

ÉVALUATION N° 1 de MATHÉMATIQUES**Exercice I : (5 Points)**

On considère l'équation suivante :

$$(E) \quad Z \in \mathbb{C}, \quad Z^3 + (2+i)Z^2 + (-3+4i)Z - 10 + 5i = 0.$$

- Démontrer que $(2-i)$ est solution de l'équation (E) . Justifier.
 - Factoriser le polynôme $Z^3 + (2+i)Z^2 + (-3+4i)Z - 10 + 5i$.
 - Déterminer l'ensemble des solutions de (E) .
- Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $2-i$, $-2+i$ et $-2-i$.
 - Faire un dessin et placer ces points (*Unité : cm*).
 - Déterminer le rapport et l'angle S transformant B en C et C en A.
 - Construire l'image de A par cette transformation. On justifiera la construction.

Exercice II : (5 Points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + i$; $z_2 = -\sqrt{3} + i$ et $z_3 = 2i$.

- Écrire une équation de degré 3 dont z_1 , z_2 et z_3 sont solutions.
- Écrire les nombres complexes z_1 , z_2 et z_3 sous la forme trigonométrique.
- Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
 - Montrer qu'une mesure de chacun des angles du triangle ABC est $\frac{\pi}{3}$ radians.
 - En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice III : (5 Points)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$(E) : Z^2 - (1+3i)Z + 4 + 4i = 0$$

- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) .
On appellera Z_1 la solution imaginaire pure et Z_2 l'autre solution.
- Dans le plan complexe (P) rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les quatre points A; B; C, D d'affixes respectives 3 ; $4i$; $-2+3i$; $1-i$.
 - Placer les points A; B; C et D dans le plan.
 - Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{DA}$.
 - En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice IV : (5 Points)

- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$(E) : z^2 + 8\sqrt{3} - 8i = 0$$

- En utilisant la forme trigonométrique.
 - En utilisant la forme algébrique.
- On pourra admettre que $8 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$
- Placer les images des solutions z_1 et z_2 de (E) sur un cercle trigonométrique.
 - Déduire de ce qui précède, la valeur exacte de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$.