

Exercice 1.

3,5 points

3.50

Les questions suivantes sont indépendantes:

1.00

① ~ Comparer : $\sqrt[3]{3}$ et $\sqrt{2}$

1.00

② ~ Simplifier l'expression : $A = \frac{\sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[3]{2}}$

3.50 pts

③ ~ Soit f la fonction définie par:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt[3]{7x+1}-2}{x-1}; x \neq 1 \\ f(1) = \alpha \end{cases}$$

1.50

~ Déterminer la valeur de α pour que f soit continue en 1

Exercice 2.

5,00 points

5.00

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{x} - 3\sqrt{x-1}$

0.50

① ~ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

1.00

② ~ En utilisant la définition, montrer que f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

1.50

③ ~ Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$ et que $1 < \alpha < 2$

1.00

④ ~ Résoudre dans $[1; +\infty[$ l'inéquation $f(x) < 1$

1.00

⑤ ~ Montrer que : $9\alpha^3 - 10\alpha^2 + 4\alpha = 4$

Exercice :

11,50 points

2/2

11.50

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}; x \neq 2 \\ f(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

11.50 pts

0.50

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0.50

2. Montrer que f est continue en $x_0 = 2$

1.00

3. a. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 2$

0.50

b. interpréter graphiquement le résultat obtenu.

1.50

4. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ à droite, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.50

5. a. Vérifier que : $\forall x > 1; f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$

1.00

b. Montrer que : $\forall x > 1; f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)^2}$

1.00

c. Dresser le tableau de variations de f

1.00

6. Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point $A(2; \frac{1}{2})$

1.00

7. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

1.50

b. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$, puis calculer $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$

1.50

c. Déterminer $f^{-1}(x)$, pour tout $x \in J$

Devoir surveillé 1 Correction

El hajjaji

Exercice 1.

1. Comparons $\sqrt[3]{3}$ et $\sqrt{2}$

$$\text{On a : } \begin{cases} \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9} \\ \sqrt{2} = \sqrt[6]{8} \end{cases}$$

Puisque $9 > 8$

Alors $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ (Car $\sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8}$)

2. Simplifions l'expression : $A = \frac{\sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[3]{2}}$

$$\text{On a } A = \frac{\sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[8]{2} \sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{31}{24}} = \sqrt[24]{2^{31}}$$

$$3. \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt[3]{7x+1}-2}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = a \end{cases}$$

Déterminons la valeur de a pour que f soit continue en $x_0 = 1$

Pour que f soit continue en $x_0 = 1$, il faut et il suffit que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7x+1}-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7x+1}^3 - 2^3}{(x-1)(\underbrace{\sqrt[3]{7x+1}^2 + 2\sqrt[3]{7x+1} + 2^2}_{\Delta(x)})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x+1-8}{(x-1)\Delta(x)}$$

$$a \cdot b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

$$\Delta(x) \rightarrow 12 \leftarrow 2^2 \times 3$$

(3)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x-7}{(x-1)\Delta(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7(x-1)}{(x-1)\Delta(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7}{\Delta(x)} \\
 &= \frac{7}{12}
 \end{aligned}$$

$\Delta(x) = \sqrt[3]{7x+1} + 2\sqrt{7x+1} + 4$
 $\Delta(1) = 4 + 4 + 4 = 12$

Pour que f soit continue en 1 il faut que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

Et par suite $a = \frac{7}{12}$

Exercice 2.

$$f(x) = \frac{2}{x} - 3\sqrt{x-1} \quad \text{avec } x \in [1; +\infty[$$

1. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - 3\sqrt{x-1}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$

Et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - 3\sqrt{x-1} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$
 Alors : $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

2. Montrons que f est strictement décroissante
~ en utilisant la définition ~.

Soient x et y deux éléments de $[1; +\infty[$ tel que $x < y$.

$$x < y \Rightarrow \frac{2}{x} > \frac{2}{y} \text{ et } x-1 < y-1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} > \frac{2}{y} \text{ et } \sqrt{x-1} < \sqrt{y-1} \quad \left(\begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ y-1 \geq 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} > \frac{2}{y} \text{ et } -3\sqrt{x-1} > -3\sqrt{y-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} - 3\sqrt{x-1} > \frac{2}{y} - 3\sqrt{y-1}$$

$$\Rightarrow f(x) > f(y)$$

D'où f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

3. Montrons que l'équation $f(x) = 1$ admet une
unique solution α sur $[1; +\infty[$ et que $\alpha \in]2; 3[$

On a : $x \mapsto x-1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (Polynôme)

En particulier, elle est continue sur $[1; +\infty[$

Et puisque $\forall x \in [1; +\infty[; x-1 \geq 0$

Alors : $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est continue sur $[1; +\infty[$

Donc : $x \mapsto -3\sqrt{x-1}$ est continue sur $[1; +\infty[$

Et puisque $x \mapsto \frac{2}{x}$ est continue sur $[1; +\infty[$

(Car elle est sur $]0; +\infty[$ (Fonction rationnelle))

Alors $f: x \mapsto \frac{2}{x} - 3\sqrt{x-1}$ est continue sur $[1; +\infty[$

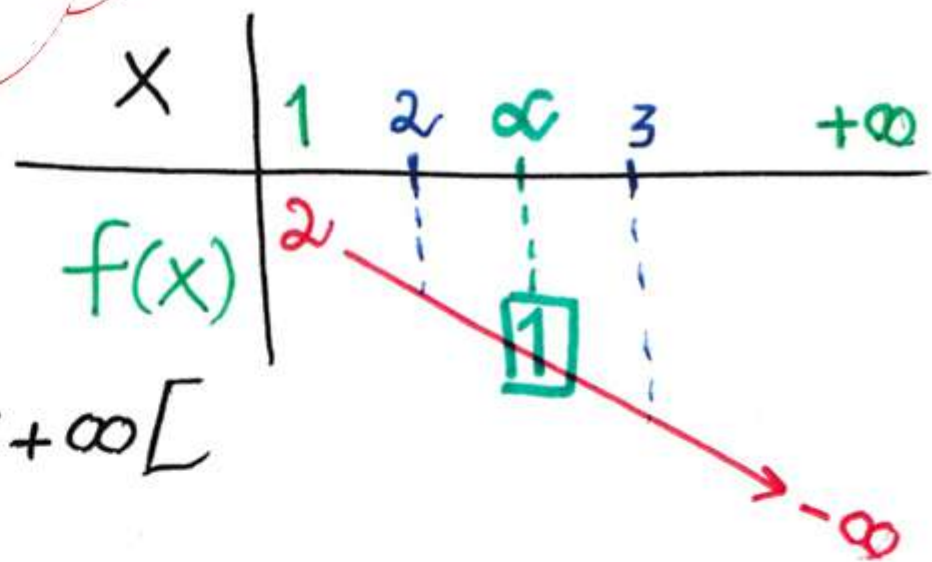
(Comme étant somme de deux fonctions continues)

Et on a f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

$$\text{Et: } f([1; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(1)] \\ =]-\infty; 2]$$

Et puisque $1 \in]-\infty; 2]$

$$f(1) = \frac{2}{1} - 3\sqrt{1-1} = 2$$



Alors l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$

.. Vérifions que $\alpha \in]1; 2[$

Pour cela, il suffit de vérifier que 1 est compris entre $f(1)$ et $f(2)$ (انظر الجدول مَحْصُورٌ)

$$\text{On a } f(1) = 2 \text{ et } f(2) = \frac{2}{2} - 3\sqrt{2-1} = -2$$

Puisque $f(2) < 1 < f(1)$ (Donc $f(2) < f(\alpha) < f(1)$)

Alors, on aura : $\alpha \in]1; 2[$

4. Résolvons dans $[1; +\infty[$ l'inéquation $f(x) < 1$

On a f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$

$$\text{Donc: } \bullet x > \alpha \Rightarrow f(x) < f(\alpha) \\ \Rightarrow f(x) < 1$$

➤ Réciproquement:

$$\bullet f(x) < 1 \Rightarrow f^{-1}(f(x)) > f^{-1}(1) \\ \Rightarrow x > \alpha$$

f^{-1} existe et strictement décroissante sur $f([\alpha; +\infty[) =]-\infty; 1]$

$$f^{-1}(1) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 1$$

Conclusion

$$f(x) < 1 \Leftrightarrow x > \alpha$$

$$\text{D'où } S =]\alpha; +\infty[$$

5. Montrons que : $9\alpha^3 - 10\alpha^2 + 4\alpha = 4$

$$\text{On a } f(\alpha) = 1$$

$$f(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha} - 3\sqrt{\alpha-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\alpha-1} = \frac{2}{\alpha} - 1$$

$$\Leftrightarrow (3\sqrt{\alpha-1})^2 = \left(\frac{2}{\alpha} - 1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 9(\alpha-1) = \frac{4}{\alpha^2} - \frac{4}{\alpha} + 1$$

$$\Leftrightarrow 9\alpha - 9 = \frac{4 - 4\alpha + \alpha^2}{\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow 9\alpha^3 - 9\alpha^2 = 4 - 4\alpha + \alpha^2$$

$$\Rightarrow 9\alpha^3 - 9\alpha^2 - \alpha^2 + 4\alpha = 4$$

$$\Rightarrow 9\alpha^3 - 10\alpha^2 + 4\alpha = 4$$

$$\text{D'où : } 9\alpha^3 - 10\alpha^2 + 4\alpha = 4$$

$$\begin{aligned} \alpha \in]1; 2[&\Rightarrow \frac{1}{\alpha} \in]\frac{1}{2}; 1[\\ &\Rightarrow \frac{2}{\alpha} \in]1; 2[\\ &\Rightarrow \frac{2}{\alpha} - 1 > 0 \end{aligned}$$

Exercice 3

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} ; x \neq 2 \\ f(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(1-\frac{1}{x})}-1}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1-\frac{1}{x}}-1}{x(1-\frac{2}{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} (\sqrt{1-\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}})}{x(1-\frac{2}{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{2}{x}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{2}{x}} = 1$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2. Montrons que f est continue en $x_0 = 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ (Car $f(2) = \frac{1}{2}$)

Alors f est continue en $x_0 = 2$

3. a. La dérivabilité de f en $x_0 = 2$

Il faut calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} - \frac{1}{2}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2\sqrt{x-1} - 2 - (x-2)}{2(x-2)}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\sqrt{x-1} - x}{2(x-2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2\sqrt{x-1} - x)(2\sqrt{x-1} + x)}{2(x-2)^2(2\sqrt{x-1} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-1) - x^2}{2(x-2)^2(2\sqrt{x-1} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 4x - 4}{2(x-2)^2(2\sqrt{x-1} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x^2 - 4x + 4)}{2(x-2)^2(2\sqrt{x-1} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)^2}{2(x-2)^2(2\sqrt{x-1} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{2(2\sqrt{x-1} + x)} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en $x_0 = 2$ et $f'(2) = -\frac{1}{8}$.

b. L'interprétation géométrique.

La dérivabilité
Les tangentes

(C_f) admet une tangente au point $A(2; \frac{1}{2})$
de coefficient directeur égal à $-\frac{1}{8}$

4. La dérivabilité de f en $x_0 = 1$ à droite.

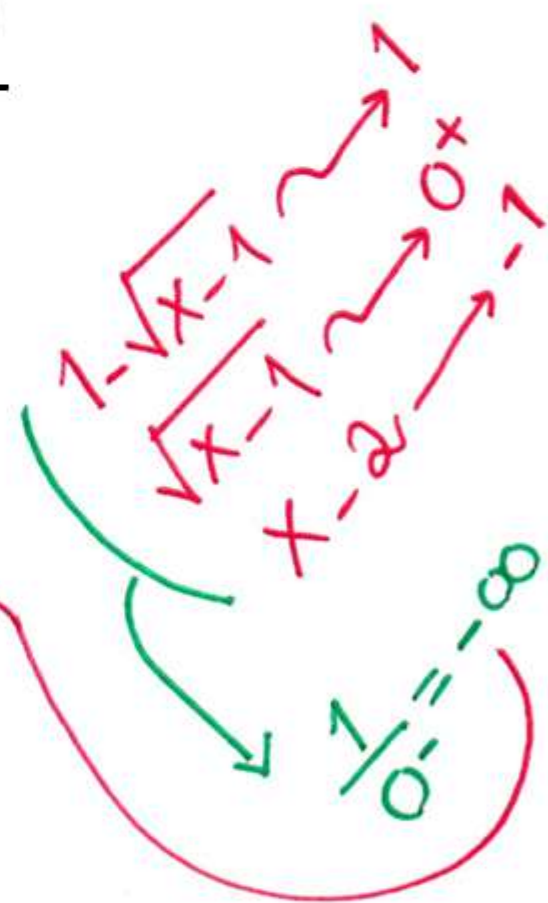
$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} - 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\sqrt{x-1}-1-x+2}{x-2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} - (x-1)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}(1 - \sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}^2 (x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}(x-2)} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

فنجيد
حساب
 $f(1)$
 $f(1) = 1$

Donc f n'est pas dérivable en 1
à droite.

. Interprétation géométrique.

(C_f) admet une demi tangente verticale à
droite du point $B(1; 1)$.



5. a. Vérifions que : $\forall x > 1; f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$

Soit $x \in]1; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{On a } f(x) &= \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} \\ &= \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \frac{x-1-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \end{aligned}$$



D'où : $\forall x > 1; f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$

b. Montrons que : $\forall x > 1; f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)^2}$

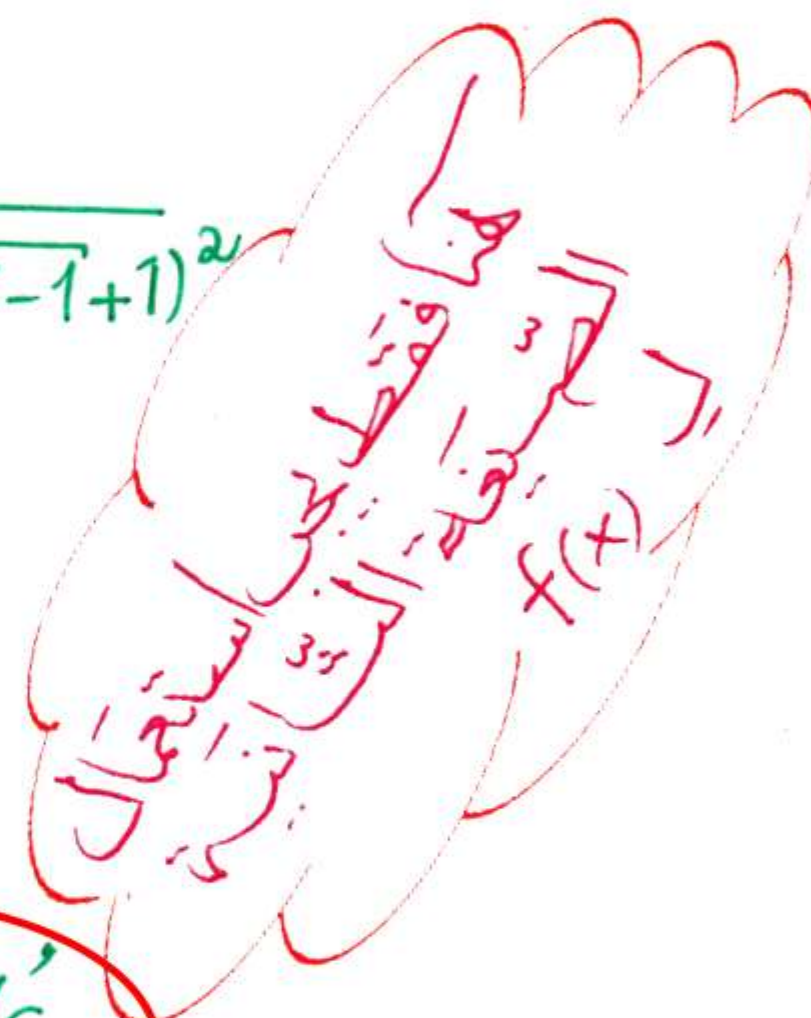
On a f est dérivable sur $]1; +\infty[$

Soit $x \in]1; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \right)' \\ &= -\frac{(\sqrt{x-1}+1)'}{(\sqrt{x-1}+1)^2} \\ &= -\frac{\frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}} + 0}{(\sqrt{x-1}+1)^2} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)^2} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$



D'où : $\forall x \in]1; +\infty[; f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)^2}$

c. Le tableau de variations de f .

↳ Étudions d'abord le signe de $f'(x)$

Soit $x > 1$

$$\text{On a : } f'(x) = - \frac{1}{2\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)^2}$$

Puisque : $2\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)^2 > 0$ et $-1 < 0$

Alors : $\forall x \in]1; +\infty[; f'(x) < 0$

Donc f est strictement décroissante sur D_f .

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-\frac{1}{8}$	—
$f(x)$	1		$-\infty$

6. Une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $A(2; \frac{1}{2})$

$$(T): y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$(T): y = -\frac{1}{8}(x-2) + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{8}x + \frac{1}{4} + \frac{2}{4}$$

$$(T): y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{4}$$

$$\text{D'où : } (T): y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= -\frac{1}{8} \\ f(2) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

7. a. Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1}

On a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$; pour tout $x \in [1; +\infty[$

On a : $x \mapsto x-1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme)

Et En particulier elle est sur $[1; +\infty[$

Et $\forall x \in [1; +\infty[; x-1 \geq 0$

Donc $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est continue sur $[1; +\infty[$

Donc $x \mapsto \sqrt{x-1}+1$ est continue sur $[1; +\infty[$

(car $x \mapsto 1$ est continue sur $[1; +\infty[$)

Et puisque : $\forall x \in [1; +\infty[; \sqrt{x-1}+1 \neq 0$

Alors $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$ est continue sur $[1; +\infty[$

Et on a f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1}

définie sur l'intervalle J tel que,

$$J = f(I)$$

$$= f([1; +\infty[)$$

$$=]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(1)]$$

$$=]0; 1]$$

7.6. Montrons que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et calculons $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$

الاشكال

نأخذ، الخاصية التي يجب استعمالها هي:

$$(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\frac{1}{2}))} \quad (*) \quad \text{أولاً}$$

← أول عملية إذن هي تحديد $f^{-1}(\frac{1}{2})$

لنبدأ انطلاقاً من التعريف، لدينا $f(2) = \frac{1}{2}$
 ثم إذن $f^{-1}(\frac{1}{2}) = 2$

$$(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{f'(2)} \quad (*) \text{ تصبح:}$$

← ولكي تكون f^{-1} قابلة للاشتقاق في $\frac{1}{2}$ dérivable en $\frac{1}{2}$

يجب أن تكون f قابلة للاشتقاق في 2 و $f'(2) \neq 0$

تتمة الجواب:

On a f est dérivable en 2

Et on a $f'(2) = -\frac{1}{8}$

Donc $f'(2) \neq 0$

D'où f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$

Et on a: $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\frac{1}{2}))}$

$$= \frac{1}{f'(2)}$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{8}}$$

$$= -8$$

D'où $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = -8$

1.c. Déterminons $f^{-1}(x)$, pour tout $x \in J$.

Soit $x \in J$, cherchons $y \in I$ tel que $f(y) = x$

$$f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y-1}+1} = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-1}+1 = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-1} = \frac{1}{x} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-1} = \frac{1-x}{x} \quad (x \in]0; 1]) \quad (\text{Donc } \frac{1-x}{x} \geq 0)$$

$$\Rightarrow y-1 = \left(\frac{1-x}{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow y = 1 + \left(\frac{1-x}{x}\right)^2$$

D'où : $\forall x \in J; f^{-1}(x) = 1 + \left(\frac{1-x}{x}\right)^2$

يُسْتَحْسَنُ اسْتِعْمَالُ
صِيغَةِ $f(x)$ الَّتِي تَحْتَوِي
عَلَى x فِي مَكَانٍ وَاحِدٍ



ذ: البشير الحجابي