

MATIÈRE : MATHS
Durée: 2heures

DEVOIR SURVEILLÉ N°1
SEMESTRE I

NIVEAU : 2BAC-PC
PROF : HAURECH FAHD

Exercice 1

(6 points)

1 Calculer les limites suivantes:

(3 pts) 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x^2}$ 3) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x - 3}{x^2 + 3x + 2}$

(3 pts) 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} - x + 1$ 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + 27x^3}}{x + 1}$ 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 - x^2} - 2}{x^2}$

Exercice 2

(5.5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1 + 4x^2} - \sqrt{1 + x^2}}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

(1 pt) 1 Montrer que f est continue en 0.

(1 pt) 2 Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt) 3 a) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

(0.5 pt) b) Montrer que la fonction f est paire.

(0.5 pt) c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^-$.

(1 pt) 4 Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

(1 pt) 5 Déterminer $f(\mathbb{R})$.

Exercice 3

(3 points)

1.5 pt) 1 Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

1.5 pt) 2 Montrer que l'équation $x^{2019} + 2019x - 2019 = 0$ admet une unique solution dans $]0; 1[$.

Exercice 4

(5.5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$.

1.5 pt) 1 a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

1.5 pt) b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

(1 pt) c) En déduire f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer:

1.5 pt) 2 Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 1:

Soit f une fonction dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	-4	-8	5

Diagram showing the variation of $f(x)$ with arrows indicating the direction of change between the values.

Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2:

Soit f une fonction dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$f(x)$	-1	2	-3	-1

Diagram showing the variation of $f(x)$ with arrows indicating the direction of change between the values.

Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3:

Soit f une fonction dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$

Diagram showing the variation of $f(x)$ with arrows indicating the direction of change between the values.

Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par; $f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$.

1. Déterminer le tableau de variations complet de la fonction f .
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ ne possède qu'une unique solution notée α .
3. Donner un encadrement à 10^{-2} près de α .

Exercice 1:

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x^2 + 8} - 3}{2x - 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + x^2 - x + 4)$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3} \right)$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6} \right)$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

6. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right)$

Exercice 2:(Limites à droite et à gauche)Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$ Calculer la limite de f en $x_0 = -1$ **Exercice 3:**Soient les fonctions tels que: $f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x)$; $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ et } h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin(x)$$

1. Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

3. Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

4. Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k **Exercice 4:**Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}; \text{ si } x \neq 3 \\ f(3) = 7 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 3$ **Exercice 5:**Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\tan(x)}; \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

Exercice 6:

Considérons la fonction f définie Par:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 2 \\ f(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

Exercice 1:

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{4x^2 + 3x - 7} - 2x^2)$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\sqrt{x^4 + 1}} - x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{10x^2 + 9} - 7}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5} - 5} \right)$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{|x^2 - 2x| - 8}{x^2 - 5x + 4} \right)$

6. $\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x - a}} \right) \quad a \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 2:

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot \sin(2x)}{1 - \cos(x)}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(x) - \sin^3(x)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\tan(x)} - \sqrt{\tan(2x)}}{\sqrt{\tan(3x)} - \sqrt{\tan(4x)}}$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) \cdot \sin(2x)}{\cos(2x) + 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} \quad (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$

Exercice 3:

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) \right)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right) \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin\left(\sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}}\right) \right)$

Exercice 4:

Montrer que l'équation: $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ admet une racine dans chacune des intervalles suivants : $] - 1; -\frac{1}{2}[$; $]-\frac{1}{2}; 0[$ et $]0; 1[$

Exercice 5:1. Montrer que l'équation : $x^3 + x + 1 = 0$ admet une racine unique dans $] - 1; 0[$ 2. Etudier le signe de $(x^3 + x + 1)$ sur $] - 1; 0[$.**Exercice 6:**Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet au moins une racine dans l'intervalle : $I = [0; \pi]$

Exercice 7:

Montrer que l'équation : $1 + \sin x = x$ admet au moins une racine dans l'intervalle : $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$

Exercice 1:

Soit a un nombre réel et une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{cases} f(x) = x^3 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = x + a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Tracer dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe C_f dans le cas où $a = -1$.
2. graphiquement, est ce que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Trouver la valeur de a pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2:

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (x - 1)^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en 1 .

Exercice 3:

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans I dans les cas suivants :

1. $f(x) = 7x^3 - x - 1$; $I = [0; 1]$
2. $f(x) = \cos x - x$; $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$; $I =]-1; 0[$
4. $f(x) = x^4 + x^3 - 9$; $I = [-2; 2]$

Exercice 4:

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

1. Dresser un tableau de variation de f
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule et unique solution x_0 dans $\mathbb{R}$.
3. Vérifier que : $x_0 \in]0; 1[$
4. En utilisant la méthode de dichotomie donner la valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Exercice 5:

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^3 + x + 1$.

1. Dresser un tableau de variation de f
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule et unique solution α dans l'intervalle $[-2; 2]$.

3. En utilisant la méthode de dichotomie donner la valeur approchée de α à $1,25 \times 10^{-1}$.

Exercice 6:

f est une fonction définie sur l'intervalle $I =]-\infty; 3]$ par : $f(x) = (x - 3)^2 - 1$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J qu'on déterminera.
2. Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 7:

1. Comparer a ; b et c dans le cas où : $a = \sqrt{5}$; $b = \sqrt[9]{806}$; $c = 3^{\frac{2}{3}}$
2. Simplifier A et B dans le cas suivant :

$$A = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times \sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[9]{4}} \text{ et } B = \frac{3^{\frac{3}{4}} \times \sqrt[20]{3\sqrt{9}} \times 3^2}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$$

Exercice 8:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$$x^3 + 27 = 0 \quad ; \quad \sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{3 - \sqrt[3]{x}} \right)^3 = 64$$

Exercice 9:

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 7x - 6}{|x - 3|}; x \neq 3 \\ f(3) = 20 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en $x_0 = 3$.

Exercice 10:

f est une fonction définie sur l'intervalle $I = [-1; 0[$ par: $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J on déterminera puis calculer $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$
2. calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 11 :

f est une fonction définie sur $]0; 2[$ par : $\begin{cases} f(x) = (x^2 - 1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right); x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $x \in]0; 2[$: on a : $|f(x) - f(1)| \leq 3|x - 1|$.
2. En déduire que f est continue en 1 .

Exercice 12:

f est une fonction définie sur $]1; +\infty[$ par: $f(x) = \frac{1 - \sqrt{x^3} + \sqrt{x}}{x - 1}$.

1. Montrer que: $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x - 1}$
2. Montrer que l'équation $\frac{1}{x - 1} = \sqrt{x}$, admet une seule et unique solution α dans l'intervalle $]1; 2[$
3. Montrer que: $\alpha^2(\alpha - 2) = 1 - \alpha$

Exercice 13:

f est une fonction définie sur $[1; +\infty[$ par: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}$

1. si on pose $u(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ et $v(x) = \sqrt[3]{x}$ dresser un tableau de variation de f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
2. Montrer que f admet une fonction réciproque $f^{-1}(x)$ définie sur J (qu'on déterminera) vers l'intervalle $[1; +\infty[$
3. calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 1:

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{4x^2 + 3x - 7} - 2x^2)$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\sqrt{x^4 + 1}} - x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{10x^2 + 9} - 7}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5} - 5} \right)$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{|x^2 - 2x| - 8}{x^2 - 5x + 4} \right)$

6. $\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x - a}} \right) \quad a \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 2:

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot \sin(2x)}{1 - \cos(x)}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(x) - \sin^3(x)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\tan(x)} - \sqrt{\tan(2x)}}{\sqrt{\tan(3x)} - \sqrt{\tan(4x)}}$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) \cdot \sin(2x)}{\cos(2x) + 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} \quad (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$

Exercice 3:Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \times \cos(2x) \times \cdots \times \cos(nx)}{x^2}$ **Exercice 4:**

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) \right)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right) \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin\left(\sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}}\right) \right)$

Exercice 5:Montrer que l'équation: $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ admet une racine dans chacune des intervalles suivants : $] - 1; -\frac{1}{2}[$; $] -\frac{1}{2}; 0[$ et $]0; 1[$ **Exercice 6:**1. Montrer que l'équation : $x^3 + x + 1 = 0$ admet une racine unique dans $] - 1; 0[$ 2. Etudier le signe de $(x^3 + x + 1)$ sur $] - 1; 0[$.**Exercice 7:**Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet au moins une racine dans l'intervalle : $I = [0; \pi]$

Exercice 8:

Montrer que l'équation : $1 + \sin x = x$ admet au moins une racine dans l'intervalle : $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$

Exercice 9:

Etudier la continuité des fonctions suivantes en a :

1.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{2x-1} & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \\ f(x) = \frac{\sin(4x^2-1)}{2x-1} & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad a = \frac{1}{2}$$

2.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\cos x - \sin(2x)}{\sqrt{|1-4\sin^2(x)|}} & \text{si } x \neq \frac{\pi}{6} \\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{6}$$

3.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2x+4} - 3\sqrt{2x-1} + 3}{\sqrt{2x+11} - \sqrt{2x-1} - 2} & \text{si } x > \frac{1}{2} \text{ et } x \neq \frac{5}{2} \\ f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{14}{3} \end{cases} \quad a = \frac{5}{2}$$

Exercice 10:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$ On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \sin\left(\frac{a}{x^n}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f_n est continue en 0 .

2. Montrer que la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 11 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{x^{n+3} - (n+2)x^2 + n+1}{-x^2+1} & \text{si } x > 1 \\ f_n(x) = \frac{(x^n + x^{n-1} + \dots + x) - 1}{nx-2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de n pour que la fonction f_n soit continue en 1 .

Exercice 12:

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} f_n(x) = 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ f_n(x) = 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f_n n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 13:

Soient a et b des réels strictement positifs On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{b}{a} \end{cases}$$

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \left| f(x) - \frac{b}{a} \right| \leq \frac{|x|}{a}$
2. En déduire que la fonction f est continue en 0 .

Exercice 14:

Soient a et b des réels tels que $a < b$ et f une application de $[a; b]$ dans $[a; b]$

1. On suppose que pour tout $(x; y) \in [a; b]^2$ on a: $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$
 - (a) Montrer que f est continue sur $[a; b]$.
 - (b) Montrer que $(\exists c \in [a; b]) / f(c) = c$
2. On suppose maintenant que pour tout $(x; y) \in [a; b]^2$ on a : $|f(x) - f(y)| < |x - y|$
Montrer que $(\exists! c \in [a; b]) / f(c) = c$

Exercice 15:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que : $f(0) = f(1)$

Montrer que $\left(\exists c_n \in \left[0; 1 - \frac{1}{n} \right] \right) / f(c_n) = f\left(c_n + \frac{1}{n}\right)$

Exercice 16:

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 ; |f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|$

1. Montrer que f est 2π - périodique.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On considère la fonction f_n définie par: $f_n(x) = \frac{1 - \prod_{k=1}^n \cos(kx)}{x^2}$ f_n admet-elle un prolongement par continuité en 0 ? si oui définir ce prolongement.

Exercice 18:

On considère la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^3}$

1. calculer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ pour tout x réel.
2. On admet que f admet un prolongement par continuité en 0 ; définir ce prolongement.

Exercice 1:

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{4x^2 + 3x - 7} - 2x^2)$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\sqrt{x^4 + 1}} - x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{10x^2 + 9} - 7}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5} - 5} \right)$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{|x^2 - 2x| - 8}{x^2 - 5x + 4} \right)$

6. $\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x - a}} \right) \quad a \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 2:

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot \sin(2x)}{1 - \cos(x)}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(x) - \sin^3(x)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\tan(x)} - \sqrt{\tan(2x)}}{\sqrt{\tan(3x)} - \sqrt{\tan(4x)}}$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) \cdot \sin(2x)}{\cos(2x) + 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} \quad (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$

Exercice 3:Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \times \cos(2x) \times \cdots \times \cos(nx)}{x^2}$ **Exercice 4:**

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) \right)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right) \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin\left(\sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}}\right) \right)$

Exercice 5:Montrer que l'équation: $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ admet une racine dans chacune des intervalles suivants : $] -1; -\frac{1}{2}[$; $]-\frac{1}{2}; 0[$ et $]0; 1[$ **Exercice 6:**1. Montrer que l'équation : $x^3 + x + 1 = 0$ admet une racine unique dans $] -1; 0[$ 2. Etudier le signe de $(x^3 + x + 1)$ sur $] -1; 0[$.**Exercice 7:**Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet au moins une racine dans l'intervalle : $I = [0; \pi]$

Exercice 8:

Montrer que l'équation : $1 + \sin x = x$ admet au moins une racine dans l'intervalle : $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$

MATIÈRE : MATHS
Semestre I

SÉRIE D'EXERCICES
LIMITES ET CONTINUITÉ

NIVEAU : 2BAC-SM
PROF : HAOURECH FAHD

Exercice n°1

Calculer les limites suivantes:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x^2 + 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 - x^2} - 3}{x^2}$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < 1}} \frac{-x + 5}{x^2 + 3x + 2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x - 2} - \sqrt{2x^2 + 1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + 4x^2} + 4x$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 3x} - 2x$$

$$7) \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - E(x)}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} 7x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3x) \tan(2x)}{x^3} 10)$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x + 2} - 2(3 - 2x)^4}{x^2 - 1}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^2 - (m + 1)x + 1}{x^2 - 3x + 2} \text{ où}$$

m est un paramètre réel.

Exercice n°2

Étudier la continuité de f en x_0 , dans chacun des cas suivants:

$$1) \begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 1}{x + 1}; x \neq -1 \\ f(-1) = -2 \end{cases} \quad x_0 = -1$$

$$2) \begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 - 1}; x < 1 \\ f(x) = \frac{2}{x} - x; x \geq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

$$3) \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}; x < 1 \\ f(x) = x^2 + 7x - 8; x \geq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

Exercice n°3

Soit f une fonction continue en 0 et définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : f(x + y) = f(x) + f(y) - xy$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°4

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{|x^2 + x - 6|}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f

2. Montrer que f admet un prolongement par continuité en -3, que l'on déterminera.

Exercice n°5

Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°6

Montrons que:

$$(\exists \alpha \in \mathbb{R}) \quad (\forall x \in [-1, 1]) \quad \sqrt{1+x} \leq (1+x^2)\alpha + x$$

Exercice n°7

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$)

Montrer que: $\exists c \in]a, b[\left[f(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} \right.$

Exercice n°8

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que: $f(0) = 0$ et $f(1) = 4$

Montrer que: $\exists \alpha \in [0, 1] \quad f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = 2 + f(\alpha)$

Exercice n°9

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que: $(\exists a \in \mathbb{R}) f \circ f(a) = a$

Montrer que: $\exists c \in \mathbb{R} / f(c) = c$.

Exercice n°10

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 1$, admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$ et que $2 < \alpha < 3$.

Exercice n°11

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Montrer que: $(\exists \alpha \in [a, b]) : 5f(\alpha) = 2f(a) + 3f(b)$

Exercice n°12

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $[a, b]$.

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution α dans $[a, b]$.

Exercice n°13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f .
2. Montrer que f admet une fonction réciproque dans $I = [1, +\infty[$ définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
3. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice n°14

On considère la fonction f définie par: $f(x) = \frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{x}$

1. Déterminer D_f et les limites de f aux bornes de D_f .
2. Soit g la restriction de f sur $I =]0, 2]$
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
 - b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice n°15

montrer les égalités suivantes:

1. $\text{Arctan} \frac{1}{2} + \text{Arctan} \frac{1}{5} + \text{Arctan} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$
2. $(\forall x > 0) \quad \text{Arctan} x + \text{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$
3. $(\forall x < 0) \quad \text{Arctan} x + \text{Arctan} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$
4. $(\forall x \in \mathbb{R}) : \cos(\text{Arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
5. $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sin(\text{Arctan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice n°16

Calculer les limites suivantes:

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\text{Arctan} x - \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\sqrt{3}}{3}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arctan x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arctan} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \text{Arctan} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{Arctan} \left(\frac{1}{1-x^2} \right) + \frac{\pi}{2}}{x-1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\text{Arctan} x - \frac{\pi}{2} \right)$

Exercice n°17

Simplifier le nombre suivant : $A = \frac{\sqrt{18} \times \sqrt[6]{256} \times \sqrt[4]{64}}{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[6]{10^6} \times 64}$

Exercice n°18

On pose $a = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$

1. Montrer que $a^3 = 3a + 18$
2. Vérifier que 3 est la solution de l'équation $x^3 = 3x + 18$
3. En déduire la valeur de a .

Exercice n°19

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1. $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{2}$
2. $2\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{1-x} = \sqrt[8]{1-x^2}$

Exercice n°20

Calculer les limites suivantes:

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt[3]{x+8} - 2}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x-x}}{x}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{-x} + x}{\sqrt{-x} + x}$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{1-x^3} + x$	

Exercice n°21

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$

1. Étudier les variations de la fonction dérivée f'
2. a) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $-3 < \alpha < -2$
b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,25
3. Déterminer le signe de la fonction f'
4. a) En déduire les variations de la fonction f
b) montrer que $f(\alpha) = \frac{3\alpha(4-\alpha)}{4}$
c) Quel est le nombre de racines du polynôme f ?

Exercice n°22

Montrer que: $(\forall x > 0); \operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x^2 + x + 1} \right)$

Exercice n°23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1. $\operatorname{Arctan} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right) + \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$
2. $\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$

Exercice n°24

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par:
 $f_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$

1. Étudier les variations de la fonction f_n
2. En déduire que $f_n \left(\frac{2n}{n+1} \right) \leq 0$
3. a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left[\frac{2n}{n+1}; 2 \right]$
 b) Déduire le signe de $f_n(x)$ suivant les valeurs de x .

Exercice n°25

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .
 supposons que f ne s'annule pas sur I . Montrer que f garde un signe constant sur I .

Exercice n°26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
2. Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice n°27

On considère l'équation suivante : $(E) : \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $0 < \alpha < 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) .

Exercice n°28

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ tel que: $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = f \left(x + \frac{1}{2} \right)$ au moins une solution c dans $\left[0; \frac{1}{2} \right]$
2. Soit g la fonction définie par: $g(x) = f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que: $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = 0$

b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \left(\exists \alpha_n \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]\right) : f(\alpha_n) = f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice n°29

Soit f la fonction définie sur $\left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]$ par: $f(x) = \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x$

1. Montrer que f est une bijection de $\left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
2. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice n°30

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}}$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f , puis calculer les limites aux bornes de D_f .
2. Montrer que f est une bijection de $] -1; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
3. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice n°31

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}\right)$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f , puis D_E le domaine d'étude de f .
2. Simplifier $f(x)$ sur D_E .
3. Représenter graphiquement la courbe de f sur $[-2\pi; 2\pi]$ dans un repère orthonormé.

Exercice n°32

Calculer les limites suivantes:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+8} - 2}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1-x+x^2} - 1}{x-1}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 2x} - x$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{-x+x}}{\sqrt{-x+x}}$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arctan}\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)}{x-1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt[12]{x}$
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - \sqrt{x+2}}{x-2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} - 2x + 1}{\frac{2}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}}$

MATIÈRE : MATHS
Semestre I

SÉRIE D'EXERCICES
LIMITES ET CONTINUITÉ

NIVEAU : 2BAC-SM
PROF : HAURECH FAHD

Exercice n°1

Calculer Les Limites suivantes:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - x - 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}} \quad \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+1} - 2 - x}{x^2} \quad \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 + \sqrt{x})\sqrt{2-x} - 3}{x^2 - 1} \\
 & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - \sqrt{x^3}} - x\sqrt{x} \quad \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+4}\sqrt{2x+2\sqrt{x}} - 3}{\sqrt{x-1}} \quad \text{(f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+4}\sqrt{2x+2\sqrt{x}} - 3}{\sqrt{x-1}}
 \end{aligned}$$

Exercice n°2

Calculer Les Limites suivantes:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \quad \text{(b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{\sqrt{x}} \quad \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(x - E(x)))}{x} \\
 & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} xE\left(x - \frac{1}{x}\right) \quad \text{(e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} + x) \quad \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^{n+1}}
 \end{aligned}$$

Exercice n°3

Calculer Les Limites suivantes:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \tan x} \quad \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi \cos x)}{x}
 \end{aligned}$$

Exercice n°4

Calculer Les Limites suivantes:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} - n}{x - 1} \quad \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n) - 1}{x}
 \end{aligned}$$

Exercice n°5

n un entier naturel ($n \geq 2$), on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ par:

$$(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}); \quad f_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)}$$

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \frac{2^n}{n!}$.

2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-x^2)}{(1-x^n)}$ dans les deux cas n pair et n impair.

(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow -1} f_n(x)$.

Exercice n°6

On considère la fonction f définie comme suit:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{(1-x)\sqrt{1+2x}-1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

- (a) calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}$.
- (b) En déduire que f est continue en 0 .

Exercice n°7

Soit f la fonction définie par: $(\forall x \in \mathbb{R}^*); f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$
 La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ? si oui le déterminer.

Exercice n°8

Soit f la fonction définie par: $(\forall x \in \mathbb{R}^*); f(x) = \left(1 - E\left(\frac{1}{x}\right)\right) \sin(x)$

- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x E\left(\frac{1}{x}\right)$.
- (b) En déduire que f possède un prolongement par continuité en 0 à définir.

Exercice n°9

On considère la fonction h définie comme suit :
$$\begin{cases} h(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} & \text{si } x < 1 \\ h(1) = c \\ h(x) = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Trouver les réels a, b et c pour que la fonction h soit continue en 1.

Exercice n°10

Soit f la fonction définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + E(x)$
 Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°11

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}_+); g(x) = x E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

- (a) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ L'équation $g(x) = 0$, en déduire $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ L'équation $g(x) = x$.

(c) La fonction g est-elle continue en 1?
- Soit k un entier naturel ($k \geq 2$).

(a) Donner l'expression de $g(x)$ pour $x \in]\frac{1}{k^2}, \frac{1}{(k-1)^2}[$.

(b) Étudier la continuité de g en k .

Exercice n°12

α un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = x^4 + x^2 + \alpha x - 2$
 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-1, 1]$.

Exercice n°13

Montrer que l'équation : $\cos(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice n°14

Montrer que l'équation : $\cos(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice n°15

f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$, montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Exercice n°16

f une fonction continue sur $[0, 1]$, montrer que :

$$(\exists c \in]0, 1[); f(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}$$

Exercice n°17

f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ telle que $f(a) < 0$, montrer que :

$$(\exists c \in]a, b[); f(c) = \frac{a-c}{b-c}$$

Exercice n°18

f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$. Montrer que :

$$(\exists c \in]a, b[); f(c) = g(c)$$

Exercice n°19

1. g une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $(\forall x \in [a, b]); g(x) \neq 0$ montrer que :

$$((\forall x \in [a, b]); g(x) > 0) \text{ ou } ((\forall x \in [a, b]); g(x) < 0)$$

2. f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $(\forall x \in [a, b]); f(x) \neq x$. Montrer que l'équation : $f \circ f(x) = x$ n'admet pas de solutions dans $[a, b]$

Exercice n°20

f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$ et n un entier naturel ($n \geq 2$).
Montrer que L'équation : $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$

Exercice n°21

f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) \neq f(1)$ montrer que :

$$(\exists c \in]0, 1[); 2f(c) = f(0) + f(1)$$

Exercice n°22

f une fonction continue positive sur $[0, +\infty[$ telle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha < 1$. Montrer que : $(\exists \beta \in [0, +\infty[); f(\beta) = \beta$.

Exercice n°23

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$), et f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$(\forall x \geq 0); f_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$$

(a) Étudier les variations de f_n , et en déduire le signe de $f_n\left(\frac{2n}{n+1}\right)$.

(b) montrer que:

$$(\exists \beta \in]\frac{2n}{n+1}, +\infty[); f_n(\beta) = 0$$

Exercice n°24

Calculer les Limites suivantes:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 + x + 1} - \sqrt{x + 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt[4]{x^4 + 1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 4} + \sqrt{x + 2} - 3}{x - 2}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[2n]{x + 1} + \sqrt[2n]{x}}{\sqrt[n]{x^2 + 1}}$$

Exercice n°25

Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice n°26

Calculer les limites suivantes:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sqrt{x^2 + 1} - 1)}{x^2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \sqrt{x^2 + 1} - x \arctan(x)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\arctan(2x) - \arctan(x))$$

Exercice n°27

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

(a) $\sqrt[3]{x + \sqrt{x} + 1} = \sqrt{x}.$

(b) $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 4\sqrt[3]{(x-1)^2} = 4\sqrt[3]{1-x^2}$

(c) $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$

(d) $\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}.$

Exercice n°28

Pour $x \in \mathbb{R}^*$; simplifier L'expression suivante :

$$\arctan\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Exercice n°29

Vérifier L'égalité suivante :

$$2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

Exercice n°30

1. (a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(b) Déduire L'expression de :

$$\sin(\arctan(x))$$

2. Soient p, q et r trois réels positifs tels que : $1 + p^2 = qr.$

(a) Montrer que :

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{p}\right)\right) = \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{p+r}\right) + \arctan\left(\frac{1}{p+q}\right)\right)$$

(b) Déduire alors:

$$\arctan\left(\frac{1}{p}\right) = \arctan\left(\frac{1}{p+r}\right) + \arctan\left(\frac{1}{p+q}\right)$$

3. Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+); \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+x}\right) + \arctan\left(\frac{x}{4+\sqrt{3}x}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Exercice n°31

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

1. Déterminer D_f domaine de définition de la fonction f .
2. Montrer est une bijection de D_f dans un intervalle J à déterminer.
3. Donner L'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$ (f^{-1} la fonction réciproque de f).

Exercice n°32

Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$(\forall x \in [0, 1]); g(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$$

Montrer que g réalise une bijection de $[0, 1]$ dans un intervalle J à déterminer, puis définir sa fonction réciproque

Exercice n°33

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1 + \sqrt[3]{x-1}} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = \arctan\left(\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}\right) & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}_+$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Étudier la continuité de f en 1 .
4. Soit g la restriction de f à $[1, +\infty[$
 - (a) Montrer que g est une bijection de $[1, +\infty[$ dans un intervalle J à déterminer.
 - (b) Donner L'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice n°34

On considère f la fonction définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \sin(x)$

1. Montrer que f est une bijection de I dans $] -1, 1[$, f^{-1} sa fonction réciproque
2. Démontrer que : $(\forall x \in] -1, 1[) \quad ; \quad f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

Exercice n°35

f la fonction définie sur $] -1, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. (a) Calculer les limites de f aux bords de son domaine de définition.
(b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
(c) Exprimer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
2. On pose pour tout $x \in] -1, 1[$; $F(x) = \arctan(f(x))$
(a) Montrer que F est une bijection de $] -1, 1[$ dans un intervalle K à déterminer.
(b) Donner l'expression de $F^{-1}(x)$ pour tout $x \in K$.
3. Dédire alors que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

2bac *Limites et continuité*

Ennaji khalid



Soit la fonction définie par:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x - 2} & ; \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = 5 \end{cases}$$

◆ *Etudier la continuité de la fonction f en 2*



Soit la fonction définie par:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} & , x < 1 \\ f(x) = \frac{x - 4}{3x - 1} & , x \geq 1 \end{cases}$$

◆ *Etudier la continuité de f en 1*



Soit a un nombre réel et f une fonction définie par:

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + 2 & , x \leq 1 \\ f(x) = \frac{ax - 2}{2(x - 2)} & , x > 1 \end{cases}$$

◆ *Trouver la valeur de a pour que f soit continue en 1*



OstadiPc



pr ennaji khalid



0706282282