

Devoir 6

Exercice 0.1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x+60} - \sqrt{x+12}}{x-4} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{2x^3+x} - \sqrt[3]{2}x ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{2-x}}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(4x)}{\tan x \cdot \sin(x)} ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}$$

Exercice 0.2

Etudier la continuité de la fonction f au point x_0 dans les deux cas suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x-1} \text{ si } x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^3 - x + 36} \text{ si } x \geq 1 \\ x_0 = 1 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{|x^2 - 9|}{x^2 - 3x} \text{ si } x \neq 3 \\ f(3) = 3 \\ x_0 = 3 \end{array} \right.$$

Exercice 0.3

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = x^3 + 2x - \frac{1}{x} - 4$

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+^*$, puis vérifier que $1 < \alpha < 2$
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. Montrer qu'il existe un unique élément $c \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $g(c) = \cos c$.

$$\text{On donne } g\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx -4.2 \text{ et } g\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 0.9$$

Exercice 0.4

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$
2. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$
3. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
4. Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Solution

Exercice 1

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x+60} - \sqrt{x+12}}{x-4}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{h+4+60} - 4) - (\sqrt{h+4+12} - 4)}{h+4-4}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+64-64}{(\sqrt[3]{h+64} + \sqrt[3]{h+64} \cdot 4 + 16)h} - \frac{h+16-16}{(\sqrt{h+16} + 4)h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{h+64} + \sqrt[3]{h+64} \cdot 4 + 16)h} - \frac{1}{(\sqrt{h+16} + 4)h}$$

$$= \frac{1}{48} - \frac{1}{16} = \boxed{-\frac{1}{24}}$$

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2x^3 + x} - \sqrt[5]{2} x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 2x^3}{\sqrt[3]{2x^3 + x}^2 + \sqrt[3]{2x^3 + x} \cdot \sqrt[5]{2} x + \sqrt[3]{4} x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 (\sqrt[3]{2 + x^{-2}} + \sqrt[3]{2 + x^{-2}} \cdot \sqrt[5]{2} + \sqrt[3]{4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x (\sqrt[3]{2 + x^{-2}} + \sqrt[3]{2 + x^{-2}} \cdot \sqrt[5]{2} + \sqrt[3]{4})}$$

$$= \boxed{0}$$

$$l_3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{2 - x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} - \frac{x}{\sqrt[3]{2 + x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} - \sqrt[3]{\frac{x^3}{2 + x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} - \sqrt[3]{\frac{x^2}{2 \cdot x^{-1} + 1}}$$

$$= \boxed{-\infty}$$

$$I_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\tan x \cdot \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{16x^2} \times \frac{x}{\tan x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot 16$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 16 = \boxed{8}$$

$$I_5 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})}{x-3}$$

$$= 27 \times 3 \sqrt[3]{9} = \boxed{81 \sqrt[3]{9}}$$

Exercice 2

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^3 - x + 36} & \text{si } x \geq 1 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt{(h+1)^3 - (h+1) + 36} = \boxed{6}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} f(1+h) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(h+1)^3 + 2(h+1)^2 - (h+1) - 2}{h+1-1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^3 + 5h^2 + 6h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h(h^2 + 5h + 6)}{h} \\ &= \boxed{6} \end{aligned}$$

$$f(1) = \boxed{6} \quad . \quad f \text{ est } \boxed{\text{continue}} \text{ en } x_0 = 1$$

Exercice 3

$$g(x) = x^3 + 2x - \frac{1}{x} - 4 \quad x \in \mathbb{R}_+^*$$

① • g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

• $g'(x) = 3x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} > 0$, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

• $g(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty; +\infty[\ni 0$

Donc $\exists ! \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(\alpha) = 0$

$$g(1) = -2 < 0 \quad g(2) = \frac{17}{2} > 0$$

$$\text{Donc } 1 < \alpha < 2$$

②

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

③ Posons : $h(x) = g(x) - \cos x$ $I = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

- h est continue sur I
- $h'(x) = g'(x) + \sin x > 0$ car $\begin{cases} g'(x) > 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$
- $h(\frac{\pi}{4}) \approx -4,2 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ $h(\frac{\pi}{2}) \approx 0,9 > 0$

Donc $\exists ! c \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ tel que : $\boxed{h(c) = 0}$

cà d : $\boxed{g(c) = \cos c}$

Exercice 4

$f(x) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$ $I = \mathbb{R}_+^*$

- ① les fonctions : $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^3$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

② $f'(x) = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{(\sqrt{x})'}{x}$

$$= -\frac{3}{2x \cdot \sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 < 0$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x} \cdot x}$$

③ f est continue et strictement décroissante
 sur $I = \mathbb{R}^+_{}$, donc elle admet une fonction réciproque
 f^{-1} définie sur $J = f(I) =]1; +\infty[$

④ Soit $x \in I$, $y \in J$:

$$\boxed{y = f(x)} \Leftrightarrow y = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{y} - 1)^2 = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{(\sqrt[3]{y} - 1)^2} = x}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f^{-1}(y) = \frac{1}{(\sqrt[3]{y} - 1)^2}} \quad \forall y \in J$$