

Professeur : RACHID FANIDI

Lycée AL Massira EL Khadraa Tiznit

Classe : 2BAC PC-SVT-STE.

Devoir Surveillé 02-S1-

Modelle G

Durée : 2h30min



13pts

EXERCICE 01

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty; 3]$ par : $f(x) = x\sqrt{3-x}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1.25pts

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat obtenu géométriquement.

1pts

2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en 3 puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

0.75pts

3) a-Montrer que pour tout $x \in]-\infty; 3[: f'(x) = \frac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$.

1pts

b-Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

0.5pts

c-Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse -1.

0.5pts

4) a-Montrer que pour tout $x \in]-\infty; 3[: f(x) - x = \frac{x(2-x)}{1+\sqrt{3-x}}$.

0.75pts

b-En déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation $y = x$

1pts

5) Tracer la droite (D) et la tangente (T) et la courbe (C_f) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

6) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty; 2]$.

0.5pts

a-Montrer que g admet une fonction g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

0.75pts

b-Montrer que g^{-1} est dérivable en -2 puis calculer $(g^{-1})'(-2)$.

0.5pts

c-Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

7) Soit la fonction numérique h définie sur $[-3; 3]$ par : $h(x) = f(|x|)$.

0.5pts

a-Montrer que h est paire.

0.75pts

b-Tracer la courbe (C_h) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0.5pts

8) a-Vérifier que pour tout $x \in]-\infty; 3[: f(x) = 3\sqrt{3-x} - \sqrt{(3-x)^3}$.

1pts

b-Déterminer tous les fonctions primitives de f sur $]-\infty; 3]$.

0.5pts

c-Déterminer la fonction primitive F de f sur $]-\infty; 3]$ telle que $F(2) = 0$.

9) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1pts

a-Montrer par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq 2$.

0.75pts

b-Montrer que la suite (u_n) est croissante (on pourra utiliser la question 2-b) et qu'elle est convergente.

0.75pts

c-Déterminer la limite de la suite (u_n) .

7pts**EXERCICE 02**

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4}u_n + \frac{4-\sqrt{3}}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.5pts

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$.

0.75pts

2) a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{3}-4}{4}(u_n - 1)$

0.75pts

b- En déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

3) On pose $v_n = u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1pts

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{4}$ et calculer v_0 .

0.5pts

b- Exprimer v_n en fonction de n .

1pts

c- En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

5) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1pts

a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = n + \frac{4}{13}(4 + \sqrt{3}) \left[1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n \right]$

0.5pts

b- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Prof: R. Fanioli

Correction du Devoir surveillé 02

Modelle G

Exercice 01 :

1) on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{3-x} = -\infty$.

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3-x} = +\infty$

• on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{3-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3-x} = +\infty$

Interprétation géométrique :

($\frac{\infty}{\infty}$) Admet une branche parabolique suivant l'axe des ordonnées
Au voisinage de $-\infty$.

2) on a $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x\sqrt{3-x}}{x-3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x(3-x)}{(x-3)\sqrt{3-x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x(x-3)}{(x-3)\sqrt{3-x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x}{\sqrt{3-x}} = -\infty$

car $\lim_{x \rightarrow 3^-} -x = -3$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3-x} = 0^+$

Alors f n'est pas dérivable à gauche en 3.

I.G: Alors ($\frac{\infty}{\infty}$) Admet une Demi-tangente verticale dirigée au haut au point A(-3; 0).

3) on a $x \mapsto x$ est dérivable sur $]-\infty; 3[$ (polynôme)
et on a $x \mapsto \sqrt{3-x}$ est dérivable et strictement positive sur $]-\infty; 3[$
Alors $x \mapsto \sqrt{3-x}$ est dérivable sur $]-\infty; 3[$
par suite f est dérivable sur $]-\infty; 3[$ (comme produit de deux fonctions dérivables)

soit $x \in]-\infty; 3[$ Alors :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x\sqrt{3-x})' = x'\sqrt{3-x} + x\sqrt{3-x}' \\
 &= \sqrt{3-x} + x \cdot \frac{(3-x)'}{2\sqrt{3-x}} \\
 &= \sqrt{3-x} - \frac{x}{2\sqrt{3-x}} \\
 &= \frac{2\sqrt{3-x}^2 - x}{2\sqrt{3-x}} \\
 &= \frac{2(3-x) - x}{2\sqrt{3-x}} \\
 &= \frac{6 - 2x - x}{2\sqrt{3-x}} \\
 &= \frac{6 - 3x}{2\sqrt{3-x}}
 \end{aligned}$$

par suite $f'(x) = \frac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$ pour tout $x \in]-\infty; 3[$

b) le signe de $f'(x)$ est celui de $2-x$ car $(\forall x \in]-\infty; 3[; \sqrt{3-x} > 0$

Donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Alors :

x	$-\infty$	2	3
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

Diagram showing a peak at $x=2$ with arrows pointing from $-\infty$ and 3 towards the peak.

c) on a (T) : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ ou $f'(-1) = \frac{9}{4}$ et $f(-1) = -2$

Alors

$$y = \frac{9}{4}(x+1) - 2$$

Donc $y = \frac{9}{4}x + \frac{9}{4} - 2$

(2)

Donc (T) : $y = \frac{9}{4}x + \frac{1}{4}$

4) Soit $x \in]-\infty; 3[$

on a $f(x) - x = x\sqrt{3-x} - x$

$= x(\sqrt{3-x} - 1)$

$= x \left(\frac{\sqrt{3-x}^2 - 1^2}{\sqrt{3-x} + 1} \right)$

$= x \left(\frac{3-x-1}{\sqrt{3-x} + 1} \right)$

Donc $f(x) - x = \frac{x(2-x)}{\sqrt{3-x} + 1}$

b) Le signe de $f(x) - x$ est celui de $x(2-x)$ car $\sqrt{3-x} + 1 > 0$ pour tout $x \in]-\infty; 3[$.

on a $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $2-x = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $2 = x$

x	$-\infty$	0	2	3
x	$-$	0	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)-x$	$-$	0	$+$	$-$
position relative de (E_f) et de (D)	(E_f) est au dessous de (D)	$(E_f) \cap (D) = \{(0,0)\}$	(E_f) est au dessus de (D) $(E_f) \cap (D) = \{(2,2)\}$	(E_f) est au dessous de (D)

3

Alors g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = g(I \cup \{+\infty\}) =]\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n); g(2)] =]-\infty; 2]$

Alors g^{-1} est dérivable en -2

4

Scanné avec CamScanner

7) a-

ona $D_f = [-3; 3]$ Alors $(\forall n \in D_f) : -n \in D_f$

• pour tout $n \in D_f : f(-n) = f(1-n) = f(|n|) = f(n)$

D'où f est paire

b) si $n \in [0; 3]$ Alors $f(n) = f(n)$

car (f) et (f) sont confondues sur $[0; 3]$

et puisque f est pair

Alors (f) est symétrique par rapport à (Oy) sur $[-3; 0]$

• (Regarder la figure question 5)

8) a- Soit $n \in]-\infty; 3]$

$$\begin{aligned} \text{ona } 3\sqrt{3-n} - \sqrt{(3-n)^3} \\ &= 3\sqrt{3-n} - \sqrt{(3-n)^2} \cdot \sqrt{3-n} \\ &= 3\sqrt{3-n} - |3-n| \sqrt{3-n} \\ &= 3\sqrt{3-n} - (3-n) \sqrt{3-n} \\ &= 3\sqrt{3-n} - 3\sqrt{3-n} + n\sqrt{3-n} \\ &= f(n) \end{aligned}$$

D'où $(\forall n \in]-\infty; 3]) : f(n) = 3\sqrt{3-n} - \sqrt{(3-n)^3}$

b) Soit G l'ensemble des fonctions primitives de f sur $]-\infty; 3]$

$$\begin{aligned} \text{ona } f(n) &= 3\sqrt{3-n} - \sqrt{(3-n)^3} \\ &= 3(3-n)^{1/2} - (3-n)^{3/2} \\ f'(n) &= -3(3-n)^{-1/2} + (3-n)^{1/2} \end{aligned}$$

(6)

$$\text{Donc } G(x) = -3 \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (3-x)^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{\frac{3}{2}+1} (3-x)^{\frac{3}{2}+1} + C$$

$$= -2 \times \frac{2}{3} (3-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} (3-x)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$\text{Donc } G(x) = -2(3-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(3-x)^{\frac{5}{2}} + C \text{ ou } C \in \mathbb{R}$$

c) on a F est une primitive de f sur $] -\infty; 3[$

$$\text{Alors } F(x) = -2(3-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(3-x)^{\frac{5}{2}} + C \quad | C \in \mathbb{R}$$

$$\text{On a } F(x) = -\frac{8}{5} \quad (\Rightarrow) -2(3-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(3-x)^{\frac{5}{2}} + C = 0$$

$$(\Rightarrow) -2 + \frac{2}{5} + C = 0$$

$$(\Rightarrow) \frac{8}{5} + C = 0$$

$$(\Rightarrow) C = -\frac{8}{5}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in]-\infty; 3[) \quad F(x) = -2(3-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(3-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{5}$$

g) a. pour $n=0$ on a $u_0 = 1$ donc $0 \leq u_0 \leq 2$

no soit ne IN

supposons que $0 \leq u_n \leq 2$ et Montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

on a $0 \leq u_n \leq 2$ et f strictement croissante sur $[0; 2]$

$$\text{Alors } f(0) \leq f(u_n) \leq f(2)$$

$$\text{Alors } 0 \leq u_{n+1} \leq 2$$

... Donc D'après le principe de récurrence on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 2$$

(6)

b) on a $(\forall n \in [0; 2]) f(n) \geq n$
et $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_n \leq 2$

Alors en posant $x = u_n$ on obtient :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) f(u_n) \geq u_n$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} \geq u_n$$

Alors la suite (u_n) est croissante

- puisque (u_n) est croissante et majorée par 2
alors (u_n) est convergente.

c) on a f est continue sur $[0; 2]$ et $f([0; 2]) = [0; 2]$
et on a $u_0 \in [0; 2]$

et on a (u_n) est convergente

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est une solution de l'équation $f(n) = x$
sur $[0; 2]$

$$\text{on a } f(n) = x \Leftrightarrow f(n) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2 \quad (\text{question 4-b})$$

puisque (u_n) est croissante Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq u_0 = 1$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

(7)

Exercice 2 :

- ① • pour $n=0$ on a $u_0 = 2$ donc $u_0 > 1$
 • Soit $n \in \mathbb{N}$
 supposons que $u_n > 1$ et Montrons que $u_{n+1} > 1$.

$$\begin{aligned} \text{on a } u_{n+1} - 1 &= \frac{\sqrt{3}}{4} u_n + \frac{4-\sqrt{3}}{4} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} u_n + \frac{4-\sqrt{3}-4}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} u_n - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{4} (u_n - 1)$

$$\begin{aligned} \text{on a } u_n > 1 &\Rightarrow u_n - 1 > 0 \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} (u_n - 1) > 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} - 1 > 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

donc D'après le principe de récurrence on a $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 1$

- ② a - Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{on a } u_{n+1} - u_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} u_n + \frac{4-\sqrt{3}}{4} - u_n \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - 1\right) u_n + \frac{4-\sqrt{3}}{4} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}-4}{4}\right) u_n - \left(\frac{\sqrt{3}-4}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}-4}{4} (u_n - 1) \end{aligned}$$

b/ on a $u_n > 1 \Rightarrow u_n - 1 > 0$ et on a $\frac{\sqrt{3}-4}{4} < 0$

Donc $\frac{\sqrt{3}-4}{4} (u_n - 1) < 0$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$ pour $\forall n \in \mathbb{N}$

Alors la suite (u_n) est décroissante.

(8)

• puisque (u_n) est décroissante et minorée par 1
 Alors (u_n) est convergente.

3) a. soit $n \in \mathbb{N}$
 on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 1$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (u_n - 1)$$

D'où $v_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} v_n$

Alors (v_n) est une suite géométrique de raison

$$q = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

• on a $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = \boxed{1}$

b) on a $v_n = v_0 \times q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

D'où $v_n = 1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n$

Alors $v_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) • on a $v_n = u_n - 1$ Alors $u_n = 1 + v_n$

et comme $v_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n$

Alors $u_n = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

• on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n = \boxed{1}$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n = 0$ $\left(-1 < \frac{\sqrt{3}}{4} < 1\right)$

9

5) soit $n \in \mathbb{N}^*$

a)

$$\begin{aligned}
 \text{ona } S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} \\
 &= (1+v_0) + (1+v_1) + \dots + (1+v_{n-1}) \\
 &= 1(n-1-0+1) + (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}) \\
 &= n + v_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} \\
 &= n + 1 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{3}}{4}} \\
 &= n + \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n}{\frac{4-\sqrt{3}}{4}} \\
 &= n + \frac{4}{4-\sqrt{3}} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n\right) \\
 &= n + \frac{4(4+\sqrt{3})}{4^2 - \sqrt{3}^2} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n\right)
 \end{aligned}$$

D'où

$$S_n = n + \frac{4}{13} (4+\sqrt{3}) \left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

b)

$$\text{ona } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n + \frac{4}{13} (4+\sqrt{3}) \left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n\right) = \boxed{+\infty}$$

$$\text{car } \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n = 0 \quad \left(-1 < \frac{\sqrt{3}}{4} < 1\right)$$