

elboutkhili.jimdofree.com		Devoir surveillé 1	2 Bac sc PC/SVT/ST
   Prof fayssal		<u>Modèle 2</u>	Durée : 2 heures
Barème	<u>Exercice 1</u>		
3,5P	Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & ; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$		
1	1) Etudier la continuité de f en 1		
1	2) Montrer que f est dérivable en 1		
1	3) Déterminer l'approximation affine de f au voisinage de 1		
0,5	4) Déduire une valeur approchée de $f(1,001)$		
4,5P	<u>Exercice 2</u>		
1+1+1	1) Calculer les limites suivantes :		
	$a) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-9} ; b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}} ; c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x-1}$		
	2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :		
1,5	(E ₁) : $\sqrt{x+2} - 4\sqrt[4]{(x+2)} + 3 = 0$		
5P	<u>Exercice 3</u>		
	Soit f la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$		
1.5	1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer		
1	2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2; 3[$		
1,5	3) Etudier le signe de f sur I puis résoudre dans I l'inéquation : $f(x) < 0$		
1	4) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et : $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$		
7P	<u>Exercice 4</u>		
	Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = x - 2\sqrt{x}$		
1	1) Déterminer D_f et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$		
1	2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0		
0.5	b) Donner une interprétation géométrique		
1	3) a) Montrer que $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ pour tout x dans $]0, +\infty[$		
1	b) Dresser le tableau de variations de f sur D_f en justifiant votre réponse		
0.5	c) Déterminer les extremus de f s'il existe		
	4) Soit g la restriction de f sur $I = [0; 1]$		
1	a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera		
0,5	b) Comparer $g^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $g^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$ en justifiant votre réponse		
1	c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$		

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & ; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$

- 1) Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$
- 2) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 1$
- 3) Donner l'approximation affine de f au voisinage de 1
- 4) Déduire une valeur approchée de $f(1,001)$

Solution de l'exercice 01 :

- 1) Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}^2 - 1^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 2 = f(1) \end{aligned}$$

D'où la fonction f est continue en 1

- 2) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}+1) - 2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$

- 3) Donner l'approximation affine de f au voisinage de 1

$$f(x) \cong f'(1)(x-1) + f(1) \quad \text{au voisinage de 1}$$

$$f(x) \cong \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{au voisinage de 1}$$

- 5) Déduire une valeur approchée de $f(1,001)$

$$f(1,001) \cong \frac{1}{2} \times 1,001 + \frac{3}{2} \cong 0,5005 + 1,5 \cong 2,0005$$

Exercice 2

$$1) \text{ Calculer les limites : } 1) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9} ; 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}} ; 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x-1}$$

$$2) \text{ Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ les équations suivantes : } \sqrt{x+2} - 4\sqrt[4]{(x+2)} + 3 = 0$$

Solution de l'exercice 02 :

$$1) a) \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x-1} - 2 = \sqrt[3]{9-1} - 2 = \sqrt[3]{8} - 2 = 0, \text{ et } \lim_{x \rightarrow 9} x-9 = 0$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

Rappel ; $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt[3]{x-1})^3 - 2^3}{(x-9)[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-1-8}{(x-9)[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)}{(x-9)[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} = \frac{1}{[(\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 2^2]} \\ &= \frac{1}{[4 + 4 + 4]} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+3} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{+\infty}{+\infty}$ ".

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2+3)^2}} = 0$$

Car: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3}{(x^2+3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\begin{aligned}\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - 1^2}{(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x} - 1)[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

2) L'équation (E_1) est défini si $x+2 \geq 0$

Donc le domaine de définition est : $D_{(E_1)} = [-2; +\infty[$

$$\sqrt{x+2} - 4\sqrt[4]{(x+2)} + 3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x+2})^2 - 4\sqrt[4]{x+2} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (X)^2 - 4X + 3 = 0 \quad \text{avec } X = \sqrt[4]{x+2}$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 3 \quad \text{avec } X = \sqrt[4]{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x+2} = 1 \text{ ou } \sqrt[4]{x+2} = 3$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 1^4 \text{ ou } x+2 = 3^4$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3^4 - 2$$

Les deux solutions sont dans $D_{E_1} = [-2; +\infty[$

Donc $S = \{-1; 3^4 - 2\}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$

- 1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]2; 3[$
- 3) Déterminer le signe de f sur $[1, +\infty[$
- 4) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et : $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$

Solution de l'exercice 03 :

1) * La fonction f est **continue sur I** car c'est une polynôme

* La fonction f est dérivable sur I , et pour tout x dans I on a :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

$$x \in [1, +\infty[\Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) \geq 0$$

Donc f est **strictement croissante sur I**

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J et :

$$J = f([1, +\infty[) = [f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [-5; +\infty[$$

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $2 < \alpha < 3$

* La fonction f est **continue sur I** car c'est un polynôme

* La fonction f est **strictement croissante sur I**

* $f(2) = -1$ et $f(3) = 15$ donc $f(2) \times f(3) < 0$ donc $2 < \alpha < 3$

3) Etudier le signe de f sur I puis résoudre dans I l'inéquation : $f(x) > 0$

Soit $x \in [1; \alpha]$

Donc $1 \leq x \leq \alpha$ et on a la fonction f est strictement croissante sur $[1; \alpha]$

Donc $f(x) \leq f(\alpha)$

Et on a α solution de l'équation $f(x) = 0$ donc $f(\alpha) = 0$

D'où $f(x) \leq 0$

Soit $x \in [\alpha, +\infty[$

Donc $x \geq \alpha$ et on a la fonction f est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$

Donc $f(x) \geq f(\alpha)$

Et on a α solution de l'équation $f(x) = 0$ donc $f(\alpha) = 0$

D'où $f(x) \geq 0$

Résoudre l'inéquation dans I l'inéquation suivante : $(I): f(x) > 0$

Le tableau de signe de f sur I

x	1	α	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

D'où $S =]\alpha; +\infty[$

4) On a $f(\alpha) = 0$ donc $f^{-1}(0) = \alpha$

On a la fonction f est dérivable en α et $f'(\alpha) = 3(\alpha^2 - 1) \neq 0$

Car : $2 < \alpha < 3 \Leftrightarrow 3 < \alpha^2 - 1 < 8 \Leftrightarrow 9 < 3(\alpha^2 - 1) < 24$

Donc f^{-1} est dérivable en 0 ; et on a : $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$

Exercice 4

f une fonction tel que : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

1) Déterminer D_f et Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0

b) Donner une interprétation géométrique

3) a) Déterminer f' puis étudier les variations de f sur D_f

d) Dresser le tableau de variations de f

e) Déterminer les extremus de f

4) Soit g la restriction de f sur $I = [1, +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Solution de l'exercice 04 :

1) $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$

Donc : $D_f = [0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2\sqrt{x}^2}{x\sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$$2) a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 2\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} + \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = -\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0

b) Interprétation géométrique

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale en 0 dirigée vers le bas

3)a) Soit $x \in]0; +\infty[$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ (Somme de deux fonctions)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \\ &= \frac{x - 1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \end{aligned}$$

b) Etudier les variations de f

Soit $x \in]0; +\infty[$,

On a $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

Donc $\sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) > 0$ donc le signe de f' sur $]0; +\infty[$ est le signe de $x - 1$ qui s'annule en 1

On dresse le tableau de variations de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$f(0) = 0$	$f(1) = -1$	$+\infty$

c) Déterminer les extremus de f s'il existe

Le nombre -1 est une valeur minimale de f atteint en 1 sur $[0; +\infty[$

4)a) * La fonction g est continue sur I (car c'est une somme de deux fonctions continues sur I)

* La fonction g est strictement décroissante sur I

D'où g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J et :

$$J = g([0; 1]) = [g(1); g(0)] = [-1; 0]$$

b) Comparer $g^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $g^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$ en justifiant votre réponse

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} \Rightarrow g^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) < g^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ (car } g^{-1} \text{ est str décroissante)}$$

c) Soit $x \in [-1; 0]$ cherchons $y \in [0; 1]$ tel que $y = g^{-1}(x)$;

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow y - 2\sqrt{y} = x \Leftrightarrow \sqrt{y}^2 - 2\sqrt{y} + (1)^2 = x + (1)^2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y} - 1)^2 = x + 1;$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{y} - 1| = \sqrt{x + 1} \quad ; \quad (\text{car } x + 1 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} - 1 = -\sqrt{x + 1} \quad ; \quad (\text{car } \sqrt{y} - 1 \leq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = -\sqrt{x + 1} + 1 \Leftrightarrow y = (1 - \sqrt{x + 1})^2$$

$$g^{-1}(x) = (1 - \sqrt{x + 1})^2 \text{ pour tous } x \in [-1; 0]$$