

Exercice 1 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4} & ; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x-1} & ; x > 1 \end{cases}$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) Montrer que la fonction f est continue en 1
- 3) Justifier soigneusement que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $I = [2; +\infty[$ par : $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 10$

- 1) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur I .
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]3, 4[$
- 3) Déterminer un encadrement de α de longueur 0,5.
- 4) Déduire le signe de $f(x)$ pour tout $x \in I$.
- 5) Résoudre dans I l'inéquation $f(x) \geq 0$

Exercice 3 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- 2) Montrer que pour tout $\forall x \in D_f$: $f'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$; puis dresser le tableau de variation de f .
- 3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\frac{5}{2}$ puis calculer $(g^{-1})'(\frac{5}{2})$
 - c) Montrer que : $\forall x \in J$: $g^{-1}(x) = \left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^2$