

Professeur : RACHID FANIDI

Lycée AL Massira EL Khadraa Tiznit

Classe : 2BAC SPF-SVTF

Devoir Surveillé 01-S1-

Module A

Durée : 2 heures



6.5pts

EXERCICE 01

Les questions de cet exercice sont indépendantes

1pts

1) Simplifier le nombre suivant: $A = \frac{\sqrt[3]{729} \times \sqrt{81} \times 9^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3^{17}}}$

1pts+1pts

2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{x-1} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - 3x$$

1pts

3)a- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{4}$.

1pts

b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I): $\sqrt[3]{3x-1} < 2$

1.5pts

4) Calculer la dérivée des fonctions suivantes : $f(x) = \sqrt{x^2 + 7x + 3}$ et $g(x) = \sin(\sqrt{x^2 + 5})$

5pts

EXERCICE 02

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 12x - 8$.

1pts

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

1.5pts

2) Soit g la restriction de f sur $I = [0; +\infty[$

a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur I et que $0 < \alpha < 1$.

0.75pts

b- Montrer que : $\alpha = 2\sqrt{1 - \frac{3}{2}\alpha}$.

0.75pts

3)a- Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

1pts

b- Montrer que g^{-1} est dérivable en 0 et que : $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 + 4)}$.

8.5pts

EXERCICE 03

On considère la fonction f définie sur par : $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$

1.25pts

1) Déterminer D_f puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

0.75pts

2) Montrer que f est continue sur D_f

1.5pts

3) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 ; puis interpréter le résultat obtenu géométriquement.

1pts

4)a- Montrer que pour $x \in]1; +\infty[$: $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)}$

1pts

b- Donner le tableau des variations de la fonction f .

5) Soit g la restriction de f sur $I =]2; +\infty[$.

0.75pts

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

0.75pts

b- Donner le tableau de variations de la fonction g^{-1} .

1.5pts

c- Vérifier que : $g(x) = (\sqrt{x-1} - 1)^2$ puis Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Correction du Devoir surveillé 02 2BAC PC-SVT-STE-STM

Ex1

① ma $A = \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{729}} \times \sqrt{\sqrt{81}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{\sqrt[3]{3^{17}}}$: ②

$$= \frac{\sqrt[3]{729} \times \sqrt[4]{81} \times 9^{\frac{5}{2}}}{\sqrt[3]{3^{17}}}$$

$$= \frac{9\sqrt{3^6} \times \sqrt[4]{3^4} \times (3^2)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt[3]{3^{17}}}$$

$$= \frac{3^{\frac{6}{2}} \times 3^{\frac{4}{4}} \times 3^{2 \times \frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$$

$$= \frac{3^{\frac{1}{3}} \times 3 \times 3^5}{3^{\frac{17}{3}}}$$

$$= \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 3^6}{3^{\frac{17}{3}}}$$

$$= \frac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}}$$

$$= 3^{\frac{20}{3} - \frac{17}{3}}$$

$$= 3^{\frac{3}{3}}$$

D/bu $A = 3$

$$\neq \text{ma } \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3n+5} - 2}{n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3n+5}^3 - 2^3}{(n-1)(\sqrt[3]{3n+5}^2 + 2\sqrt[3]{3n+5} + 2^2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{3n+5 - 8}{(n-1)(\sqrt[3]{3n+5}^2 + 2\sqrt[3]{3n+5} + 4)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{3n - 3}{(n-1)(\sqrt[3]{3n+5}^2 + 2\sqrt[3]{3n+5} + 4)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{3(n-1)}{(n-1)(\sqrt[3]{3n+5}^2 + 2\sqrt[3]{3n+5} + 4)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{3}{\sqrt[3]{3n+5}^2 + 2\sqrt[3]{3n+5} + 4}$$

$$= \frac{3}{(3\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 3\sqrt{2} + 4}$$

$$= \frac{3}{4 + 4 + 4}$$

$$= \boxed{\frac{3}{12}}$$

④

$$\begin{aligned}
 * \text{ona } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt[3]{n^3 + \frac{2}{n}} - 3n \\
 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt[3]{n^3 \left(1 + \frac{2}{n^4}\right)} - 3n \\
 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot 3\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n^4}} - 3n \\
 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(3\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n^4}} - 3\right)
 \end{aligned}$$

$$= -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$$

3) a.

$$(E): 3\sqrt[3]{2+n} + 3\sqrt[3]{2-n} = 3\sqrt[3]{4}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot \text{ona } D_E &= \{n \in \mathbb{R} / 2+n > 0 \text{ et } 2-n > 0\} \\
 &= \{n \in \mathbb{R} / n > -2 \text{ et } n < 2\} \\
 &= \{n \in \mathbb{R} / -2 < n < 2\}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } D_E = [-2, 2]$$

$$\cdot \cdot \text{ soit } n \in [-2, 2] \text{ ona:}$$

$$(3\sqrt[3]{2+n} + 3\sqrt[3]{2-n}) = 3\sqrt[3]{4} \Leftrightarrow (3\sqrt[3]{2+n} + 3\sqrt[3]{2-n})^3 = (3\sqrt[3]{4})^3$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{2+n}^3 + 3 \cdot 3\sqrt[3]{2+n} \cdot 3\sqrt[3]{2-n} (3\sqrt[3]{2+n} + 3\sqrt[3]{2-n}) + 3\sqrt[3]{2-n}^3 = 4$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2+n} + 3 \cdot 3\sqrt[3]{(2+n)(2-n)} \times 3\sqrt[3]{4} + \cancel{2-n} = 4$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 3\sqrt[3]{4} \cdot 3\sqrt[3]{(2+n)(2-n)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(2+n)(2-n)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2+n)(2-n) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2+n=0 \text{ ou } 2-n=0 \quad (2)$$

$$\cdot (E) \quad n = -2 \text{ ou } n = 2 \in D_E$$

$$\text{Donc } S = \{-2, 2\}$$

$$b) (I): 3\sqrt[3]{3n-1} < 2$$

$$\begin{aligned}
 \cdot \text{ona } D_I &= \{n \in \mathbb{R} / 3n-1 > 0\} \\
 &= \{n \in \mathbb{R} / 3n > 1\} \\
 &= \{n \in \mathbb{R} / n > \frac{1}{3}\} \\
 &= \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[
 \end{aligned}$$

$$\cdot \cdot \text{ soit } n \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$$

$$\text{ona } 3\sqrt[3]{3n-1} < 2 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{3n-1}^3 < 2^3$$

$$\Leftrightarrow 3n-1 < 8$$

$$\Leftrightarrow 3n < 9$$

$$\Leftrightarrow n < 3$$

$$\Leftrightarrow n \in]-\infty; 3[$$

$$\text{Donc: } S =]-\infty; 3[\cap \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$$

$$S = \left[\frac{1}{3}; 3\right[$$

4) on a $f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2+7x+3} \right)'$

$$= \frac{(x^2+7x+3)'}{3 \cdot \left(\sqrt[3]{x^2+7x+3} \right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x+7}{3 \cdot \left(\sqrt[3]{x^2+7x+3} \right)^2}$$

* $g(x) = \sin(\sqrt{x^2+5})$

Rappel : $(u \circ v)'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$

$$\begin{aligned} \text{on a } g'(x) &= \left(\sin(\sqrt{x^2+5}) \right)' \\ &= \sin'(\sqrt{x^2+5}) \times \sqrt{x^2+5}' \\ &= \cos(\sqrt{x^2+5}) \times \frac{(x^2+5)'}{2\sqrt{x^2+5}} \\ &= \cos(\sqrt{x^2+5}) \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} \end{aligned}$$

Donc : $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \cos(\sqrt{x^2+5})$

Ex 2

1) on a f dérivable sur $\mathbb{R}$

Alors $(\forall n \in \mathbb{R}) : f'(x) = (x^3+12x-8)'$
 $f(x) = 3x^2+12$

alors $f'(n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{R}$
 (car $\Delta = -144 < 0$ et $a=3 > 0$)

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) a -
 on a g est continue sur $[0; +\infty[$
 (polynôme)
 et g strictement croissante sur $[0; +\infty[$

on a $g([0; +\infty[) = [g(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[$
 $= [-8; +\infty[$
 (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3+12x-8 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$)

Donc $0 \in [-8; +\infty[= g([0; +\infty[)$
 Alors d'après TVI l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $I = [0; +\infty[$

• vérifier que $0 < \alpha < 1$
 on a $g(0) = -8$ et $g(\alpha) = 0$ (car α solution de $g(x)=0$)
 et $g(1) = 5$

Donc $g(0) < g(\alpha) < g(1)$
 et comme g strictement croissante sur $[0; 1[$

Alors : $0 < \alpha < 1$

3

b) on a $g(x) = 0$ (car α solution de l'équation $g(x) = 0$)

$$\text{Alors : } x^3 + 12x - 8 = 0$$

$$\text{Alors } x^3 = 8 - 12x$$

$$\text{Alors } x = \sqrt[3]{8 - 12x}$$

$$\text{Alors } x = \sqrt[3]{8 \left(1 - \frac{12}{8}x\right)}$$

$$\text{Alors } x = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{3}{2}x}$$

$$\text{Donc } x = 2 \sqrt[3]{1 - \frac{3}{2}x}$$

3/a

on a g est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ Alors g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle $J = g([0; +\infty[) = [-8; +\infty[$

b/ on a g est dérivable sur $[0; +\infty[$ Alors g est dérivable en α (car $\alpha \in [0; +\infty[$)

$$\text{et on a } g'(x) = 3x^2 + 12 \neq 0 \text{ (p. 1)}$$

Donc g^{-1} est dérivable en 0.

$$\text{de plus on a : } (g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(\alpha)}$$

$$\text{Donc } (g^{-1})'(0) = \frac{1}{3\alpha^2 + 12}$$

$$\text{car : } (g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 + 4)}$$

Ex3

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2x \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x-1 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } D_f = [1; +\infty[$$

② on a $x \mapsto x-1$ est continue sur $[1; +\infty[$ (polynôme) et on a $\forall x \in [1; +\infty[; x-1 \geq 0$

Donc $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est continue sur $[1; +\infty[$

Donc $x \mapsto -2\sqrt{x-1}$ est continue sur $[1; +\infty[$

et on a $x \mapsto x$ est continue sur $[1; +\infty[$ (fonction polynôme).

④

Donc f est continue sur $[1; +\infty[$
comme somme de deux fonctions
continues.

$$\begin{aligned} 3) \text{ on a } \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{f(n) - f(1)}{n - 1} \\ = \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{n - 2\sqrt{n-1} - 1}{n - 1} \\ = \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{n - 1 - 2\sqrt{n-1}}{n - 1} \\ = \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{n-1}{n-1} - \frac{2\sqrt{n-1}}{n-1} \\ = \lim_{n \rightarrow 1^+} 1 - \frac{2\sqrt{n-1}}{n-1} \\ = \lim_{n \rightarrow 1^+} 1 - \frac{2}{\sqrt{n-1}} = \boxed{-\infty} \end{aligned}$$

Car $\lim_{n \rightarrow 1^+} \sqrt{n-1} = 0^+$

Alors f n'est pas dérivable
à droite en 1

Donc (E_f) admet une demi-tangente
verticale dirigée vers le bas
au point $A(1; 1)$.

4) a - on a f est dérivable sur $]1; +\infty[$
Alors pour tout $n \in]1; +\infty[$,

$$f'(n) = (n - 2\sqrt{n-1})'$$

(5)

$$\begin{aligned} f'(n) &= 1 - \frac{2(n-1)'}{2\sqrt{n-1}} \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{n-1} - 1}{\sqrt{n-1}}$$

$$= \frac{(\sqrt{n-1} - 1)(\sqrt{n-1} + 1)}{\sqrt{n-1}(\sqrt{n-1} + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{n-1}^2 - 1^2}{\sqrt{n-1}(\sqrt{n-1} + 1)}$$

$$= \frac{n-1-1}{\sqrt{n-1}(\sqrt{n-1} + 1)}$$

Donc $f'(n) = \frac{n-2}{\sqrt{n-1}(\sqrt{n-1} + 1)}$

b/ on a le signe de $f'(n)$ et celui de
 $n-2$ car $(\forall n \in]1; +\infty[); \sqrt{n-1}(\sqrt{n-1} + 1) > 0$

Donc: $f'(n) = 0 \Leftrightarrow n-2 = 0 \Leftrightarrow n = 2$

• TV de f :

x	1	2	$+\infty$
$f'(n)$	$\begin{array}{ c } \hline - \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline + \\ \hline \end{array}$	
$f(n)$	1		$+\infty$

5) a- on a g est continue sur $]2; +\infty[$ (car f est continue sur $[1; +\infty[$)

on a g est strictement croissante sur $]2; +\infty[$ (T.V de f)

Alors g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que

$$J = g(]2; +\infty[)$$

$$=]0; +\infty[$$

b) TV de g^{-1}

on a g est strictement croissante sur $I =]2; +\infty[$

Donc g^{-1} est strictement croissante sur $J =]0; +\infty[$.

Donc :

x	0	$+\infty$
$g^{-1}(x)$	2	$+\infty$

$$\begin{aligned} \text{car } (\sqrt{x-1}-1)^2 &= \sqrt{x-1}^2 - 2\sqrt{x-1} + 1^2 \\ &= x-1 - 2\sqrt{x-1} + 1 \\ &= x - 2\sqrt{x-1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\sqrt{x-1}-1)^2 = g(x)$$

* Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J =]0; +\infty[$ et $y \in I =]2; +\infty[$
on a $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y-1}-1)^2 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{y-1}-1)^2} = \sqrt{x} \quad (x > 0)$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{y-1}-1| = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-1}-1 = \sqrt{x} \quad \left(\begin{array}{l} y > 2 \\ y-1 > 1 \\ \sqrt{y-1} > 1 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-1} = \sqrt{x} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-1}^2 = (\sqrt{x} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y-1 = (\sqrt{x} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y = 1 + (\sqrt{x} + 1)^2$$

Donc : $g^{-1}(x) = 1 + (\sqrt{x} + 1)^2$ pour tout $x \in J$

6