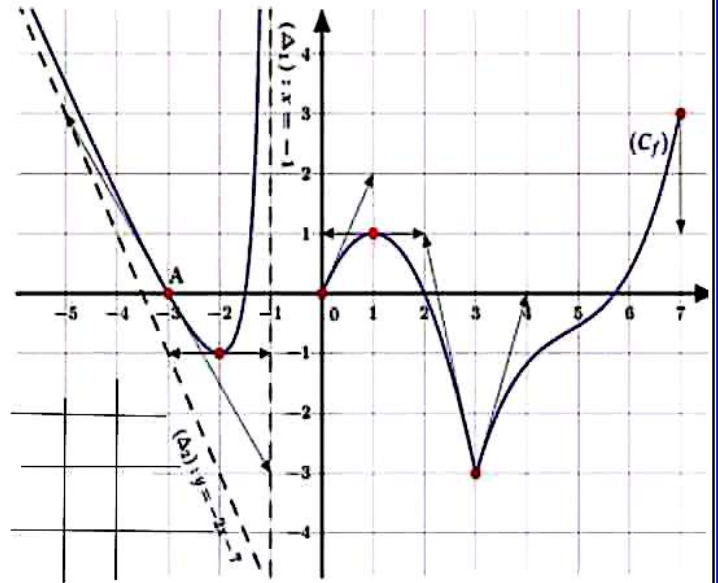


6P

Exercice 01

Soit f est une fonction définie sur $D_f =]-\infty; -1[\cup [0, 7]$ par la courbe suivante :

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$
- 2) Déterminer $f'(-2)$; $f'(-3)$
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)+3}{x-3}$
- 4) Justifier que f n'est pas dérivable en 3
- 5) Dresser le tableau de variations de f
- 6) Combien de solutions admet l'équation $f(x) = 0$ sur D_f ?
- 7) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; -2]$
- a) Justifier que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J à déterminer
- b) Déterminer $g^{-1}([-1; 0])$



6P

Exercice 02

Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} & ; x \neq 8 \\ f(8) = 12 \end{cases}$$

- 1) Vérifier que sur $D_f = [0; +\infty[$
- 2)a) Vérifier que $(\forall x \in [0; 8[\cup]8; +\infty[) ; f(x) = (\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4$
- b) En déduire calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- c) Montrer que f est continue en 8
- 2)a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-4}{x} = +\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat
- b) Montrer que f est dérivable en 8
- c) Déterminer l'équation de (T), la tangente à la courbe de f en 8

8p

Exercice 03

A) Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par ; $f(x) = x\sqrt{x} - x - \frac{1}{4}x^2 + 1$

- 1) a) Vérifier que $(\forall x \in [0; +\infty[) : f(x) = 1 - \frac{1}{4}(x - 2\sqrt{x})^2$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2)a) Montrer que f est dérivable à droite en 0 puis donner une interprétation géométrique du résultat
- b) Montrer que pour tout x dans $]0; +\infty[: f'(x) = -\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$
- c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$
- B) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [4; +\infty[$
- 1) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J (à déterminer)
- 2)a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]4, 9[$
- b) Calculer $g\left(\frac{64}{9}\right)$ puis en déduire un autre encadrement de α
- 3) a) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x dans J
- b) En déduire que $\alpha = 4 + 2\sqrt{3}$

Solution d'exercice 2

Soit f une fonction définie par:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} & ; x \neq 8 \\ f(8) = 12 \end{cases}$$

1) Vérifier que sur $D_f = [0; +\infty[$

$$x \in D_f \Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ et } \sqrt[3]{x} - 2 \neq 0) \text{ ou } (x = 8)$$

$$\Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ et } \sqrt[3]{x} \neq 2) \text{ ou } (x = 8)$$

$$\Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ et } (\sqrt[3]{x})^3 \neq 2^3) \text{ ou } (x = 8)$$

$$\Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ et } x \neq 8) \text{ ou } (x = 8)$$

$$\Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ et } x \neq 8) \text{ ou } (x = 8)$$

D'où $D_f = [0; +\infty[$

2)a) Vérifier que $(\forall x \in [0; 8[\cup]8; +\infty[); f(x) = (\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4$

Rappel: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Soit $x \in (\forall x \in [0; 0[\cup]0; +\infty[)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} \\ &= \frac{(x-8)[(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2]}{(\sqrt[3]{x}-2)[(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2]} \\ &= \frac{(x-8)[(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2]}{(\sqrt[3]{x})^3 - 2^3} \\ &= \frac{(x-8)[(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2]}{x-8} \\ &= (\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4 \end{aligned}$$

b) En déduire calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x})^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$

c) Montrer que f est continue en 8

Rappel: La fonction f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4 = (\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4 = 12$$

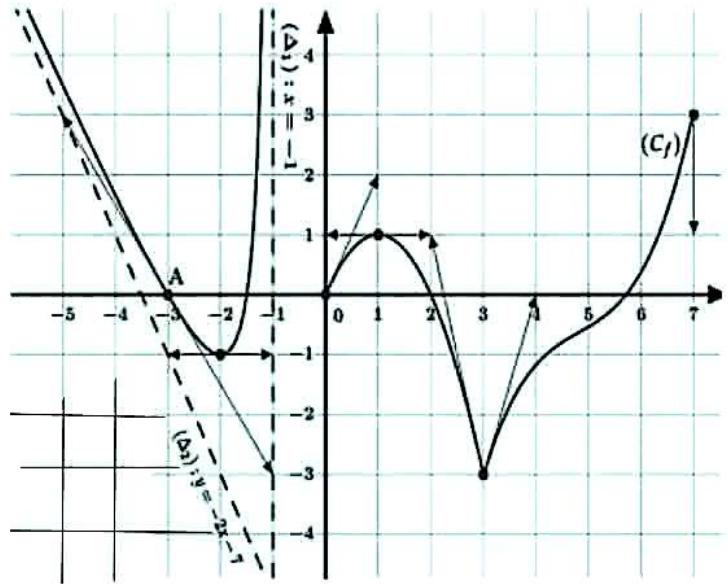
Donc $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = f(8)$;

D'où la fonction f est continue en 8

Exercice 01

Soit f est une fonction définie sur $D_f =]-\infty; -1[\cup [0, 7]$ par la courbe suivante :

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$
- 2) Déterminer $f'(-2)$; $f'(-3)$
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)+3}{x-3}$
- 3) Justifier que f n'est pas dérivable en 3
- 4) Dresser le tableau de variations de f
- 5) Combien de solutions admet l'équation $f(x) = 0$ sur D_f ?
- 6) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; -2]$
 - a) Justifier que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J à déterminer
 - b) Déterminer $g^{-1}([-1; 0])$


Solution d'exercice 1

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$$

- 2) Déterminer $f'(-2)$; $f'(-3)$

* La tangente en -2 est horizontale donc $f'(-2) = 0$

* La tangente en -3 passant par les deux points en $A(-3; 0)$ et $B(-1; -3)$

Et on a $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente en A donc

$$f'(-3) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-3)}{-3 - (-1)} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)+3}{x-3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'_d(0)$$

1ère méthode :

Rappel :

La tangente en $A(a; f'(a))$ est de vecteur directeur $\vec{u}(1; f'(a))$

$f'_d(0) = 2$ car le vecteur $\vec{u}(1; 2)$ est un vecteur directeur de demi-tangente en 0

2ème méthode :

La demi-tangente en 0 passant par les deux points en $O(0; 0)$ et $D(1; 2)$

$$\text{Donc : } f'_d(0) = \frac{2 - 0}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)+3}{x-3} = f'_g(3) = -4 \text{ car le vecteur } \vec{v}(-1; 4) \text{ est un vecteur directeur de demi-tangente en 3}$$

3) Justifier que f n'est pas dérivable en 3

On a $f_d'(3) \neq f_g'(3)$ donc f n'est pas dérivable en 3

On peut justifier par : le point $C(3; -3)$ est un point anguleux

4) Dresser le tableau de variations de f

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	3	7
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	1	-3	3

Diagram showing the variation of $f(x)$ with arrows indicating the direction of the function between the critical points.

5) Combien de solutions admet l'équation $f(x) = 0$ sur D_f ?

L'équation $f(x) = 0$ admet quatre solutions car la courbe de f coupe l'axe des abscisses en quatre points

6) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; -2]$
a) Justifier que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J à déterminer

* La fonction g est continue sur l'intervalle $]-\infty; -2]$ d'après le graphe

* La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty; -2]$ d'après la question 4)

D'où f admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J et :

$$J = g(]-\infty; -2]) = [f(-2); \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)[= [-1; +\infty[$$

b) Déterminer $g^{-1}([-1; 0])$

On a $g(-2) = -1$ et $g(-3) = 0$

Donc $g^{-1}(-1) = -2$ et $g^{-1}(0) = -3$

Et on a la fonction g est strictement décroissante sur $[-3; -2]$

Donc la fonction g^{-1} est strictement décroissante sur $[-1; 0]$

D'où $g^{-1}([-1; 0]) = [g^{-1}(0); g^{-1}(-1)] = [-3; -2]$

Exercice 02

Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} & ; x \neq 8 \\ f(8) = 12 \end{cases}$$
1) Vérifier que sur $D_f = [0; +\infty[$
2) a) Vérifier que $(\forall x \in [0; 8[\cup]8; +\infty[) ; f(x) = (\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4$
b) En déduire calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
c) Montrer que f est continue en 8
3) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-4}{x} = +\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat
b) Montrer que f est dérivable en 8
c) Déterminer l'équation de (T), la tangente à la courbe de f en 8

3)a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-4}{x} = +\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-4}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} - 4}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4 - 4}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} + 2)}{(\sqrt[3]{x})^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt[3]{x} + 2)}{(\sqrt[3]{x})^2} = +\infty \end{aligned}$$

Interprétation géométrique :

On a la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale en 0 dirigée vers le haut

b) Montrer que f est dérivable en 8

Rappel :

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$ alors la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = l$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{f(x)-f(8)}{x-8} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4 - 12}{x-8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} - 8}{x-8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - 4}{x-8} + \frac{2\sqrt[3]{x} - 4}{x-8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x}+2)}{x-8} + \frac{2(\sqrt[3]{x}-2)}{x-8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} \right) [(\sqrt[3]{x}+2) + 2] \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{\sqrt[3]{x}^3 - 2^3}{(x-8)(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2} \right) (\sqrt[3]{x} + 4) \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{x-8}{(x-8)(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2} \right) (\sqrt[3]{x} + 4) \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2} \right) (\sqrt[3]{x} + 4) \\ &= \frac{1}{12} \times 6 = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc la fonction f est dérivable en 8 et $f'(8) = \frac{1}{2}$

c) Déterminer l'équation de (T), la tangente à la courbe de f en 8

Rappel :

Si f est dérivable en a alors la courbe (Cf) admet une droite tangente au point

$A(a; f(a))$ d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

La droite (T) d'équation $y = f'(8)(x - 8) + f(8)$

Donc : (T): $y = \frac{1}{2}(x - 8) + 12$

Donc : (T): $y = \frac{1}{2}x - 8$

Exercice 03

A) Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par ; $f(x) = x\sqrt{x} - x - \frac{1}{4}x^2 + 1$

1) a) Vérifier que $(\forall x \in [0; +\infty[): f(x) = 1 - \frac{1}{4}(x - 2\sqrt{x})^2$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) a) Montrer que f est dérivable à droite en 0 puis donner une interprétation géométrique du résultat

b) Montrer que pour tout x dans $]0; +\infty[$: $f'(x) = -\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$

B) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [4; +\infty[$

1) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J (à déterminer)

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]4, 9[$

b) Calculer $g\left(\frac{64}{9}\right)$ puis en déduire un autre encadrement de α

3) a) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x dans J

b) En déduire que $\alpha = 4 + 2\sqrt{3}$

Solution d'exercice 3

A) Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par ; $f(x) = x\sqrt{x} - x - \frac{1}{4}x^2 + 1$

1) a) Vérifier que $(\forall x \in [0; +\infty[): f(x) = 1 - \frac{1}{4}(x - 2\sqrt{x})^2$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$1 - \frac{1}{4}(x - 2\sqrt{x})^2 = 1 - \frac{1}{4}(x^2 - 4x\sqrt{x} + 4x) = 1 - \frac{x^2}{4} + x\sqrt{x} - x = f(x)$$

Donc $(\forall x \in I), f(x) = 1 - \frac{1}{4}(x - 2\sqrt{x})^2$.

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{4}(x - 2\sqrt{x})^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{4} \left(x \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x}} \right) \right)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{4} \left(x \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x}} \right) \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{4}x^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x}} \right)^2 = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x}} \right)^2 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

2)a) Montrer que f est dérivable à droite en 0 puis donner une interprétation géométrique du résultat

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x} - x - \frac{1}{4}x^2 + 1 - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x} - x - \frac{1}{4}x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\sqrt{x} - 1 - \frac{1}{4}x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} - 1 - \frac{1}{4}x \\ &= -1\end{aligned}$$

Donc f est dérivable à droite de 0 et $f'_d(0) = -1$

Interprétation géométrique :

La courbe de f admet au point $A(0 ; 1)$ une demi-tangente (T) d'équation :

$$(T): y = f'_d(0)(x - 0) + f(0)$$

$$(T): y = -x + 1$$

b) Montrer que pour tout x dans $]0; +\infty[$: $f'(x) = -\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(1 - \frac{1}{4}(x - 2\sqrt{x})^2\right)' \\ &= -\frac{2}{4}(x - 2\sqrt{x})\left(1 - \frac{2}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= -\frac{1}{2}(\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2))\left(1 - \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= -\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)\end{aligned}$$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned}f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2) = 0 \text{ ou } (\sqrt{x} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \text{ ou } \sqrt{x} = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 1\end{aligned}$$

x	0	1	4	$+\infty$
$\sqrt{x} - 1$	-	0	+	+
$\sqrt{x} - 2$	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	1	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		$3/4$	1	$-\infty$

B) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [4; +\infty[$

1) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J (à déterminer)

$$\text{On a } g(x) = x\sqrt{x} - x - \frac{1}{4}x^2 + 1$$

La fonction $x \rightarrow x$ est continue sur I (polynôme) et $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur I

Donc La fonction $x \rightarrow x\sqrt{x}$ est continue sur I

La fonction $x \rightarrow -x - \frac{1}{4}x^2 + 1$ est continue sur I (polynôme)

D'où la fonction g est continue sur I

Et on a la fonction g est strictement décroissante sur I d'après la question 2)c)

D'où f admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J et :

$$J = g([4; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); f(4) \right] =]-\infty; 1]$$

2)a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]4, 9[$

On a la fonction g est continue sur I donc elle est continue sur $[4, 9]$

Et on a la fonction g est strictement croissante sur $[4, 9]$ d'après la question 2)c)

$$\text{Et on a : } g(4) = 1 - \frac{1}{4}(4 - 2\sqrt{4})^2 = 1 \text{ et } g(9) = 1 - \frac{1}{4}(9 - 2\sqrt{9})^2 = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$\text{Donc } g(4)g(9) < 0$$

D'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]4, 9[$

b) Calculer $g\left(\frac{64}{9}\right)$ puis en déduire un autre encadrement de α

$$g\left(\frac{64}{9}\right) = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{64}{9} - 2\sqrt{\frac{64}{9}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{32}{9}\right)^2 = 1 - \frac{1024}{324} > 0 \text{ et on a : } g(9) = -\frac{5}{4}$$

$$\text{Donc } \frac{64}{9} < \alpha < 9$$

3)a) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x dans J

Soit $x \in]-\infty; 1]$ cherchons $y \in [4; +\infty[$ tel que $y = g^{-1}(x)$;

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4}(y - 2\sqrt{y})^2 = x \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(y - 2\sqrt{y})^2 = x - 1$$

$$\Leftrightarrow (y - 2\sqrt{y})^2 = 4(-x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (y - 2\sqrt{y}) = 2\sqrt{-x + 1}, \text{ car } [y \in [4; +\infty[\text{ donc } y - 2\sqrt{y} = \sqrt{y}(\sqrt{y} - 2) \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - 2\sqrt{y} + 1) = 2\sqrt{1 - x} + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{y} - 1)^2 = 2\sqrt{1 - x} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} - 1 = \sqrt{2\sqrt{x + 1} + 1} \text{ car } y \in [4; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow y = (\sqrt{2\sqrt{x + 1} + 1} + 1)^2$$

$$\text{D'où } g^{-1}(x) = (\sqrt{2\sqrt{x + 1} + 1} + 1)^2$$

b) En déduire que $\alpha = 4 + 2\sqrt{3}$

$$\text{On a } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(0) = \alpha$$

$$\text{Donc : } \alpha = g^{-1}(0) = (\sqrt{2\sqrt{1 - 0} + 1} + 1)^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 = \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$$