1.
 - b) Calculer $(1 + 3i)^4$.
 - c) En déduire les racines quatrièmes de $28 - 96i$.
- 2) On considère le nombre complexe $Z = \frac{z^2+2}{z}$ tel que $z \neq 0$. Le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ pour que Z soit un réel.

Situation d'évaluation 2 : _____ 6pts

- I) On considère les nombres complexes z et z' . Compléter les formules suivantes :
 - a) $|z \times z'| = \dots\dots\dots$ et $\arg(z \times z') = \dots\dots\dots$
 - b) Pour $z' \neq 0$; $\left| \frac{z}{z'} \right| = \dots\dots\dots$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \dots\dots\dots$

- II) On donne les nombres complexes $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 2 - 2i$.
 - a) Mettre le nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.
 - b) Détermine le module et un argument de z_1 et z_2 .
 - c) En déduire la forme trigonométrique de $z_1 \times z_2$ et $z_1^2 \times z_2$.
 - d) Des questions précédentes, donne les valeurs exactes de $\cos \frac{13\pi}{12}$ et $\sin \frac{13\pi}{12}$.

Situation d'évaluation 3 : _____ 10pts

Partie A :

Soit le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - (7 + 2i)z^2 + (7 + 7i)z - 6 + 30i$.

- 1) Montrer que P admet une racine réelle z_0 à déterminer.
- 2) Déterminer les complexes a ; b et c tels que : $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.
- 3) Déterminer les racines carrées de $-7 + 24i$.
- 4) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on donne les points A ; B et C d'affixes respectifs $-1 - i$; $2 + 3i$ et 6 .

- 1) Fais une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
- 2) Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit parallélogramme.
- 3) Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ puis en déduire la nature du triangle ABC .
- 4) Le point F est l'image du point C par la similitude de centre $\omega(3 - 4i)$, de rapport $k = 2$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que F , A et D sont alignés.

Devoir de mathématique N°13

Etablissement : (LPMAMA)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Exercice 1 :

I) Ecrire sous forme trigonométrique :

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) ; \quad z_2 = -3 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) ; \quad z_3 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$z_4 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) ; \quad z_5 = \cos \theta - i \sin \theta ; \quad z_5 = \sin \theta + i \cos \theta$$

II) 1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$. Ecrire les solutions sous la forme trigonométrique.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$.

2) Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + i$; $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = 2z_B$.

a) Déterminer les formes algébriques de z_B et z_C .

b) Placer les points A, B et C .

c) Montrer que les points A, B et C sont sur le cercle de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$.

d) Calculer $\frac{z_C - 3}{z_A - 3}$, en déduire la nature du triangle IAC .

e) Soit E l'image du point O par la translation de vecteur $2\vec{IC}$. Déterminer l'affixe du point E .

f) Le point D est l'image du point E par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe de D .

g) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 2 :

I) Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{-x^2 + 3x - 2} ; \quad b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{2x - \frac{\pi}{2}}$$

II) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2) Etudier la continuité de f sur $[-1 ; +\infty[$.

3) Montrer que f est dérivable en zéro et préciser la tangente à la courbe représentative en $A \left(0 ; \frac{1}{2} \right)$.

Exercice 3 :

I) On donne le nombre complexe $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

1) a) Calculer u^2 et u^4

b) Calculer le module et un argument de u^4 , en déduire le module et un argument de u .

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. A tout point M de coordonnées (x, y) du plan, on associe son affixe $z = x + yi$.

Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels le module du produit $u \times z$ est égal à 8.

II) Linéariser : $A = \sin 3x \cdot \cos^2 x$ et $B = \cos^4 x \cdot \sin^2 x$.

Devoir de mathématique N°14

Etablissement : x

Durée : 3H

Coefficient : 3

Exercice 1 : _____ 4pts

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & ; \quad \text{si } x > -1 \\ \frac{\sqrt{x+3}-2}{x+1} & ; \quad x < -1 \\ f(-1) = -2 \end{cases}$

- 1) Montrer que la fonction f n'est pas continue en -1 .
- 2) On donne $g(x) = \frac{\sqrt{\cos x+3}-2}{x}$
- a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .
- b) Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0 (On appellera h ce prolongement)

Exercice 2 : _____ 5pts

- 1) On donne $A = \sqrt{2}(1+i)$; $B = \sqrt{3}+i$ et $C = A^3 \times B$.
- a) Déterminer le module et un argument de A et B .
- b) En déduire le module et un argument de C .
- c) Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.
- 2) On donne les affixes des points suivants : $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$; $B\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$; $C\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $D\left(\begin{smallmatrix} k \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.
- a) Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ABC .
- b) Déterminer k pour que les points A , B , C et D soient alignés.

Problème : _____ 11pts

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{-2x^3+2x^2-6x-3}{2x^2}$

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. On désigne par (C_f) la représentation graphique.

Partie A : Etude de la fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3 + 3x + 3$.

- 1) Calculer $f(0)$ et $f^{-1}(3)$.
- 2) f^{-1} est-elle dérivable en 3 ? Si oui calculer $(f^{-1})'(3)$.
- 3) Etudier la fonction g puis dresser son tableau de variation.
- 4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et vérifie que $2,1 \leq \alpha \leq 2,2$.
- 5) Déterminer le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Etude de la fonction principale

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2) a) Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition.
b) Interpréter graphiquement les résultats de la question précédente.
- 3) Déterminer les réels a , b et c sachant que $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x^2}$; puis montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à (C_f) .
- 4) Etudier la position relative de (C_f) et (D) .
- 5) Déterminer les coordonnées du point A de (C_f) où la tangente (T) à (C_f) est parallèle à la droite (D) .
- 6) Tracer (D) , (T) et (C_f) .

Devoir de mathématique N°15

Etablissement : (LPMK)

Durée : 3H

Coefficient : 3

A) Evaluation des ressources :

Situation 1 : _____ 5,5pts

1) Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \quad ; \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2} \quad ; \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} \quad ; \quad d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3}$$

2) Linéariser : $A = \cos^4 x \cdot \sin^2 x$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}^2$, le système : $\begin{cases} -iz + 2iz' = 3 - i \\ (3 + 2i)z - iz' = 1 - i \end{cases}$

4) Soit f la transformation définie par : $Z' = (1 + i)Z - i$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

b) Sachant que : $Z_A = 1 + i$, déterminer l'affixe du point B , image de A par f .

Situation 2 : _____ 5,5pts

On considère les nombres complexes : $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{z_2^3}{z_1}$

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants z_2^3 et Z .

2) Donner les formes trigonométriques de z_1 ; z_2 et Z .

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4) Montrer que z_1^{5100} est un entier.

Situation 3 : _____ 4pts

1) Montrer qu'il existe un nombre imaginaire pur z_0 tel que : $P(z_0) = 0$.

2) Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que : $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$; l'équation : $az^2 + bz + c = 0$.

4) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$; de l'équation $P(z) = 0$.

B) Evaluation des compétences : _____ 5pts

Situation complexe :

Le PMK possède trois terrains dont il veut absolument clôturer pour leur sécurité. Il décide d'utiliser du fil barbelé vendu à 3500 F le rouleau de 5 m.

- Le premier terrain est formé de l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan solutions de l'équation :

$$\operatorname{Re}(Z') = 0 \quad \text{où} \quad Z' = \frac{Z-4-6i}{Z-2i} \quad \text{et} \quad z = x + yi.$$

- Le deuxième terrain est formé de tous les points $M(x ; y)$ du plan vérifiant :

$$|Z - 3 + i| = 5 ; \quad Z = x + yi$$

- Le troisième terrain à la forme d'un rectangle dont les dimensions sont la partie réelle et imaginaire de l'équation : $(1 + 4i) + (3 - 4i)\bar{z} = 8 - 8i$.

NB : Les distance dans tous les terrains sont exprimées en kilomètre.

Consigne :

1) Déterminer le montant à dépenser par le PMK pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le premier terrain.

2) Déterminer le montant à dépenser par le PMK pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le deuxième terrain.

2) Déterminer le montant à dépenser par le PMK pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le deuxième terrain.

Devoir de mathématique N°16

Etablissement : (L San)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Situation 1 : _____ 5pts

A) f est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$.

- 1) Comparer $f(\bar{z})$ et $\overline{f(z)}$.
- 2) Calculer $f(i)$ et $f(-i)$.
- 3) Mets f sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré.
- 4) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.
- 5) Mettre chacune des solutions de l'équation $f(z) = 0$ sous la forme trigonométrique, polaire et exponentielle.
- 6) On appelle A , B , C et D les points d'affixes respectives les solutions de l'équation $f(z) = 0$.
 - a) Place les points A , B , C et D dans le plan complexe.
 - b) Montrer que les points A , B , C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre ω et le rayon r .

Situation 2 : _____ 5pts

1) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{3x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \sin x}{x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 5x}$

2) On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

- a) Déterminer D_f et D_g .
- b) Démontrer que g est le prolongement de f par continuité au point d'abscisse $x_0 = 0$.

Situation problème : _____ 10pts

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + x - 2}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) a) Déterminer le domaine de définition de f .
 - b) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f puis précise les asymptotes.
 - c) Etudie la continuité de f aux points $x_0 = -2$ et en $x_0 = 1$.
 - d) Etudie la dérivabilité de f aux points $x_0 = -2$ et en $x_0 = 1$.
 - e) Déterminer la fonction dérivée f' de f .
 - f) Etudier le sens de variations de f .
 - g) Dresser le tableau de variations de f .
- 2) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de (C) avec l'axe $(O ; \vec{i})$.
- 3) Construire (C) ainsi que les asymptotes dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
- 4) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; -2]$.
 - a) Montrer que h est une bijection de $]-\infty ; -2]$ vers un intervalle J que l'on précisera.
 - b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h . Dresser le tableau de variations de h et de h^{-1} .
 - c) Calculer $h^{-1}(5)$ et $(h^{-1})'(x)$ en fonction de x .
 - d) Pour tout x de J , exprimer $h^{-1}(x)$ en fonction de x .
 - e) Construire sur le même graphique que (C) la courbe (C^{-1}) de h^{-1} .

Devoir de mathématique N°17

Etablissement : (LPFAK)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Exercice : _____ 5pts

1) Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} & ; & b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6} & ; & c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^2 - 4} \\ d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} & ; & b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{4x^2 + 3x + 2} & ; & f) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) \end{aligned}$$

Exercice : _____ 5pts

1) Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes en x_0 .

$$a) \begin{cases} f(x) = x^2 + 6x + 5 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{x+5}{1-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + 1 + \sqrt{x-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2) Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition.

$$a) f(x) = -5x^3 + 2x - 2 \quad ; \quad b) g(x) = \frac{3x-1}{2-x} \quad ; \quad c) h(x) = \cos x - \sin x + (3-2x)^3$$

Problème : _____ 10pts

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{-x}$ où x est une variable réelle

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .

2) Calculer la fonction dérivée f' de f .

3) Donner le sens de variation de f .

4) Déterminer trois nombres réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{-x}$.

5) Démontrer que la droite $(D) : y = -2x - 1$ est asymptote oblique à (C_f) ; puis donner l'autre asymptote.

6) Donner le tableau de variation de f .

7) Préciser la position de (C_f) par rapport à (D) .

8) Tracer (C_f) puis la droite (D) dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ unité graphique 1 cm.

9) Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Devoir de mathématique N°18

Etablissement : (LPVNS)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Situation d'évaluation : _____ 4pts

On donne les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$.

1) Mets le nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.

2) a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

b) Dédus la forme trigonométrique de $\frac{z_1}{z_2}$ et celle $z_1^3 + z_2^2$.

3) Des questions précédentes, donne les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Situation d'évaluation 2 : _____ 7pts

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{|x - 2| - 2}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

b) Montrer que :
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; 2] ; f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{-x} \\ \forall x \in]2 ; 4[\cup]4 ; +\infty[; f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 4} \end{cases}$$

c) Calculer les limites aux bornes de D_f .

2) a) Etudier la continuité de f en 2.

b) Montrer que f n'est pas dérivable en 2. Trouver éventuellement la tangente à gauche et la tangente à droite à la représentation graphique C_f de f au point $x_0 = 2$.

Situation d'évaluation 3 : _____ 10pts

Soit la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1) Etudier les variations de g .

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

3) Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité 1 cm. On considère la fonction f de courbe représentative (C) définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis calculer les limites aux bornes de D_f . Interpréter si possible.

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ et dresser le tableau de variation de f .

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

4) En déduire l'équation de l'asymptote oblique (D) en $-\infty$ et en $+\infty$.

5) Montrer que $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + 3\alpha + 4}{\alpha^2 - 1}$.

6) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D) d'équation $y = x + 2$.

7) Tracer (C) et (D) . On donne : $\alpha = 2,25$ et $f(\alpha) = 5,3$.

Devoir de mathématique N°19

Etablissement : (LPMMK)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Exercice 1 : _____ (4pts)

On considère l'équation : (E) : $z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i = 0$

- 1) Démontre que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 . 1pt
- 2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). 0,75pt
- 3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3$, $z_B = 2i$ et $z_C = 6 - 2i$.
 - a) Place les points A, B et C dans le plan complexe. 0,75pt
 - b) Montre que, $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel. Que peut-on en déduire ? 0,5pt
 - c) Soit S la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ transformant A en B. Donne l'écriture complexe de S et précise son centre Ω . 1pt

Exercice 2 : _____ (6pts)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}$

- a) Détermine l'ensemble de définition de f . 0,5pt
- b) f est-elle prolongeable par continuité en $x_0 = 3$? Si oui définis son prolongement. 0,5pt
- 2) Calcule la fonction dérivée des fonctions suivantes : 2pts
 - a) $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$; b) $f(x) = \cos^5 x$; c) $f(x) = \left(\frac{1-3x}{x+2}\right)^4$; d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{1-4x^2}$
- 1) Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx + c$.
 - a) Détermine les réels a , b et c sachant que, f admet pour extremum 3 au point 1 et pour extremum -1 au point -1 . 1pt
 - b) Dresse le tableau de variation. 1pt
 - c) Représente graphiquement f . 1pt

Problème : _____ (10pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-3}$ où a , b , c et d sont des réels.

- A) Trouve a ; b ; c sachant que la courbe (C_f) de f passe par les points A(2 ; 3) ; B(4 ; 7) et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale. 1,5pt
- B) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-x-5}{x-3}$ et soit (C_f) sa courbe représentative.
 - 1) a) Détermine trois réels α ; β et γ tels que $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-3}$. 0,75pt
 - b) En déduis que (C) admet une asymptote oblique (D) dont on déterminera une équation. 0,5pt
 - c) Etudie la position relative de (C_f) par rapport à son asymptote oblique (D) . 0,5pt
 - 2) Etudie les variations de la fonction f . 2pts
 - 3) Montre que le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie de (C) . 0,5pt
 - 4) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 2$. 0,5pt
 - 5) Trace (C) . 1,5pt
- C) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[4 ; +\infty[$
 - 1) a) Montre que g est une bijection de $[4 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. 0,5pt
 - b) Calcule $g(5)$; $g(6)$ et $(g^{-1})'\left(\frac{15}{2}\right)$. 0,75pt
 - 2) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β . 0,5pt
 - 7) Trace la courbe $(C_{g^{-1}})$ de g^{-1} . 0,5pt

Devoir de mathématique N°20

Etablissement : (LPLK)

Durée : 3H

Coefficient : 3

Exercice 1 :

1) Ecris sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle les complexes suivants :

$$\begin{aligned} a) z_1 &= 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} ; & b) z_2 &= 1 + e^{-i\frac{\pi}{3}} ; & c) z_3 &= \frac{z_1}{z_2} \\ d) 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{2}} ; & e) 1 + e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

2) Ecris sous forme trigonométrique le nombre complexe suivants : $z = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})}{(-1+i)(-1+\sqrt{3})e^{-\frac{\pi}{6}}}$

3) On donne : $z_1 = \frac{3+2i}{5-7i}$ et $z_2 = \frac{3-2i}{5+7i}$

a) démontrer sans calculer que $z_1 + z_2$ est un réel.

b) Démontrer sans calculer que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

4) On donne $P(z) = iz^3 + (4 - 3i)z^2 - (8 + 3i)z + 5i$

a) Démontrer que $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pur notée z_0 . Déterminer cette solution et terminer la résolution. Soient les points M , A , et L ayant pour affixes des solutions de $P(z) = 0$.

b) Place ces points dans le plan complexe rapporté à un repère $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ et déterminer la nature du triangle MAL .

c) Déterminer l'abscisse du point I pour que le quadrilatère $MALI$ soit un parallélogramme.

Exercice 2 :

A) Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2 \tan x}{\cos 2x} ; & \quad 2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(2x - \pi)^2} \\ 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} ; & \quad 4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+13} - 4} \end{aligned}$$

Problème :

A) Soit une fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x+1}$

1) Déterminer α et β sachant que la courbe C_f passe par le point $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ et admet en ce point une tangente (T) de pente -3 .

2) On donne $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x+1}$.

a) Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b) Déterminer les valeurs de a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$. En déduire que la courbe C_f de f admet deux asymptotes et préciser leurs équations.

c) Déterminer la position relative de la courbe C_f par rapport à l'asymptote oblique.

3) Calculer la dérivée $f'(x)$ étudier son signe et dresser son tableau de variations.

4) Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 0.

Devoir de mathématique N°21

Etablissement : (LPHNS)

Durée : 3H

Coefficient : 3
5pts

Exercice :

1) Déterminer l'ensemble des primitives de f sur I dans chaque cas :

a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$; $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = (3x^2 + x)(2x^3 + x^2 + 3)^4$; $I = \mathbb{R}$.

2) Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{4x^2 - 12x + 1}{(4x^2 - 1)^2}$ sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right\}$

a) Déterminer les réels a et b tels que : $g(x) = \frac{a}{(2x+1)^2} + \frac{b}{(2x-1)^2}$.

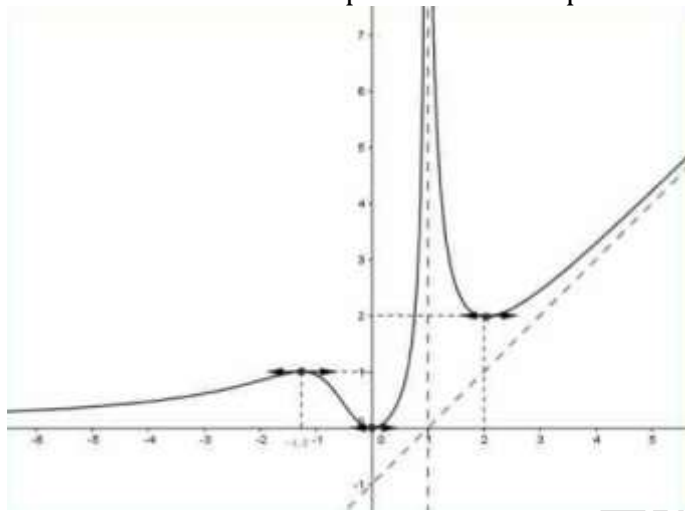
b) Déterminer la primitive de g sur D_g qui prend la valeur -3 en 0 .

c) Calculer $I = \int_1^2 g(x) dx$.

3) En utilisant l'intégration par partie, calculer $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$.

Exercice 2 :

Soit la fonction h définie par sa courbe représentative ci - contre.



1) Déterminer D_h .

2) Donner les limites aux bornes de D_h .

3) Donner les équations des asymptotes à sa courbe.

4) Donner le signe de h sur D_h .

5) Dresser le tableau de variation de h .

Problème :

Partie A :

On donne la fonction g définie par : $g(x) = x^4 + 13x^2 - 14$.

1) Vérifier que $g'(x) = 3x(2x^2 + 13)$ puis dresser le tableau de variation de g .

2) Calculer $g(1)$ et $g(-1)$.

3) Donner le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 7x}{x^2 + 2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Déterminer D_f et les limites aux bornes de D_f .

2) a) Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + \frac{bx+x}{x^2+2}$.

b) En déduire que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote à la courbe (C) .

3) Montrer que la fonction dérivée f' de f s'écrit : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+2)^2}$.

4) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

5) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1 ; +\infty[$.

b) Justifier que $\alpha \in [2 ; 3]$ puis donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

6) Montrer que f est impaire et préciser son centre de symétrie.

7) Etudier la position de (C) par rapport à (Δ) .

8) Tracer la courbe (C) et la droite (Δ) dans un même repère.