

INSTRUCTIONS GENERALES

- ❖ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.
- ❖ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui convient.
- ❖ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Exercice 1

1 On pose

1pt

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{27}} ; \quad B = \sqrt[4]{2} ; \quad C = \sqrt[3]{5}$$

Simplifier A puis montrer que: $B < A < C$

2 Calculez les limites suivantes:

3pt

a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x-5} - 1}{x^2 - 4}$

b $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 4 + \sqrt{2x}}{x^2 - 4}$

c $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - 2x + 1$

3 Résoudre équation suivant : (E) : $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 6 = 0$

1pt

4 Soit h la fonction définie sur R par :

1pt

$$\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{ax} & x \neq 0 \text{ et } a \neq 0 \\ h(0) = 2a + 1 \end{cases} ;$$

Déterminer les deux valeurs de a pour que h soit continue en 0.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par: $f(x) = x^3 + 2x - 1$,1 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}$, une solution unique notée α .

1,5pt

2 Vérifier que $0 < \alpha < 1$.

1pt

3 En utilisant la méthode de dichotomie déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.5

1.5pt

4 Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

1pt

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $2x < 1 - x^3$

1pt

Exercice 3

On considère la fonction f définie par: $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^3 - 2$.

- 1 Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de f puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 0.5pt
- 2 a Vérifier que: $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{f(x)+3}{x} = \frac{x-3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$. 0.5pt
 b Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat obtenu. 0.75pt
- 3 a Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. 0.5pt
 b En déduire que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. 0.5pt
 c Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β sur $]0; +\infty[$. 0.75pt
- 4 a Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J que l'on précisera. 1pt
 b Résoudre dans J l'inéquation $f^{-1}(x) \geq 4$. 0.5pt
 c Comparer $f^{-1}(\sqrt{3})$ et $f^{-1}(\sqrt[3]{2})$. 0.5pt
- 5 Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et que $(f^{-1})'(0) = \frac{2\sqrt{\beta}}{3(\sqrt{\beta}-1)^2}$. 1.5pt
- 6 Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. 1pt

Exercice bonus

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 0$ et $f'(2) = 3$.
 Déterminer les limites ci-dessous.

- a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)}^{2025}}{x-2}$. 1pt
- b $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(\sqrt[3]{x+6})}{x-2}$. 1pt



Exercice 1

- ① On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$
 - a Dresser la tableau de variations de g .
 - b Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet un unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que : $0 < \alpha \leq 1$
- ② On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{3x}$
 - a Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2}$.
 - b Dresser la tableau de variations de f .
 - c Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha}$.

Exercice 2

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{1-x^2} - 2x$

- ① Déterminer domaine de définition de f .
- ② Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [0, 1]$ Montrer que g est continue sur I .
- ③ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer .
- ④ Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
- ⑤ Donner le sens de variations de g^{-1} sur J
- ⑥ Montrer que l'équation : $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution dans J , puis déterminer cette solution .

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 3$

- ① a Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
b Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ et déterminer sa monotonie sur $[0, +\infty[$.
- ② a Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]1; 2[$.
b Dédire le signe de $f(x)$ sur $[0, +\infty[$.
- ③ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer .
- ④ Préciser la monotonie de f^{-1} sur J .
- ⑤ Comparer $f^{-1}(10^{-3})$ et $f^{-1}(10^{-5})$.

Exercice 4

① On pose $A = \frac{\sqrt{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{27}}$; $B = \sqrt[4]{2}$; $C = \sqrt[3]{5}$

Simplifier A puis montrer que: $B < A < C$

② Calculez les limites suivantes:

a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x-5} - 1}{x^2 - 4}$

b $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 4 + \sqrt{2x}}{x^2 - 4}$

c $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}}{2x + 1}$

③ Résoudre équation suivant : (E) : $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 6 = 0$

④ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{ax} & x \neq 0 \text{ et } a \neq 0 \\ h(0) = 2a + 1 \end{cases}$$

Déterminer les deux valeurs de a pour que h soit continue en 0 .

Exercice 5

On considère la fonction f définie par: $f(x) = x^3 + 2x - 1$,

① Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}$, une solution unique notée α .

② Vérifier que $0 < \alpha < 1$.

③ En utilisant la méthode de dichotomie déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.5

④ Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

⑤ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $2x < 1 - x^3$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1} + 3 & ; x \geq 1 \\ f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & ; x < 1 \end{cases}$$

① **a** Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

② Etudier la continuité de la fonction f aux points $x_0 = 1$.

③ Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

④ Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.

a Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b Calculer $(\forall x \in J) : g^{-1}(x)$.

c Résoudre dans J l'équation : $g^{-1}(x) = 2$.