

Option TSECS : CAK Epreuve de : MATHSExercice1 . 2pts

Soit Z un nombre complexe défini par : $Z = (2x+1+3i)(2-x-i(x+4))$

Déterminer le réel x tels que : Z soit réel et imaginaire pur

Exercice 2 : 5pts

a) Donner la forme cartésienne des nombres complexes suivants :

$$\bullet Z = 4+2i+(3-2i)^2 \quad Z=(3-i)(1+i\sqrt{3}) \quad Z=\frac{3-2i}{(1+2i)^2} \quad Z=\frac{(3+4i)(2i-1)}{(1-2i)^2}$$

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$2i ; -2-2i ; -\sqrt{3}+i\sqrt{3} ; \frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i} \text{ et } \frac{(1-i)2i}{-1-i\sqrt{3}}$$

Exercice 3 : 6pts

On considère deux nombres complexes définis par :

$$Z_1=1-i \text{ et } Z_2=2+\sqrt{3}+i$$

a) Déterminer une écriture trigonométrique de Z_1

b) Déterminer la forme algébrique de $\frac{Z_2}{Z_1}$ puis vérifier que

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$$

c) En déduire la forme trigonométrique de Z_2

d) Montrer que $(Z_2)^{12}$ est réel pur.

Exercice 4 : 7pts

On pose $U = \cos \theta + i \sin \theta$ et $V = \cos \theta - i \sin \theta$

1. Montrer que $UV=1$. Calculer $U+V$; $U-V$; $U^m \cdot V^m$ et $U^m + V^m$ en fonction de θ

2. Développer $(U+V)^4$ et $(U-V)^4$, puis utiliser les résultats dans 1) pour donner les expressions linéaires de $\cos^4 \theta$ et $\sin^4 \theta$

Bonus : simplifier cette écriture

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \dots + i^{99}$$