

Exercice : 1

① Calculez les limites suivantes:

a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2 + 3x - 5} + x$

b $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}}$

c $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2x)^{2026} - 1}{x}$

d $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 6\sqrt{x}}{2x + \sqrt{x} - 3}$

e $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 2x - 3}$

f $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^3 - a^3} (a > 0)$

g $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x^2 - 2x}$

h $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + x^2 + 2}}{x + 2}$

i $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}$

② Simplifier les nombres suivants :

a $A = \frac{\sqrt[5]{3\sqrt[3]{2^4}} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot (\sqrt[7]{4})^7}{\sqrt[3]{16} \times \sqrt{\sqrt[3]{32}}}$

b $B = \frac{\sqrt[4]{3} \times \sqrt[20]{3} \cdot \sqrt[4]{9} \times 27^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{243} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

③ Ordonner dans l'ordre croissant les nombres : $A = \sqrt{2}$; $B = \sqrt[3]{4}$; $C = \sqrt[6]{5}$; $D = \sqrt[4]{3}$ ④ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a $\sqrt[3]{x} = \sqrt[9]{7}$

b $x^8 - 25 = 0$

c $x^6 + 3x^3 - 4 = 0$

Exercice : 2

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 1 - \sqrt{1 + 2x}}{x} & \text{si } x \neq 0. \\ f(0) = -1 \end{cases}$

① Déterminer D_f , ensemble de définition de f .② a Montrer que f est continue en 0 .b Justifier la continuité de f sur D_f .③ a Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]0, 1[$.b Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.25c Montrer que α est solution de l'équation $x^3 + 2x - 2 = 0$. déduire que

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^3 + 2x - 2}{x - \alpha} = \frac{6}{\alpha} - 4.$$

Exercice : 3

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par : $f(x) = x - 3 + 2\sqrt{x+1}$.

- ① **a** Étudier la dérivabilité de f à droite en -1 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- b** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1; +\infty[$
- c** Dresser le tableau de variation de f .
- ② Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[-1, +\infty[$ une unique solution α et que $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$.
- ③ Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et que $(f^{-1})'(0) = \frac{\alpha - 3}{\alpha - 5}$.
- ④ **a** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur un intervalle J que l'on déterminera.
- b** Expliciter $f^{-1}(x)$, pour $x \in J$.

Exercice :4

Étudier la dérivabilité de la fonction f et calculer la fonction dérivée dans chacune des cas suivantes :

- ① $f(x) = (x^3 + x)^8$ | ② $f(x) = \cos(\sqrt{x^4 + 2})$ | ③ $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - x}$

Exercice :5

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$

- ① Montrer que : $D_f = [1; +\infty[$.
- ② Montrer que : $\forall x \in [1; +\infty[: f(x) > 0$
- ③ Déterminer : $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[1; +\infty[$, en déduire que f est décroissante sur $[1; +\infty[$
- ④ Montrer que : $\forall x \in [1; +\infty[: \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$
- ⑤ **a** Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J qu'elle faut déterminera.
- b** Calculer $f(4)$ en déduire que f^{-1} est dérivable en $2 - \sqrt{3}$ et déterminer $(f^{-1})'(2 - \sqrt{3})$.
- ⑥ Montrer que : $\forall x \in J : f^{-1}(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2}$.