

Exercice 1 :

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ f(3) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 2

2) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 - x + a}{x^2 + 1} & ; x \leq 1 \\ g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - \sqrt{x}} & ; x > 1 \end{cases}$$

Déterminer a pour que g soit continue en 1

Exercice 2 :

1) Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt[3]{10^5} \times \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2} \times \sqrt[3]{2^4}} \quad \text{et} \quad B = \frac{\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{8} \times \sqrt[3]{2}}$$

2) Classer dans l'ordre croissant les nombres :

$$\sqrt{3} ; \sqrt[3]{5} ; \sqrt[4]{7} ; \sqrt[6]{10}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : x^4 = 9 \quad ; \quad (E_2) : x^5 = 2$$

$$(E_3) : (x-1)^3 = -8 \quad ; \quad (E_4) : (x-2)^3 = 27$$

$$(E_5) : x^8 + 3x^4 - 4 = 0$$

$$(E_6) : \sqrt[3]{(x-1)^2} - 3\sqrt[3]{x-1} + 2 = 0$$

$$(E_7) : \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = 12$$

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 + 3x^2 + x}{2x^3 + x^2 + 1} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x}}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - 2x} - 5x \quad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} - x$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} - 3}{x-1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^3 + 5x} - 2x$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{1 - 8x^3} + 3x$$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x - 4$$

1) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$ et que $2 < \alpha < 3$

3) Montrer que α est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$

4) Donner un encadrement de la solution α d'amplitude 0.5

5) Vérifier que : $\alpha = \frac{4}{\alpha^2 - 3}$

6) Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b) Montrer que : g^{-1} est dérivable en 0 et que $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^3 - 1)}$

Exercice 5 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

1) Calculer : $f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

puis déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$

2) Donner une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0 et une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

4) Déterminer $f^{-1}([-7; 0])$

5) Comparer : $f^{-1}(\sqrt{3})$ et $f^{-1}(\sqrt[5]{10})$

6) Vérifier que :

$$f(x) = (x-2)^3 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

7) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Solution de l'exercice 1 :

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2} & x \neq 2 \\ f(3) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)}{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{4x+1})^2 - 3^2}{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x+1-9}{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{\sqrt{4x+1}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

D'où f est continue en 2

2) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 - x + a}{x^2 + 1} & ; x \leq 1 \\ g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - \sqrt{x}} & ; x > 1 \end{cases}$$

Déterminer a pour que g soit continue en 1

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x + a}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1^2 - 1 + a}{1^2 + 1} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \frac{a}{2}$

Maths
Hajoui

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x - \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x^2+3} - 2)(\sqrt{x^2+3} + 2)(x + \sqrt{x})}{(x - \sqrt{x}) \times (x + \sqrt{x}) \times (\sqrt{x^2+3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 + 3 - 4)(x + \sqrt{x})}{(x^2 - x) \times (\sqrt{x^2+3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1)(x + \sqrt{x})}{(x^2 - x) \times (\sqrt{x^2+3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)(x + \sqrt{x})}{x(x-1) \times (\sqrt{x^2+3} + 2)} \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x+\sqrt{x})}{x \times (\sqrt{x^2+3} + 2)} = \frac{4}{4} = 1$$

g est continue en 1

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow a = 2$$

D'où

$$g \text{ est continue en } 1 \Leftrightarrow a = 2$$

Solution de l'exercice 2 :

1) Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt[3]{10^5 \times 3^6}}{\sqrt[3]{15^2 \times 3^4}} \quad \text{et} \quad B = \frac{\sqrt[3]{16 \times 3^2}}{\sqrt[4]{8 \times 3^2}}$$

$$\begin{aligned} \bullet A &= \frac{\sqrt[3]{10^5 \times 3^6}}{\sqrt[3]{15^2 \times 3^4}} = \sqrt[3]{\frac{10^5 \times 3^6}{15^2 \times 3^4}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{(2 \times 5)^5 \times 2^2 \times 3^2}{(3 \times 5)^2 \times 2^4}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2^7 \times 5^5 \times 3^2}{3^2 \times 5^2 \times 2^4}} = \sqrt[3]{2^3 \times 5^3} = 2 \times 5 \end{aligned}$$

Donc $c = 10$

$$\begin{aligned} \bullet B &= \frac{\sqrt[3]{16 \times 3^2}}{\sqrt[4]{8 \times 3^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^4 \times 3^2}}{\sqrt[4]{2^3 \times 3^2}} \\ &= \frac{2^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{2}{4}}} = 2^{\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\right)} \times 3^{\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right)} \\ &= 2^{\left(\frac{32+3-18-8}{24}\right)} = 2^{\frac{9}{24}} \end{aligned}$$

Donc $d = 2^{\frac{9}{24}}$

2) Classer dans l'ordre croissant les nombres :

$$\sqrt{3} ; \sqrt[3]{5} ; \sqrt[4]{7} ; \sqrt[6]{10}$$

Le plus petit multiple commun des nombres 2 ; 3 ; 4 ; 6 est 12

$$\sqrt{3} = \sqrt[2]{3} = \sqrt[2 \times 6]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3 \times 4]{5^4} = \sqrt[12]{625}$$

$$\sqrt[4]{7} = \sqrt[4 \times 3]{7^3} = \sqrt[12]{343}$$

$$\text{et } \sqrt[6]{10} = \sqrt[6 \times 2]{10^2} = \sqrt[12]{100}$$

$$\text{donc } \sqrt[6]{10} < \sqrt[4]{7} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$$

3) Résoudre dans IR les équations suivantes :

$(E_1) : x^4 = 9$; $(E_2) : x^5 = 2$
 $(E_3) : (x-1)^3 = -8$; $(E_4) : (x-2)^3 = 27$
 $(E_5) : x^8 + 3x^4 - 4 = 0$
 $(E_6) : \sqrt[3]{(x-1)^2} - 3\sqrt[3]{x-1} + 2 = 0$
 $(E_7) : \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = 12$

Résolution dans $\mathbb{R}$

de l'équation $x^n = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

	Si n est pair	Si n est impair
Si $a = 0$	$x = 0$	$x = 0$
Si $a > 0$	$x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = -\sqrt[n]{a}$	$x = \sqrt[n]{a}$
Si $a < 0$	Pas de solution dans $\mathbb{R}$	$x = -\sqrt[n]{ a }$

1) L'équation $(E_1) : x^4 = 9$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) dans IR

$(E_1) \Leftrightarrow x^4 = 9$
 $\Leftrightarrow x = \sqrt[4]{9}$ ou $x = -\sqrt[4]{9}$
 $\Leftrightarrow x = \sqrt[2 \times 2]{3^2}$ ou $x = -\sqrt[2 \times 2]{3^2}$
 $\Leftrightarrow x = \sqrt[2]{3}$ ou $x = -\sqrt[2]{3}$
 Donc $S_1 = \{\sqrt{3} ; -\sqrt{3}\}$

2) L'équation $(E_2) : x^5 = 2$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) dans IR

$(E_2) \Leftrightarrow x^5 = 2$
 $\Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2}$
 Donc $S_2 = \{\sqrt[5]{2}\}$

3) L'équation $(E_3) : (x-1)^3 = -8$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) dans IR

$(E_3) \Leftrightarrow (x-1)^3 = -8$
 $\Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{-8}$
 $\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt[3]{2^3} = 1 - 2$
 $\Leftrightarrow x = -1$
 Donc $S_3 = \{-1\}$

4) L'équation $(E_4) : (x-2)^3 = -27$

Soit S_4 l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) dans IR

$(E_4) \Leftrightarrow (x-2)^3 = 27$
 $\Leftrightarrow x-2 = \sqrt[3]{27}$
 $\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt[3]{3^3} = 2 + 3$
 $\Leftrightarrow x = 5$
 Donc $S_4 = \{5\}$



5) L'équation $(E_5) : x^8 + 3x^4 - 4 = 0$

Soit S_5 l'ensemble des solutions de l'équation (E_5) dans IR

$(E_5) \Leftrightarrow x^8 + 3x^4 - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow (x^4)^2 + 3x^4 - 4 = 0$

On pose $x^4 = X$

L'équation devient $X^2 + 3X - 4 = 0$ (*)

On a : $\Delta = (3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 > 0$

Donc l'équation (*) admet deux solutions

$$\begin{cases} X_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-3 - 5}{2} = -4 \\ X_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-3 + 5}{2} = 1 \end{cases}$$

Et comme $x^4 = X \geq 0$ alors

$(E_5) \Leftrightarrow x^4 = 1$
 $\Leftrightarrow x = \sqrt[4]{1} = 1$ ou $x = -\sqrt[4]{1} = -1$
 Donc $S_5 = \{1 ; -1\}$

6) L'équation :

$$(E_6) : \sqrt[3]{(x-1)^2} - 3\sqrt[3]{x-1} + 2 = 0$$

Soit D_6 le domaine de définition de l'équation (E_6)

et S_6 l'ensemble des solutions de cette équation dans IR

L'équation (E_6) est définie ssi $x-1 \geq 0$

$$x \in D_6 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$$

Donc $D_6 = [1; +\infty[$

$$(E_6) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-1})^2 - 3\sqrt[3]{x-1} + 2 = 0$$

On pose : $X = \sqrt[3]{x-1}$

L'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$ (*)

On a $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$

Donc l'équation (*) admet deux solutions

$$\begin{cases} X_1 = \frac{3-\sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3-1}{2} = 1 \\ X_2 = \frac{3+\sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3+1}{2} = 2 \end{cases}$$

$$(E_6) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = 1 \text{ ou } \sqrt[3]{x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 1^3 \text{ ou } x-1 = 2^3$$

$$\Leftrightarrow x = 1+1 = 2 \text{ ou } x = 8+1 = 9$$

Les deux solutions sont dans $D_6 = [1; +\infty[$

$$\text{Donc } S_6 = \{2; 9\}$$

7) L'équation $(E_7) : \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = 12$

Soit D_7 le domaine de définition de l'équation (E_7)

et S_7 l'ensemble des solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$

L'équation (E_7) est définie ssi $x \geq 0$

$$\text{Donc } D_7 = [0; +\infty[$$

$$(E_7) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = 12$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3 \times 2]{x^2} + \sqrt[2 \times 3]{x^3} - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x^3} - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[6]{x})^2 + (\sqrt[6]{x})^3 - 12 = 0$$

$$\text{On pose } \sqrt[6]{x} = X$$

L'équation devient $X^2 + X^3 - 12 = 0$ (*)

$$X^2 + X^3 - 12 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 4 + X^3 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 2^2 + X^3 - 2^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (X-2)(X+2) + (X-2)(X^2+2X+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X-2)(X+2+X^2+2X+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X-2)(X^2+3X+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow X-2 = 0 \text{ ou } X^2+3X+6 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 2$$

Car l'équation $X^2 + 3X + 6 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

$$(\Delta = (3)^2 - 4 \times 1 \times 6 = -15 < 0)$$

Et comme $\sqrt[6]{x} = X \geq 0$ alors

$$(E_7) \Leftrightarrow \sqrt[6]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^6 = 64$$

$$\text{Donc } S_7 = \{64\}$$

Solution de l'exercice 3 :

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5+3x^2+x}{2x^3+x^2+1}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5+3x^2+x}{2x^3+x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$$

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{\sqrt[3]{x^3+x^2+1}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{\sqrt[3]{x^3+x^2+1}} \text{ est une F.I. } \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{\sqrt[3]{x^3+x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \times 4 \sqrt{(x^3+x^2+1)^3}}{3 \times 4 \sqrt{(2x^2-x+3)^4}}$$



$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 \sqrt{(x^3+x^2+1)^3}}{12 \sqrt{(2x^2-x+3)^4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 \sqrt{(x^3+x^2+1)^3}}{12 \sqrt{(2x^2-x+3)^4}}$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3+x^2+1)^3}{(2x^2-x+3)^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3)^3}{(2x^2)^4} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^9}{16x^8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{16} x = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{\sqrt[3]{x^3+x^2+1}} = +\infty$$

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3-2x} - 5x$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3-2x} = +\infty$$

Donc il s'agit d'une forme indéterminée du type $[(+\infty) - (+\infty)]$ avec $\sqrt[3]{1} - 3 \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3-2x} - 5x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)} - 5x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x^2}} - 5x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x^2}} - 5 \right) = -\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x^2}} - 5 = 1 - 5 = -4$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3-2x} - 5x = -\infty$$

4) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x-1} - x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x-1} - x$ s'agit d'une F.I
 $[(+\infty) - (+\infty)]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)} - x$$



$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} - 1 = -1$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x-1} - x = -\infty$$

5) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt{x+3} - 3}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt{x+3} - 3}{x-1}$ est une F.I $\left(\frac{0}{0} \right)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt{x+3} - 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1 + \sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{x-1} + \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} \quad (1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{2x-1} - 1) \left[(\sqrt[3]{2x-1})^2 + \sqrt[3]{2x-1} + 1 \right]}{(x-1) \left[(\sqrt[3]{2x-1})^2 + \sqrt[3]{2x-1} + 1 \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{2x-1})^3 - 1^3}{(x-1) \left[(\sqrt[3]{2x-1})^2 + \sqrt[3]{2x-1} + 1 \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1-1)}{(x-1) \left[(\sqrt[3]{2x-1})^2 + \sqrt[3]{2x-1} + 1 \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{(x-1) \left[(\sqrt[3]{2x-1})^2 + \sqrt[3]{2x-1} + 1 \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\left[(\sqrt[3]{2x-1})^2 + \sqrt[3]{2x-1} + 1 \right]} = \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3-4)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{4} \quad (3)$$

D'après (1), (2) et (3) on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt{x+3} - 3}{x-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

6) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^3 + 5x} - 2x$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type
 $[(+\infty) - (+\infty)]$ avec $\sqrt[3]{8} - 2 = 0$

car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^3} = +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^3 + 5x} - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{8x^3 + 5x})^3 - (2x)^3}{\left[(\sqrt[3]{8x^3 + 5x})^2 + 2x \sqrt[3]{8x^3 + 5x} + (2x)^2 \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 + 3x - 8x^3}{\left[x^2 \left(\sqrt[3]{8 + \frac{5}{x^2}} \right)^2 + 2x^2 \sqrt[3]{8 + \frac{5}{x^2}} + 4x^2 \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2 \left[\left(\sqrt[3]{8 + \frac{5}{x^2}} \right)^2 + 2 \sqrt[3]{8 + \frac{5}{x^2}} + 4 \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x \left[\left(\sqrt[3]{8 + \frac{5}{x^2}} \right)^2 + 2 \sqrt[3]{8 + \frac{5}{x^2}} + 4 \right]} = 0$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(\sqrt[3]{8 + \frac{5}{x^2}} \right)^2 + 2 \sqrt[3]{8 + \frac{5}{x^2}} + 4 \right] = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^3 + 5x} - 2x = 0$$

7) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{1 - 8x^3} + 3x$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type
 $[(+\infty) + (-\infty)]$

car : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{1 - 8x^3} = +\infty$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{1 - 8x^3} + 3x \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{(-x)^3 \left(-\frac{1}{x^3} + 8\right)} + 3x \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \times \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{x^3} + 8\right)} + 3x \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{x^3} + 8\right)} - 3 \right) \\
 \text{et on a : } & \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \\
 \text{Et } & \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{x^3} + 8\right)} - 3 = -1 \\
 \text{Donc } & \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{1 - 8x^3} + 3x = -\infty
 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x - 4$$

1) Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

(car f est un polynôme)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 3$

Déterminons le signe de $f'(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{On a } 3x^2 - 3 = 0 & \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \\
 & \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \\
 & \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'(x)	+	0	--	0	+
f(x)	$-\infty$	-2	-6	$+\infty$	

Avec

$$\bullet f(1) = 1 - 3 - 4 = -6$$

$$\bullet f(-1) = -1 + 3 - 4 = -2$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x - 4 \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x - 4 \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty
 \end{aligned}$$

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$ et que $2 < \alpha < 3$

f est une fonction continue sur $[1; +\infty[$
(car f est un polynôme)

et f strictement croissante sur $[3; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 \text{Avec } f([1; +\infty[) &= [f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[\\
 &= [-6; +\infty[
 \end{aligned}$$

Donc $0 \in f([1; +\infty[)$

Alors : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$

De plus

$$\bullet f(2) = 8 - 6 - 4 = -2$$

$$\bullet f(3) = 27 - 9 - 4 = 14$$

$$\text{donc } f(2) \times f(3) < 0$$

$$\text{D'où d'après le T.V.I } 2 < \alpha < 3$$

3) Montrer que α est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$

la fonction f croissante sur $]-\infty; -1]$ et décroissante sur $[-1; 1]$

donc : $f(-1) = -2$ est la valeur maximale de sur $]-\infty; -1]$

$$\text{alors : } \forall x \in]-\infty; 1] : f(x) \leq -2$$

d'où : l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]-\infty; 1]$

Ainsi

α est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$

4) Donner un encadrement de la solution α d'amplitude 0.5

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α avec $2 < \alpha < 3$

On a le centre de l'intervalle $]2; 3[$

$$\text{est } c = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

et on a :

$$f(c) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3 \times \frac{5}{2} - 4 = \frac{33}{8}$$

$$\text{avec } f(2) = -2$$

$$\text{donc } f(2) \times f\left(\frac{5}{2}\right) < 0$$

$$\text{D'où } 2 < \alpha < \frac{5}{2}$$

et on a l'amplitude de l'encadrement est :

$$l = \frac{5}{2} - 2 = 0,5$$

D'où la précision souhaitée est obtenue

5) Vérifier que : $\alpha = \frac{4}{\alpha^2 - 3}$

α est solution de l'équation $f(x) = 0$

Donc $f(\alpha) = 0$

c.à.d $\alpha^3 - 3\alpha - 4 = 0$

c.à.d $\alpha(\alpha^2 - 3) = 4$

avec $2 < \alpha < \frac{5}{2}$ donc $8 < \alpha^3 < \frac{125}{8}$

donc $\alpha^3 - 3 \neq 0$

$$\text{d'où } \alpha = \frac{4}{\alpha^3 - 3}$$

6) Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

g est continue et strictement croissante sur $I = [1; +\infty[$ Donc :

g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J avec $J = g(I)$

$$g(I) = g([1; +\infty[) = \left[g(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[\\ = [-6; +\infty[$$

$$\text{Donc : } J = g(I) = [-6; +\infty[$$

b) Montrer que : g^{-1} est dérivable en 0

$$\text{et que } (g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^3 - 1)}$$

on a $g(\alpha) = f(\alpha) = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = f'(x) = 3x^2 - 3$$

donc g est dérivable au point α

$$\text{et } g'(\alpha) = 3\alpha^2 - 3 = 3(\alpha^2 - 1)$$

avec $2 < \alpha < \frac{5}{2}$ donc $4 < \alpha^2 < \frac{25}{4}$

$$\text{donc } \alpha^2 - 1 \neq 0$$

D'où g^{-1} est dérivable au point 0

$$\text{et } (g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(\alpha)} = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$$

Solution de l'exercice 5 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

1) Calculer : $f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

et déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

(car f est un polynôme)

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$$

$$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) \geq 0$

Et f' ne s'annule qu'au point 2

D'où : la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Donner une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0 et une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1

• On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$$

donc f est dérivable au point 0

$$f'(0) = 0 - 0 + 12 = 12$$

$f'(0) = 12$ donc la courbe (C_f) admet une tangente (Δ_1) au point $A(0; f(0))$

d'équation

$$[y = f'(0)(x - 0) + f(0)]$$

$$\text{c.à.d } [y = 12(x - 0) - 7]$$

$$\text{D'où } [(\Delta_1) : y = 12x - 7]$$

• On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$$

donc f est dérivable au point 1

$$f'(1) = 3 - 12 + 12 = 3$$

$f'(1) = 3$ donc la courbe (C_f) admet une tangente (Δ_2) au point $B(1; f(1))$

d'équation

$$[y = f'(1)(x - 1) + f(1)]$$

$$\text{c.à.d } [y = 3(x - 1) - 0]$$

$$\text{D'où } [(\Delta_2) : y = 3x - 3]$$

3) Montrer que :

f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J que l'on déterminera

f est continue sur $\mathbb{R}$ (car f est un polynôme) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Donc :

f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J avec $J = f(\mathbb{R})$

$$f(\mathbb{R}) = f(-\infty; +\infty[) \\ =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[\\ =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 6x^2 + 12x - 7 \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 6x^2 + 12x - 7 \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\text{Donc : } J = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

4) Déterminer $f^{-1}([-7; 0])$

D'après la question 2)

$$f(1) = 0 \text{ et } f(0) = -7$$

On sait que : $\forall x \in J$ et $\forall y \in I$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\text{Donc } f^{-1}(0) = 1 \text{ et } f^{-1}(-7) = 0$$

• On sait que la monotonie de la fonction f^{-1} sur l'intervalle $J = \mathbb{R}$ est la même monotonie de la fonction f sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$

Et comme f est continue et strictement croissante sur $I = \mathbb{R}$

Alors

la fonction f^{-1} est continue et strictement croissante sur $J = \mathbb{R}$

et en particulier sur $[-7; 0]$

Donc :

$$f^{-1}([-7; 0]) = [f^{-1}(-7); f^{-1}(0)]$$

$$\text{D'où } f^{-1}([-7; 0]) = [0; 1]$$

5) Comparer : $f^{-1}(\sqrt{3})$ et $f^{-1}(\sqrt[5]{10})$

$$\text{On a : } \sqrt{3} = \sqrt[2 \times 5]{3^5} = \sqrt[10]{243}$$

$$\text{Et } \sqrt[5]{10} = \sqrt[5 \times 2]{10^2} = \sqrt[10]{100}$$

$$\text{Donc } \sqrt[5]{10} < \sqrt{3}$$

la fonction f^{-1} est strictement croissante sur $J = \mathbb{R}$

$$\text{alors } f^{-1}(\sqrt[5]{10}) < f^{-1}(\sqrt{3})$$



6) Vérifier que :

$$f(x) = (x - 2)^3 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$(x - 2)^3 + 1$$

$$= x^3 - 3x^2 \times 2 + 3x \times 2^2 - 2^3 + 1$$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 1$$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

$$= f(x)$$

7) Déterminer :

$$f^{-1}(x) \text{ pour tout } x \in J.$$

Rappel : soit $a \in \mathbb{R}$

$$\text{Si } a \geq 0 \quad x^3 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a}$$

$$\text{Si } a < 0 \quad x^3 = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|a|}$$

Soit $x \in J = \mathbb{R}$ et $y \in I = \mathbb{R}$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)^3 + 1 = x$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)^3 = x - 1$$

On a $x \in J = \mathbb{R}$

• Si $x \geq 1$ alors $x - 1 \geq 0$

Donc

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow (y - 2)^3 = x - 1$$

$$\Leftrightarrow y - 2 = \sqrt[3]{x - 1}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 + \sqrt[3]{x - 1}$$

$$\text{D'où } f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x - 1}$$

• Si $x < 1$ alors $x - 1 < 0$

$$\text{Donc } f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow (y - 2)^3 = x - 1$$

$$\Leftrightarrow y - 2 = -\sqrt[3]{|x - 1|}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 - \sqrt[3]{1 - x}$$

$$\text{D'où } f^{-1}(x) = 2 - \sqrt[3]{1 - x}$$

Conclusion :

f^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$

$$\bullet \text{ si } x \geq 1 \quad f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x - 1}$$

$$\bullet \text{ si } x < 1 \quad f^{-1}(x) = 2 - \sqrt[3]{1 - x}$$

