

Durée : 02 heures

○ Exercice 01:(03pts)

⇒ Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(x+2)\sqrt{1-x}+2}{x+3}; \text{ si } x \neq -3 \\ f(-3) = \frac{9}{4} \end{cases}$$

0,5

1)- a)- Déterminer D_f

1

b)- Justifier que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

1,5

2)- Montrer que f est continue en $x_0 = -3$.

○ Exercice 02:(04pts)

⇒ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 5}; \text{ si } x \geq -1 \\ f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{1 - x^2}; \text{ si } x < -1 \end{cases}$$

1

1)- Montrer que f est continue à gauche en $x_0 = -1$.

1,5

2)- Montrer que f est continue sur chacun des intervalle $]-\infty; -1[$ et $[-1; +\infty[$.

1,5

3)- Justifier soigneusement que f est continue sur $\mathbb{R}$.

○ Exercice 03:(06pts)

⇒ Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 3 - 2\sqrt{x+1}.$$

1

1)- a)- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

1

b)- Justifier que f est continue sur I .

1

2)- Montrer que : $(\forall x \in I), f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, puis en déduire que f est

Strictement croissante sur I .

1

3)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = [1; +\infty[$.

1

b)- Montrer que : $(\forall x \in J), f^{-1}(x) = x - 1 + 2\sqrt{x-1}$.

1

4)- Montrer que (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ ont un seul point commun que l'on déterminera.

○ Exercice 04:(07pts)

⇒ Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0]$ par: $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2}$.

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis justifier que f est continue sur $]-\infty; 0]$.

2) Montrer que: $(\forall x \in]-\infty; 0]), f'(x) = \frac{10x}{(x^2 + 1)^2}$, puis en déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$.

b) Montrer que: $\left(\forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 1\right], f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{3+2x}{1-x}}\right)$.

4) a) Montrer que l'équation (E): $x^3 - x^2 + 2x + 3 = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]-1; -\frac{1}{2}\right]$.

b) Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$, puis en déduire que $f(\alpha) = f^{-1}(\alpha)$.

○ Exercices Bonus:

○ Exercice 01:(02pts)

⇒ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^3 + x - 8$.

✓ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

Puis résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation: (E): $2f(x) + 3f^{-1}(x) = 10$.

○ Exercice 02:(02pts)

⇒ On considère l'équation (E): $x^3 - 3\lambda x + 2 = 0$ où $\lambda \in \mathbb{R}^{**}$.

✓ Déterminer suivant les valeurs de λ le nombre de solutions de (E) dans l'intervalle $]0; 2\lambda[$.

○ Exercice 03:(04pts)

✓ Calculer chacune des limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos(2x)}}{x^2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} + \sqrt{4x+1} - 5}{x-2}.$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^3} \right)$$

Fin Du Sujet.